关于 Γ-半环*

徐忠明

（杭州大学）

§1. 前言

假定我们有两个带零元的(Abel)加半群M与N，令A是M到N的所有同态所组成的加半群(带零元)，B是N到M的所有同态所组成的加半群(带零元)，于是我们可以按同态的复合定义三个元素f_1，$f_2\in A$与$g\in B$的积$f_1gf_2\in A$。显然有下列运算律：

$$(f_1g_1f_2)g_2f_3=f_1g_1(f_2g_2f_3)\ （结合律），$$

$$(f_1+f_2)g_1f_3=f_1g_1f_3+f_2g_1f_3,\ f_1(g_1+g_2)f_2=f_1g_1f_2+f_1g_2f_2,$$

$$f_1g_1(f_2+f_3)=f_1g_1f_2+f_1g_1f_3\ （分配律）。$$

这就促使我们抽象地来研究这样的新代数系统：

定义1.1　设$\Gamma\equiv\{\alpha,\beta,\gamma,\cdots\cdots\}$是一个带零元的(Abel)加半群，若带零元的(Abel)加半群$S\equiv\{x,y,z,\cdots\cdots\}$对所有的元素$x,y,z\in S$与所有的元素$\alpha,\beta,\gamma\in\Gamma$，满足下列条件：

(1) $x\alpha y\in S$,

(2) $(x\alpha y)\beta z=x\alpha(y\beta z)$,

(3) $(x+y)\alpha z=x\alpha z+y\alpha z$，$x(\alpha+\beta)y=x\alpha y+x\beta y$,

(4) x,α,y中有一个为零元蕴含$x\alpha y=0$，则称S为Γ-半环；当S是加法可消(Abel)加半群时，则称S为加法可消Γ-半环。

例子

1° 带零元的半环S是Γ-半环，其中置$\Gamma\equiv S$。

2° 设D是带零元的半环，$M_{p,q}(D)$表示所有D上$p\times q$阶矩阵所成的加半群，则

(a) $M_{p,q}(D)$是具$\Gamma\equiv M_{p,q}(D)$的Γ-半环，其中结合法规定为$x\alpha y=x\alpha^t y$，$\forall x,y,\alpha\in M_{p,q}(D)$，$\alpha^t$是$\alpha\in M_{p,q}(D)$的转置矩阵；

(b) $M_{p,q}(D)$是具$\Gamma\equiv M_{q,p}(D)$的Γ-半环，其中结合法为通常的矩阵乘法。

3° $C\equiv\{ni\mid n$是非负整数，i是虚单位$\}$是具$\Gamma\equiv C$的Γ-半环，其中结合法为通常的乘法。

* 1980年12月20日收到。

本文在§2中引入了一些如理想、广零(zeroid)等相应的概念，利用S. Bourne的同余关系[1]引进了Γ-半环的同余商Γ-半环；在§3中讨论了同态的有关问题，并得到了与环论中类似的同构定理；在§4中给出了右半正则右理想等有关概念，并通过它们刻划Γ-半环的Jacobson根及其有关性质；在§5中利用S. Bourne and H. Zassenhaus[2]等效关系引进Γ-半环的半根及其有关性质，当Γ-半环是加法可消时，这两个根一致(见推论5、6).

下文中，凡是不会引起混淆的情况，为了简便起见，S恒表示Γ-半环.

§2. 基本概念

设A，B是S的两个子集，Ω是Γ的子集，用$A\Omega B$表示S中的子集$\{\Sigma a_i\omega_i b_i | a_i\in A, \omega_i\in\Omega, b_i\in B\}$，这里的“$\Sigma$”指有限和.

定义2.1　S的一个子集I称为它的一个右理想，如果I满足：

i) $i_1+i_2\in I$, $\forall i_1, i_2\in I$,

ii) (S的零元) $o\in I$,

iii) $i\alpha s\in I$, $\forall i\in I$, $\alpha\in\Gamma$, $s\in S$.

类似地，可相应地定义左理想、双边理想. 在不引起混淆时，双边理想也简称为理想.

定义2.2　设I是S的理想，S中两个元素s_1与s_2说是关于模I是同余的，记为$s_1\equiv s_2 (mod\ I)$，如果有$i_1, i_2\in I$，使$s_1+i_1=s_2+i_2$成立.

显然，与半环[1]中一样，关于模I的同余关系是一个等价关系，于是，有S/I. 我们用$\bar{s}$表示元素$s\in S$所在的模I的同余类，即

$$\bar{s}\equiv\{x\in S | x+i_1=s+i_2,\ \exists i_1, i_2\in I\},$$

$$S/I\equiv\{\bar{s} | s\in S\}.$$

因为，当$s_1\equiv s_2(mod I)$与$s_1'\equiv s_2'(mod I)$时有$s_1+s_2\equiv s_1'+s_2'(mod I)$与$s_1\alpha s_2\equiv s_1'\alpha s_2'(mod\ I)$，$\forall\alpha\in\Gamma$，故在$S/I$中，可以用通常方法定义如下运算：

$$\bar{s}_1+\bar{s}_2=\overline{s_1+s_2},$$

$$\bar{s}_1\alpha\bar{s}_2=\overline{s_1\alpha s_2},\quad \forall s_1, s_2\in S,\ \alpha\in\Gamma.$$

显然，S/I对这些运算构成一个Γ-半环，称为Γ-半环S关于理想I的同余商Γ-半环，简说成Γ-半环S/I. 其中零元$\bar{o}\equiv\{x\in S | x+i_1=i_2,\ \exists i_1, i_2\in I\}$. 显见，$\bar{o}$是$S$中的一个理想，且$I\subseteq\bar{o}$. 通常$\bar{s}\neq s+I$.

设A是S的理想，作集合

$$\bar{A}\equiv\{x\in S | x\equiv 0(mod A)\}.$$

易知$\bar{A}$也是S的一个理想，且$\bar{A}\supseteq A$. 通常称$\bar{A}$是A的闭包.

定义2.3　设A是S的一个理想，若$\bar{A}=A$，则称A是S的一个闭理想.

定理2.4　S的一个理想A是闭的充要条件是：若$a+x\in A$ ($a\in A$, $x\in S$)，则$x\in A$.

证明　**充分性**：设 $x\in\bar{A}$，则有 $i_1,i_2\in A$，使 $x+i_1=i_2$，从而 $x\in A$，得 $\bar{A}\subseteq A$；结合 $A\subseteq\bar{A}$，故 $\bar{A}=A$，即 A 是 S 的一个闭理想。

必要性：若 $a+x\in A$ $(a\in A, x\in S)$，则有 $i\in A$，使 $a+x=i$，即 $x\equiv 0(modA)$ 或 $x\in\bar{A}$。因 A 是闭理想，所以 $x\in A$。证毕。

与在半环中一样，对理想 A，A_1，A_2 有如下结果：

1) $\bar{A}=\{x\in S|x+i_1=i_2,\ \exists\, i_1,i_2\in A\}$。

2) $\bar{\bar{A}}=\bar{A}$。

3) 若 $A_1\subseteq A_2$，则 $\bar{A}_1\subseteq\bar{A}_2$。

4) $\overline{\bar{A}_1+\bar{A}_2}=\overline{A_1+A_2}$。

5) $\overline{s\alpha A}=\overline{s\alpha\bar{A}}$，$\forall\alpha\in\Gamma$，$s\in S$。

6) 若 $\bar{A}_1=A_1$，$\bar{A}_2=A_2$，则 $\overline{A_1\cap A_2}=A_1\cap A_2$。

7) $x\equiv y(modA)$ 当且仅当 $x\equiv y(mod\bar{A})$。

在 S 的关于理想 I 的同余商 Γ-半环 S/I 中，同余类 $\bar{0}$ 是 S 中的闭理想，即 $\bar{I}=\bar{0}$，且 $S/I=S/\bar{I}$。从而得

定理2.5　在 S 中，理想 I 是关于模 I 的同余类的充要条件是 $\bar{I}=I$（即 I 是 S 的一个闭理想）。

定理2.6　设 B 是 S 的一个理想，则 $\bar{B}$ 是由 B 生成的(最小)闭理想。

证明　因 $\bar{B}\supseteq B$，故只需证明 $\bar{B}$ 被包含在 S 的任何一个包含 B 的闭理想 A 之中。

任取 $x\in\bar{B}$，则有 $i_1,i_2\in B$，使 $x+i_1=i_2$。因 A 是闭理想且 $A\supseteq B$，由定理 2.4 知 $x\in A$。证毕。

定义2.7　在 S 中，集合 $\{x\in S|x+z=z,\ \exists\, z\in S\}$ 称为 Γ-半环 S 的广零(Zeroid)，记为 $Z(S)\equiv\{x\in S|x+z=z,\ \exists\, z\in S\}$。

在加法可消的 Γ-半环 S 中，$Z(S)=(0)$。易得

1) $Z(S)$ 是 S 的一个理想。

2) $\overline{Z(S)}=Z(S)$，即 $Z(S)$ 是 S 的一个闭理想。

3) 设 I 是 S 的一个理想，则 I 的广零 $Z(I)$ 也是 S 的一个理想。

定理2.8　S 关于它的广零 $Z(S)$ 的同余商 Γ-半环 $S/Z(S)$ 的广零 $Z(S/Z(S))=(0)$。

证明　设 $\bar{S}=S/Z(S)$，需证 $Z(\bar{S})=(0)$。

任取 $\bar{z}\in Z(\bar{S})$，则有 $\bar{x}\in\bar{S}$，使 $\bar{z}+\bar{x}=\bar{x}$，即 $\overline{z+x}=\bar{x}$，从而，有 $z_1,z_2\in Z(S)$，使 $z+x+z_1=x+z_2$。又因 $z_i\in Z(S)$，有 $x_i\in S$，使 $z_i+x_i=x_i$，$i=1,2$。因此 $z+x+x_1+x_2=z+x+(z_1+x_1)+x_2=(z+x+z_1)+x_1+x_2=(x+z_2)+x_1+x_2=x+x_1+(z_2+x_2)=x+x_1+x_2$，故 $z\in Z(S)$，即 $\bar{z}=0$。因之，$Z(\bar{S})=(0)$。证毕。

§3. Γ-半环的同态

同 Γ-环[5]一样，我们定义 Γ-半环的同态。

定义3.1　设 S 与 S' 都是 Γ-半环，映射 φ：$s\mapsto s'$ $(s\in S,\ s'\in S')$ 称为 S 到 S' 的一个同态，如果满足：

1) $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$，$\varphi(o)=o'$（$o,o'$ 依次为 S 与 S' 的零元）.

2) $\varphi(x\alpha y)=\varphi(x)\alpha\varphi(y)$，$\forall x,y\in S$，$\alpha\in\Gamma$.

若$\varphi S=S'$，则称φ是一个满同态；若φ是满同态且其同态核 $ker\varphi\equiv\{x\in S|\varphi x=0'\}=(0)$，则称$\varphi$是一个半同构；若$\varphi$是1—1的满同态，则称$\varphi$是一个同构. 若$\Gamma$-半环$S$与$S'$之间有一个同构，则称$S$与$S'$是同构的，有时简记为$S\underset{\Gamma}{\cong}S'$.

Γ-半环S到Γ-半环S/I（其中I是S的理想）的映射：$s\mapsto\bar{s}(s\in S)$是一个满同态，其同态核为$\bar{I}$，该同态称为S到S/I上的自然同态.

显见，Γ-半环S到Γ-半环S'的同态核$ker\varphi$是S的一个闭理想. 当φ是满同态时，Γ-半环$S/ker\varphi$与S'是半同构的（证法与[4]中一样）.

预理3.2　设φ是S到Γ-半环S'上的满同态，则S'的闭理想A'的原像$A=\varphi^{-1}(A')$也是S的一个闭理想.

证明　$A=\varphi^{-1}(A')$是S的一个理想，这是显然的. 下证A是闭的.

设$x\equiv0\ (mod\ \varphi^{-1}(A'))$，则有$a,b\in\varphi^{-1}(A')$使$x+a=b$，因此$\varphi(x+a)=\varphi(b)$，即$\varphi x+\varphi a=\varphi b$. 因$\varphi a,\varphi b\in A'$且$A'$是闭的，故$\varphi x\in A'$，从而$x\in\varphi^{-1}(A')$. 于是$A$是闭的. 证毕.

预理3.3　设I是S的闭理想，ν是S到Γ-半环S/I的自然同态，若S的闭理想$N\supseteq I$，则$\nu N=N/I$，其中$\nu N\equiv\{\nu a|a\in N\}$.

证明　设$\nu a\in\nu N(a\in N)$，则$\nu a=\{x\in S|x\equiv a(mod\ I)\}$. 令$\rho$是$N$到$N/I$的自然同态，则$\rho a=\{x\in N|x\equiv a(mod I)\}$. 显然$\rho a\subseteq\nu a$. 反之，若$x\in\nu a$，则有$i_1$，$i_2\in I$，使$x+i_1=a+i_2$，而$a+i_2\in N$，$i_1\in N$且$N$是闭的，故$x\in N$，知$x\in\rho a$，$\nu a\subseteq\rho a$. 故$\nu a=\rho a\in N/I$，且得$\nu N\subseteq N/I$. 现若$\rho b\in N/I(b\in N)$，如上，$\rho b=\nu b\in\nu N$，得$N/I\subseteq\nu N$. 综上即得证明.

预理3.4　设I是S的理想，则Γ-半环S/I的任何闭理想M必具形如N/I，其中N是S的某一闭理想且$N\supseteq I$。

证明　设I是S的理想，ν是S到Γ-半环S/I上的自然同态. 由预理3.2知$N=\nu^{-1}M$是S的闭理想，且$\nu N=M$. 因$ker\nu\subseteq N$，所以$N=\nu^{-1}M\supseteq I$。由预理3.3有$M=\nu N=N/I$. 证毕.

预理3.5　设M是S的闭理想，I是S的理想且$I\subseteq M$，则$M/I=S/I$的充要条件是$M=S$。

证明　假定$M/I=S/I$且$s\in S$，令ν与ρ分别是S到Γ-半环S/I上与M到M/I上的自然同态，则有$a\in M$，使$\nu s=\rho a$. 因$s\in\nu^{-1}s$，故有$i_1,i_2\in I\subseteq M$，使$s+i_1=a+i_2$，又M是闭理想，故$s\in M$. 因此$M=S$. 证毕.

定理3.6　设I是S的闭理想，ν是S到Γ-半环S/I上的自然同态，若A是Γ-半环S/I的闭理想，则$S/B\underset{\Gamma}{\cong}(S/I)/A$. 其中$B=\nu^{-1}A$.

证明　由预理3.2知，B是S中的闭理想. 因νI是Γ-半环S/I的零元，且A是Γ-半环S/I中的闭理想. 因此$\nu I\in A$，故$I=\nu^{-1}(\nu I)\subseteq\nu^{-1}A=B$.

设 ρ 是 S 到 Γ-半环 S/B 上的自然同态，ν' 是 Γ-半环 S/I 到 Γ-半环 $(S/I)/A$ 上的自然同态。作映射 φ：$\rho a \mapsto \nu'\nu a$ $(a\in S)$ 把 Γ-半环 S/B 映射到 Γ-半环 $(S/I)/A$ 内。

若 $a\equiv b(modB)$，则有 $b_1,b_2\in B$，使 $a+b_1=b_2$ 且 $\nu b_i\in A$，$i=1,2$。因此 $\nu'\nu a+\nu'\nu b_1=\nu'\nu b+\nu'\nu b_2$；又因 $\nu'\nu b_i=0$，$i=1,2$，于是 $\nu'\nu a=\nu'\nu b$，故 $\varphi(\rho a)=\varphi(\rho b)$，即映射 φ 是合理的。易见 φ 是满映射。

因 $\varphi(\rho a+\rho b)=\varphi(\rho(a+b))=\nu'\nu(a+b)=\nu'(\nu a+\nu b)=\nu'\nu a+\nu'\nu b=\varphi(\rho a)+\varphi(\rho b)$，及 $\varphi((\rho a)\alpha(\rho b))=\varphi(\rho(a\alpha b))=\nu'\nu(a\alpha b)=\nu'((\nu a)\alpha(\nu b))=(\nu'\nu a)\alpha(\nu'\nu b)=\varphi(\rho a)\alpha\varphi(\rho b)$，$\forall a,b\in S$，$\alpha\in\Gamma$。故 φ 是 Γ-半环 S/B 到 Γ-半环 $(S/I)/A$ 的满同态。

下面证 φ 是 1—1 的。

任取 $S''\in(S/I)/A$，则 $S''=\{x'\in S/I\,|\,x'+a_1'=s'+a_2',\ \exists\, a_1',a_2'\in A\}$，其中 $x'=\{y\in S\,|\,y+j_1=x+j_2,\ \exists\, j_1,j_2\in I\}$，$a_1',a_2',s',x'$ 的表示式均类似，而 $x'+a_1'=s'+a_2'$ 又可写为 $(x+a_1)'=(s+a_2)'$，因此 $s''=\{x\in S\,|\,x+a_1+i_1=s_2+a_2+i_2,\ \exists\, a_1,a_2\in B,i_1,i_2\in I\}$，因 $a_1+i_1\in B$，$a_2+i_2\in B$，从而 $\rho x=\rho s$。换言之，若 $\nu'\nu x=\nu'\nu s$，则 $\rho x=\rho s$。基于此，若 $\varphi(\rho a)=\varphi(\rho b)$，则 $\rho a=\rho b$。故 φ 是 Γ-半环 S/B 到 Γ-半环 $(S/I)/A$ 上的 1—1 满同态。即 $S/B\underset{\Gamma}{\cong}(S/I)/A$。

定义3.7　S 称为是闭型的，如果 I 是 S 的闭理想，ν 是 S 到 Γ-半环 S/I 上的自然同态，则 S 的任何闭理想在 ν 下的像也是 Γ-半环 S/I 的闭理想。

定理3.8　若 S 是闭型的，I 是 S 的闭理想，则 Γ-半环 S/I 也是闭型的。

证明　设 A 是 S/I 的闭理想，ν 是 S 到 Γ-半环 S/I 上的自然同态，则 $B=\nu^{-1}A$ 也是 S 的闭理想。令 ν' 是 Γ-半环 S/I 到 Γ-半环 $(S/I)/A$ 上的自然同态，A' 是 Γ-半环 S/I 中的任何一个闭理想，需证 $\nu'A'$ 是 Γ-半环 $(S/I)/A$ 中的闭理想。$B=\nu^{-1}A$ 是 S 中的闭理想，$B'=\nu^{-1}A'$ 也是 S 中的闭理想。令 ρ 是 S 到 Γ-半环 S/B 上的自然同态，则映射 φ：$\rho a\mapsto\nu'\nu a$ 是 Γ-半环 S/B 到 Γ-半环 $(S/I)/A$ 上的同构映射。

考虑 $\nu'A'$ 在映射 φ 下的原像 $\varphi^{-1}(\nu'A')$。若我们能证 $\varphi^{-1}(\nu'A')$ 是 Γ-半环 S/B 中的一个闭理想，则显然 $\nu'A'$ 也是 Γ-半环 $(S/I)/A$ 中的闭理想。

记 $\rho(\nu^{-1}A')=\rho B'$，因 B' 是 S 中的闭理想，故由题设 S 是闭型的，得 $\rho B'$ 是 Γ-半环 S/B 中的闭理想。易证 $\varphi^{-1}(\nu'A')=\rho B'$，参看[3]。

定理3.9　若 S 是闭型的，I 与 M 是 S 的闭理想且 $I\subseteq M$，则 $S/M\underset{\Gamma}{\cong}(S/I)/(M/I)$。

证明　由预理 3.4，M/I 是 Γ-半环 S/I 中的闭理想。令 ν 是 S 到 Γ-半环 S/I 上的自然同态，由预理 3.3 知 $M=\nu^{-1}(M/I)$。应用定理 3.6 有

$$S/M\underset{\Gamma}{\cong}(S/I)/(M/I).$$

证毕。

此定理类似于环论中的同构定理。

§4. Γ-半环的Jacobson根

定义4.1 元素$r\in S$说是α-右半正则的，如果对$\alpha\in\Gamma$，有$r',r''\in S$，使$r+r'+r\alpha r'=r''+r\alpha r''$；元素$r\in S$说是右半正则的，如果$r$对任何$\alpha\in\Gamma$都是$\alpha$-右半正则的。

定理4.2 设$\alpha\in\Gamma$，则$r\in S$是α-右半正则的充要条件是对任何$s\in S$，存在$s',s''\in S$，使

$$s+s'+r\alpha s'=s''+r\alpha s''.$$

证明 **必要性**：设r是α-右半正则的，则有$r',r''\in S$，使$r+r'+r\alpha r'=r''+r\alpha r''$。在此等式两边先"右乘上"$\alpha s$后再加上$s$，得

$$s+r''\alpha s+r\alpha r''\alpha s=s+r\alpha s+r'\alpha s+r\alpha r'\alpha s,$$

或

$$s+(r''\alpha s)+r\alpha(r''\alpha s)=(s+r'\alpha s)+r\alpha(s+r'\alpha s),$$

置$r''\alpha s=s'$，$s+r'\alpha s=s''$，得$s+s'+r\alpha s'=s''+r\alpha s''$。

充分性：由假定，对任何$s\in S$，有$s',s''\in S$，使$s+s'+r\alpha s'=s''+r\alpha s''$成立。特别取$s=r$，立得$r$是$\alpha$-右半正则的。

推论4.3 $r\in S$是右半正则的充要条件是对任何$s\in S$与每个$\alpha\in\Gamma$都有$s',s''\in S$，使$s+s'+r\alpha s'=s''+r\alpha s''$。

定义4.4 S的右理想I说是α-右半正则的，如果对I的每对元素i_1，i_2，对$\alpha\in\Gamma$，有$j_1,j_2\in I$，使

$$i_1+j_1+i_1\alpha j_1+i_2\alpha j_2=i_2+j_2+i_1\alpha j_2+i_2\alpha j_1; \qquad (1)$$

右理想I说是右半正则的，如果对每个$\alpha\in\Gamma$，I都是α-右半正则的。

对偶地可定义α-左半正则左理想、左半正则左理想及右[左]半正则理想等等有关概念。

注：(1)中的j_1,j_2不是唯一的。因为当(1)成立时，对任何$j\in I$，由$i_1+j_1+i_1\alpha j_1+i_2\alpha j_2+j=i_2+j_2+i_1\alpha j_2+i_2\alpha j_1+j$，得$i_1+(j_1+j)+i_1\alpha(j_1+j)+i_2\alpha(j_2+j)=i_2+(j_2+j)+i_1\alpha(j_2+j)+i_2\alpha(j_1+j)$。当$i_2=0$时，就得$i_1$是$\alpha$-右半正则的，因此$\alpha$-右半正则右理想中每个元素都是$\alpha$-右半正则的。同样，右半正则右理想中每一个元素都是右半正则的。

预理4.5 若I与I'都是S的[α-]右半正则右理想，则$I+I'$也是[α-]右半正则右理想。

证明 $I+I'$是S的右理想是显然的。

因I是右半正则右理想，对任何给定的$\beta\in\Gamma$，对每个元素对i_1，$i_2\in I$，有j_1，$j_2\in I$，使

$$i_1+j_1+i_1\beta j_1+i_2\beta j_2=i_2+j_2+i_1\beta j_2+i_2\beta j_1$$

成立。如果$i_1',i_2'\in I'$，则对任何$\gamma\in\Gamma$，$i_1'+i'\gamma j_1+i_2'\gamma j_2\in I'$与$i_2'+i_2'\gamma j_1+i_1'\gamma j_2\in I'$；又因$I'$是右半正则的，任取$\beta\in\Gamma$，对元素$i_1'+i_1'\beta j_1+i_2'\beta j_2$与$i_2'+i_2'\beta j_1+i_1'\beta j_2$，存在$j_1',j_2'\in I'$，使

$$(i_1'+i_1'\beta j_1+i_2'\beta j_2)+j_1'+(i_1'+i_1'\beta j_1+i_2'\beta j_2)\beta j_1'+(i_2'+i_2'\beta j_1+i_1'\beta j_2)$$

$\beta j'_2=(i'_2+i'_2\beta j_1+i'_1\beta j_2)+j'_2+(i'_1+i'_1\beta j_1+i'_2\beta j_2)\beta j'_2+(i'_2+i'_2\beta j_1+i'_1\beta j_2)\beta j'_1$，因此

$(i_1+i'_1)+(j_1+j'_1+j_1\beta j'_1+j_2\beta j'_2)+(i_1+i'_1)\beta(j_1+j'_1+j_1\beta j'_1+j_2\beta j'_2)+(i_2+i'_2)\beta(j_2+j'_2+j_1\beta j'_2+j_2\beta j'_1)=(i_1+j_1+i_1\beta j_1+i_2\beta j_2)+[(i'_1+i'_1\beta j_1+i'_2\beta j_2)+j'_1+(i'_1+i'_1\beta j_1+i'_2\beta j_2)\beta j'_1+(i'_2+i'_2\beta j_1+i'_1\beta j_2)\beta j'_2]+(i_1+j_1+i_1\beta j_1+i_2\beta j_2)\beta j'_1+(i_2+j_2+i_1\beta j_2+i_2\beta j_1)\beta j'_2=(i_2+j_2+i_1\beta j_2+i_2\beta j_1)+[(i'_2+i'_2\beta j_1+i'_1\beta j_2)+j'_2+(i'_1+i'_1\beta j_1+i'_2\beta j_2)\beta j'_2+(i'_2+i'_2\beta j_1+i'_1\beta j_2)\beta j'_1]+(i_2+j_2+i_1\beta j'_2+i_2\beta j_1)\beta j'_1+(i_1+j_1+i_1\beta j_1+i_2\beta j_2)\beta j'_2=(i_2+i'_2)+(j_2+j'_2+j_2\beta j'_1+j_1\beta j'_2)+(i_1+i'_1)\beta(j_2+j'_2+j_2\beta j'_1+j_1\beta j'_2)+(i_2+i'_2)\beta(j_1+j'_1+j_1\beta j'_1+j_2\beta j'_2)$。

因$(j_1+j'_1+j_1\beta j'_1+j_2\beta j'_2)$与$(j_2+j'_2+j_1\beta j'_2+j_2\beta j'_1)$均在$I+I'$中，该等式导出$I+I'$是$\beta$-右半正则的，再由$\beta$在$\Gamma$中的任意性，故$I+I'$是右半正则的。

对于方括号内的结论，可同样证明。证毕。

定理4.6 S的所有[α-]右半正则右理想之和R是[α-]右半正则(双边)理想。

证明 由预理4.5推知R是右半正则右理想。下证R是右半正则左理想。

如$r_1,r_2\in R$，则对任何$s\in S$，$r_i\Gamma s\subseteq R$，$i=1,2$，且因R是右半正则的，故对任何$\alpha\in\Gamma$，有$r_3,r_4\in R$，使

$$(r_1\alpha s)+r_3+(r_1\alpha s)\alpha r_3+(r_2\alpha s)\alpha r_4=(r_2\alpha s)+r_4+(r_1\alpha s)\alpha r_4+(r_2\alpha s)\alpha r_3$$

成立。在等式两边各“左乘”$s\alpha$，“右乘”αr_1，得

$$s\alpha(r_1\alpha s)\alpha r_1+(s\alpha r_3\alpha r_1)+s\alpha(r_1\alpha s\alpha r_3)\alpha r_1+s\alpha(r_2\alpha s\alpha r_4)\alpha r_1$$
$$=s\alpha(r_2\alpha s)\alpha r_1+(s\alpha r_4\alpha r_1)+s\alpha(r_1\alpha s\alpha r_4)\alpha r_1+s\alpha(r_2\alpha s\alpha r_3)\alpha r_1.$$

类似地得

$$s\alpha(r_2\alpha s)\alpha r_2+s\alpha r_4\alpha r_2+s\alpha(r_1\alpha s\alpha r_4)\alpha r_2+s\alpha(r_2\alpha s\alpha r_3)\alpha r_2$$
$$=s\alpha(r_1\alpha s)\alpha r_2+s\alpha r_3\alpha r_2+s\alpha(r_1\alpha s\alpha r_3)\alpha r_2+s\alpha(r_2\alpha s\alpha r_4)\alpha r_2,$$

上面两式相加，再添上$s\alpha r_1+s\alpha r_2$于所得等式的两边，立得

$$(s\alpha r_2)+(s\alpha r_1+s\alpha r_3\alpha r_1+s\alpha r_4\alpha r_2)+(s\alpha r_1)\alpha(s\alpha r_1+s\alpha r_3\alpha r_1+s\alpha r_4\alpha r_2)$$
$$+(s\alpha r_2)\alpha(s\alpha r_4\alpha r_1+s\alpha r_2+s\alpha r_3\alpha r_2)=(s\alpha r_1)+(s\alpha r_2+s\alpha r_3\alpha r_2+s\alpha r_4\alpha r_1)$$
$$+(s\alpha r_2)\alpha(s\alpha r_1+s\alpha r_3\alpha r_1+s\alpha r_4\alpha r_2)+(s\alpha r_1)\alpha(s\alpha r_2+s\alpha r_3\alpha r_2+s\alpha r_4\alpha r_1).$$

因$s\alpha r_1+s\alpha r_3\alpha r_1+s\alpha r_4\alpha r_2=s\alpha(r_1+r_3\alpha r_1+r_4\alpha r_2)\in s\alpha R$与$s\alpha r_2+s\alpha r_3\alpha r_2+s\alpha r_4\alpha r_1=s\alpha(r_2+r_3\alpha r_2+r_4\alpha r_1)\in s\alpha R$，根据上述等式推出$s\alpha R$是右半正则右理想且$s\alpha R\subseteq R$。由$s\in S$与$\alpha\in\Gamma$的任意性，$R$又是$S$的左理想。故$R$是右半正则(双边)理想。

对于方括号内的结论，也同样可证。

定义4.7 Γ-半环S的右[左] Jacobson 根是S的所有右[左]半正则右[左]理想之和。

Γ-半环S的右[左] Jacobson 根是一个(双边)理想，而且是Γ-半环S中的最大右[左]半正则理想，它包含了所有右[左]半正则理想。

Γ-半环S的一个理想说是半正则的，如果它既是右半正则又是左半正则的。类似地，可定义α-半正则理想($\alpha\in\Gamma$)。

预理4.8 设I是S的右理想，如果i_1，$i_2\in I$，$\alpha\in\Gamma$且$i_1+j_1+i_1\alpha j_1+i_2\alpha j_2=i_2+j_2+i_1\alpha j_2+i_2\alpha j_1$，$i_1+k_1+k_1\alpha i_1+k_2\alpha i_2=i_2+k_2+k_1\alpha i_2+k_2\alpha i_1$，其中$j_l$，$k_l\in I$，$l=1$，2，则有$l\in I$，使$k_1+j_2+l=k_2+j_1+l$。

证明

$$k_1+(i_1+j_1+i_1\alpha j_1+i_2\alpha j_2)+k_1\alpha(i_1+j_1+i_1\alpha j_1+i_2\alpha j_2)$$
$$+k_2\alpha(i_2+j_2+i_1\alpha j_2+i_2\alpha j_1)=j_1+(i_1+k_1+k_1\alpha i_1+k_2\alpha i_2)$$
$$+(i_1+k_1+k_1\alpha i_1+k_2\alpha i_2)\alpha j_1+(i_2+k_2+k_2\alpha i_1+k_1\alpha i_2)\alpha j_2,$$

因而 $k_1+(i_2+j_2+i_1\alpha j_2+i_2\alpha j_1)+k_1\alpha(i_2+j_2+i_1\alpha j_2+i_2\alpha j_1)+k_2\alpha(i_1+j_1+i_1\alpha j_1+i_2\alpha j_2)=j_1+(i_2+k_2+k_2\alpha i_1+k_1\alpha i_2)+(i_2+k_2+k_2\alpha i_1+k_1\alpha i_2)\alpha j_1+(i_1+k_1+k_1\alpha i_1+k_2\alpha i_2)\alpha j_2$,

故 $k_1+j_2+(i_1+k_1+k_1\alpha i_1+k_2\alpha i_2)\alpha j_2+(i_2+k_2+k_1\alpha i_2+k_2\alpha i_1)\alpha j_1+(i_2+k_1\alpha i_2+k_2\alpha i_1)=k_2+j_1+(i_2+k_2+k_2\alpha i_1+k_1\alpha i_2)\alpha j_1+(i_1+k_1+k_1\alpha i_1+k_2\alpha i_2)\alpha j_2+(i_2+k_2\alpha i_1+k_1\alpha i_2)$。

置 $l=(i_2+k_2+k_2\alpha i_1+k_1\alpha i_2)\alpha j_1+(i_1+k_1+k_1\alpha i_1+k_2\alpha i_2)\alpha j_2+i_2+k_2\alpha i_1+k_1\alpha i_2\in I$，于是$k_1+j_2+l=k_2+j_1+l$。证毕。

预理4.9 Γ-半环S的右Jacobson根R是左半正则理想。

证明 由定理4.6知R是S的左理想，需证R是左半正则的，即需证：任取$r_1,r_2\in R$，对每个$\alpha\in\Gamma$，有$s'_1,s'_2\in R$，使$r_1+s'_1+s'_1\alpha r_1+s'_2\alpha r_2=r_2+s'_2+s'_1\alpha r_2+s'_2\alpha r_1$。

因r_1，$r_2\in R$，且R是右半正则的，故有s_1，$s_2\in R$，使$r_1+s_1+r_1\alpha s_1+r_2\alpha s_2=r_2+s_2+r_1\alpha s_2+r_2\alpha s_1$成立。又因$s_1,s_2\in R$，故有$t_1,t_2\in R$，使

$$s_1+t_1+s_1\alpha t_1+s_2\alpha t_2=s_2+t_2+s_1\alpha t_2+s_2\alpha t_1. \qquad (2)$$

由预理 4.8，有$v\in R$，使

$$t_1+r_2+v=t_2+r_1+v. \qquad (3)$$

(2) 的两端加上r_1+v，得

$$s_1+r_1+s_1\alpha t_1+s_2\alpha t_2+t_1+v=s_2+t_2+s_1\alpha t_2+s_2\alpha t_1+r_1+v.$$

利用(3)，得

$$s_1+r_1+s_1\alpha t_1+s_2\alpha t_2+t_1+v=s_2+r_2+s_1\alpha t_2+s_2\alpha t_1+t_1+v,$$

两边添加$s_1\alpha(r_1+v)$，立得

$$s_1+r_1+s_1\alpha r_1+s_2\alpha t_2+s_1\alpha t_1+s_1\alpha v+t_1+v=s_2+r_2$$
$$+s_1\alpha(t_2+r_1+v)+t_1+v+s_2\alpha t_1,$$

或 $s_1+r_1+s_1\alpha r_1+s_2\alpha t_2+s_1\alpha t_1+s_1\alpha v+t_1+v=s_2+r_2+s_2\alpha t_1+s_1\alpha t_1+s_1\alpha v+t_1+v+s_1\alpha r_2$,

两边添加$s_2\alpha(r_2+r_1+v)$，得

$$(s_1+r_1+s_1\alpha r_1+s_2\alpha r_2)+s_2\alpha(t_2+r_1+v)+s_1\alpha t_1+s_1\alpha v+t_1+v$$
$$=s_2+r_2+s_1\alpha r_2+s_2\alpha r_1+s_2\alpha(t_1+r_2+v)+s_1\alpha t_1+s_1\alpha v+t_1+v.$$

置$u=s_2\alpha(t_2+r_1+v)+s_1\alpha t_1+s_1\alpha v+t_1+v$ ($\in R$)，得。

$$s_1+r_1+s_1\alpha r_1+s_2\alpha r_2+u=s_2+r_2+s_1\alpha r_2+s_2\alpha r_1+u,$$

或　$r_1+(s_1+u)+(s_1+u)\alpha r_1+(s_2+u)\alpha r_2=r_2+(s_2+u)+(s_1+u)\alpha r_2+(s_2+u)\alpha r_1$

令 $s_1'=s_1+u$，$s_2'=s_2+u$，且 $s_1',s_2'\in R$，故 R 是左半正则理想。

定理4.10　Γ- 半环 S 的左 Jacobson 根 R' 与右 Jacobson 根 R 相等。

证明　由预理 4.9，$R\subseteq R'$。由结论的对称性，有 $R'\subseteq R$。故 $R'=R$。

基于此定理，我们可以定义 Γ- 半环 S 的 Jacobson 根。

定义4.11　Γ- 半环 S 的 Jacobson 根就是 S 的所有右(左)半正则理想之和，记为 $J(S)$ 或 J。若 $J(S)=(0)$，则称 Γ- 半环 S 为 J- 半单的；若 $J(S)=S$，则称 Γ- 半环 S 为 J- 根半环。

定理 4.12　如果 J 是 S 的 Jacobson 根，则 Γ- 半环 $\bar{S}\equiv S/J$ 是 J- 半单的。

证明　设 $\bar{J}$ 是 Γ- 半环 $\bar{S}$ 的 Jacobson 根，J^* 是在 S 到 $\bar{S}$ 上的自然态下 $\bar{J}$ 在 S 里的原象显见 J^* 是 S 的的一个理想且 $J^*\supseteq J$。

任取 r_1，$r_2\in J^*$，则 $\bar{r}_1$，$\bar{r}_2\in\bar{J}$，对每个 $\alpha\in\Gamma$，都有 $\bar{s}_1,\bar{s}_2\in\bar{J}$，使 $\bar{r}_1+\bar{s}_1+\bar{r}_1\alpha\bar{s}_1+$ $+\bar{r}_2\alpha\bar{s}_2=\bar{r}_2+\bar{s}_2+\bar{r}_1\alpha\bar{s}_2+\bar{r}_2\alpha\bar{s}_1$，故有 $r_3,r_4\in J$，使

$$r_1+s_1+r_1\alpha s_1+r_2\alpha s_2+r_3=r_2+s_2+r_1\alpha s_2+r_2\alpha s_1+r_4, \tag{4}$$

其中 $r_1,r_2,s_1,s_2\in J^*$。记 $(e)=r_1+s_1+r_1\alpha s_1+r_2\alpha s_2+r_3$，$(e)'=r_2+s_2+r_1\alpha s_2+r_2\alpha s_1+r_4$。

因 $r_3,r_4\in J$，故有 $s_3,s_4\in J$，使

$$r_4+s_4+r_4\alpha s_4+r_3\alpha s_3=r_3+s_3+r_4\alpha s_3+r_3\alpha s_4. \tag{5}$$

由(4)得

$$(e)+s_3+(e)\alpha s_4+(e)'\alpha s_3=(e)'+s_3+(e)'\alpha s_4+(e)\alpha s_3,$$

即 $(r_1+s_1+r_1\alpha s_1+r_2\alpha s_2+r_3)+s_3+(r_1+s_1+r_1\alpha s_1+r_2\alpha s_2+r_3)\alpha s_4+(r_2+s_2+r_1\alpha s_2$ $+r_2\alpha s_1+r_4)\alpha s_3=(r_2+s_2+r_2\alpha s_1+r_1\alpha s_2+r_4)+s_3+(r_2+s_2+r_2\alpha s_1+r_1\alpha s_2+r_4)\alpha s_4$ $+(r_1+s_1+r_1\alpha s_1+r_2\alpha s_2+r_3)\alpha s_3$.

或　$r_1+(s_1+s_1\alpha s_4+s_2\alpha s_3)+r_1\alpha(s_1+s_4+s_1\alpha s_4+s_2\alpha s_3)+r_2\alpha(s_2+s_2\alpha s_4+s_3+s_1\alpha s_3)$ $r_3+s_3+r_3\alpha s_4+r_4\alpha s_3=r_2+(s_2+s_2\alpha s_4+s_1\alpha s_3)+r_1\alpha(s_2+s_3+s_2\alpha s_4+s_1\alpha s_3)+r_2\alpha(s_1$ $+s_4+s_1\alpha s_4+s_2\alpha s_3)+r_4+s_3+r_4\alpha s_4+r_3\alpha s_3$.

置　$$t_1=s_1+s_1\alpha s_4+s_2\alpha s_3,\quad t_2=s_2+s_2\alpha s_4+s_1\alpha s_3,\quad t_3=r_3+r_3\alpha s_4+r_4\alpha s_3,$$
$$t_4=r_4+r_4\alpha s_4+r_3\alpha s_3, \tag{6}$$

因此，(5)式可改写为 $t_3+s_3=t_4+s_4$。(6)式可改写为

$r_1+t_1+r_1\alpha(t_1+s_4)+r_2\alpha(t_2+s_3)+s_3+t_3=r_2+t_2+r_1\alpha(t_2+s_3)+r_2\alpha(t_1+s_4)+s_3+t_4$.

两边添加 $(r_1+r_2)\alpha t_4$，得

$$r_1+(t_1+t_3+s_3)+r_1\alpha(t_1+s_4+t_4)+r_2\alpha(t_2+s_3+s_4)=$$
$$=r_2+(t_2+t_4+s_3)+r_1\alpha(t_2+s_3+t_4)+r_2\alpha(t_1+s_4+t_4),$$

或
$$r_1+(t_1+t_4+s_4)+r_1\alpha(t_1+t_4+s_4)+r_2\alpha(t_2+t_4+s_3)=$$
$$=r_2+(t_2+t_4+s_3)+r_1\alpha(t_2+t_4+s_3)+r_2\alpha(t_1+t_4+s_4).$$

显见 $(t_1+t_4+s_4)$ 与 $(t_2+t_4+s_3)$ 在 J^* 中，故此等式表明 J^* 在 S 里是右半正则理想。因此 $J^*\subseteq J$。

综上所述，$J^*=J$，故 $\bar{J}=(0)$。证毕。

定理4.13　S 的 Jacobson 根是 J- 根半环。

证明　设 S 的 Jacobson 根为 $J(S)$，$J(S)$ 的 Jacobson 根为 $J(J(S))$。因 $J(S)$ 在 $J(S)$ 内是半正则的，故 $J(S)\subseteq J(J(S))$；另一方面 $J(J(S))\subseteq J(S)$。故

$$J(J(S)=J(S).$$

证毕。

这就表明，任意 Γ- 半环的结构可以归结为研究 J- 半单 Γ- 半环与 J- 根 Γ- 半环的问题。

定理4.14　$J(S)$ 是 S 的闭理想，即 $\overline{J(S)}=J(S)$。

证明　因 $J(S)\subseteq\overline{J(S)}$，故只需证 $\overline{J(S)}$ 是 S 的右半正则理想即可。

设 $r_1,r_2\in\overline{J(S)}$，则有 $y_i,z_i\in J(S)$，使 $r_i+y_i=z_i$，$i=1,2$。因 (z_2+y_1) 与 (z_1+y_2) 均在 $J(S)$ 内，故对每个 $\alpha\in\Gamma$，有 $j_1,j_2\in J(S)$，使得

$$(z_2+y_1)+j_2+(z_1+y_2)\alpha j_1+(z_2+y_1)\alpha j_2=(z_1+y_2)+j_1+(z_2+y_1)\alpha j_1+(z_1+y_2)\alpha j_2.$$

用 $r_i+y_i=z_i$，$i=1,2$，代入，得

$$(r_2+y_2+y_1)+j_2+(r_1+y_1+y_2)\alpha j_1+(r_2+y_2+y_1)\alpha j_2$$
$$=(r_1+y_1+y_2)+j_1+(r_2+y_2+y_1)\alpha j_1+(r_1+y_1+y_2)\alpha j_2,$$

置 $u=(y_1+y_2)+(y_1+y_2)\alpha(j_1+j_2)\in J(S)$，得

$$r_2+j_2+r_1\alpha j_1+r_2\alpha j_2+u=r_1+j_1+r_2\alpha j_1+r_1\alpha j_2+u$$

记 $k_i=j_i+u\in J(S)$，$i=1,2$，得

$$r_2+k_2+r_1\alpha k_1+r_2\alpha k_2=r_1+k_1+r_2\alpha k_1+r_1\alpha k_2,$$

导致 $\overline{J(S)}$ 是右半正则理想，从而 $\overline{J(S)}\subseteq J(S)$。故 $\overline{J(S)}=J(S)$。证毕。

定义4.15　一个 Γ- 半环 S 说是(在 von Neumann[6] 意义下的）正则的，如果任何元素 $s\in S$，对每个 $\alpha\in\Gamma$，有 $x_1,x_2\in S$，使

$$s\alpha x_1\alpha s=s+s\alpha x_2\alpha s$$

成立。

定理4.16　正则 Γ- 半环 S 的 Jacobson 根 $J(S)$ 的广零 $Z(J(S))=J(S)$。从而 $J(S)\subseteq Z(S)$。

证明　显然 $Z(J(S))\subseteq J(S)$。下证 $J(S)\subseteq Z(J(S))$。

设 $r\in J(S)$，则对每个 $\alpha\in\Gamma$，有 $x_1,x_2\in S$，使

$$r\alpha x_1\alpha r=r+r\alpha x_2\alpha r. \tag{7}$$

因 $x_1\alpha r$，$x_2\alpha r\in J(S)$，有 $j_1,j_2\in J(S)$，使

$$x_2\alpha r+j_1+x_2\alpha r\alpha j_1+x_1\alpha r\alpha j_2=x_1\alpha r+j_2+x_2\alpha r\alpha j_2+x_1\alpha r\alpha j_1,$$

两边“左乘”ra，得

$$rax_2ar+raj_1+rax_2araj_1+rax_1araj_2=$$
$$=rax_1ar+raj_2+rax_2araj_2+rax_1araj_1,$$

利用(7)式，得

$$rax_2ar+rax_1araj_1+rax_1araj_2=r+rax_2ar+rax_1araj_2+rax_1araj_1,$$

置$z=rax_2ar+rax_1ara(j_1+j_2)$，得$r+z=z$且$z\in J(S)$。由$r$在$J(S)$中的任意性，得$J(S)\subseteq Z(J(S))$。

推论4.17　若加法可消Γ-半环是正则的，则$J(S)=(0)$。

这易从定理4.16得到。

§5　Γ-半环的半根

定义5.1　说$i_1,i_2(\in S)$是等效的，记为$i_1\sim i_2$，如果有$x\in S$，使$i_1+x=i_2+x$成立。

预理5.2　在S中，等效关系是一个等价关系，且满足加法与“乘法”的替换法则。

证明　等效关系是一个等价关系，是易得的，故略。下面来证替换法则成立。

若$i_1\sim i_2$，$j_1\sim j_2$，则有$x,y\in S$，使$i_1+x=i_2+x$，$j_1+y=j_2+y$。

由$i_1+j_1+x+y=i_2+j_2+x+y$，得$(i_1+j_1)\sim(i_2+j_2)$；

由$(i_1\alpha j_1)+(i_1\alpha y)=i_1\alpha(j_1+y)=i_1\alpha(j_2+y)=(i_1\alpha j_2)+(i_1\alpha y)$，得$(i_1\alpha j_1)\sim(i_1\alpha j_2)$，$\forall\alpha\in\Gamma$；

同理可证$i_1\alpha j_1\sim i_2\alpha j_1$及$(i_1\alpha j_1)\sim i_2\alpha j_1\sim i_2\alpha j_2$等等。

用x^*表示S中与x等效的元素的全体所组成的等效类，即$x^*\equiv\{x\in S|s+y=x+y,\exists y\in S\}$；用$S^*$表示$S$中所等效类全体所组成的集合，即$S^*\equiv\{x^*|s\in S\}$。有了上述的替换法则可在$S^*$中定义如下运算：

$$i_1^*+i_2^*=(i_1+i_2)^*,$$
$$i_1^*\alpha i_2^*=(i_1\alpha i_2)^*,\quad\forall i_1,i_2\in S,\ \alpha\in\Gamma.$$

后组成一个Γ-半环，且是加法可消的。事实上，若$i_1^*+x^*=i_2^*+x^*$，则$(i_1+x)^*=(i_2+x)^*$，故有$y\in S$，使$i_1+x+y=i_2+x+y$，即$i_1^*=i_2^*$，$\forall x,i_1,i_2\in S$。我们称S^*为S的等效商Γ-半环，其零元是$0^*\equiv\{x\in S|x+y=y,\ \exists y\in S\}=Z(S)$，

显见，映射η：$i\mapsto i^*$是S到Γ-半环S^*上的一个满同态，其同态核$ker\eta\equiv\{x\in S|x+y=y,\ \exists y\in S\}=Z(S)$。同半环时一样，Γ-半环$S^*$的Jacobson根$J(S^*)$在$S$中的原像$\eta^{-1}(J(S^*))$称Γ-半环$S$的半根。

定义5.3　Γ-半环S的半根$\sigma(S)\equiv\{i\in S|i^*\in J(S^*)\}$。

联系Γ-半环的Jacobson根的定义4.7，易得

定理5.4　S的半根$\sigma(S)$是S中这样的极大右理想I，使每个元素对$i_1,i_2\in I$，对每个$\alpha\in\Gamma$，有$j_1,j_2\in I$与$j\in S$，使

$$i_1+j_1+j_1\alpha j_1+i_2\alpha j_2+j=i_2+j_2+i_1\alpha j_2+i_2\alpha j_1+j$$

成立。

由此推得

推论5.5 $J(S)\subseteq\sigma(S)$。

推论5.6 若S是加法可消Γ-半环时，则$J(S)=\sigma(S)$。

定理5.7 S的半根$\sigma(S)$是S中这样的极大右理想I，使每个元素对$i_1,i_2\in I$，对每个$\alpha\in\Gamma$，有$j_1,j_2\in S$，使

$$i_1+j_1+i_1\alpha j_1+i_2\alpha j_2=i_2+j_2+i_1\alpha j_2+i_2\alpha j_1 \tag{1}$$

成立。

证明 任取元素对$i_1,i_2\in\sigma(S)$，对每个$\alpha\in\Gamma$，有$j_1,j_2\in\sigma(S)$与$j\in S$，使

$$i_1+j_1+i_1\alpha j_1+i_2\alpha j_2+j=i_2+j_2+i_1\alpha j_2+i_2\alpha j_1+j, \tag{2}$$

它可改写为

$$i_1+(j_1+j)+i_1\alpha(j_1+j)+i_2\alpha(j_2+j)=i_2+(j_2+j)+i_1\alpha(j_2+j)+i_2\alpha(j_1+j),$$

而$j_k+j\in S$，$k=1,2$。这样就证明了(1)成立。

反之，设I是S的右理想，在其中每对元素$i_1,i_2\in I$，对每个$\alpha\in\Gamma$，有$j_1,j_2\in S$，满足

$$i_1+j_1+i_1\alpha j_1+i_2\alpha j_2=i_2+j_2+i_1\alpha j_2+i_2\alpha j_1. \tag{3}$$

置$x_1=i_2+i_2\alpha j_1+i_1\alpha j_2\in I$与$x_2=i_1+i_1\alpha j_1+i_2\alpha j_2\in I$，即得$j_1+x_2=j_2+x_1$。因$x_2\in I$，在(3)的两边添加$x_2+i_1\alpha x_2+i_2\alpha x_2$，得

$$\begin{aligned}&i_1+(j_1+x_2)+i_1\alpha(j_1+x_2)+i_2\alpha(j_2+x_2)\\&\quad=i_2+(j_2+x_2)+i_2\alpha(j_1+x_2)+i_1\alpha(j_2+x_2),\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}&i_1+(j_2+x_1)+i_1\alpha(j_2+x_1)+i_2\alpha(j_2+x_2)\\&\quad=i_2+(j_2+x_2)+i_2\alpha(j_2+x_1)+i_1\alpha(j_2+x_2)\end{aligned}$$

置$j=j_2+i_1\alpha j_2+i_2\alpha j_2\in S$，立得

$$i_1+x_1+i_1\alpha x_1+i_2\alpha x_2+j=i_2+x_2+i_1\alpha x_2+i_2\alpha x_1+j.$$

证毕。

定理5.8 S的半根$\sigma(S)$是S中的闭理想，即$\overline{\sigma(S)}=\sigma(S)$。

证明 设S到Γ-半环S^*的自然同态为η，其同态核为$Z(S)$，利用预理3.2及$J(S^*)$是Γ-半环S^*中的闭理想，即知$\sigma(S)$是S中的闭理想。证毕。

因$Z(S)=0^*$（0^*为Γ-半环S^*中的零元），而$0^*\in J(S^*)$，故$Z(S)\subseteq\sigma(S)$，即有

定理5.9 $Z(S)\subseteq\sigma(S)$。

定理5.10 在正则Γ-半环S中$\sigma(S)=Z(S)$。

证明 设$a\in\sigma(S)$，则$a^*\in J(S^*)$。由题设知Γ-半环S^*也是正则的，应用定理4.16，$J(S^*)\subseteq Z(S^*)$，则有$z^*\in S^*$，使$a^*+z^*=z^*$，或$(a+z)^*=z^*$，因之，有$y\in S$，使$a+z+y=z+y$，从而$a\in Z(S)$。由a的任意性，$\sigma(S)\subseteq Z(S)$；结合定理5.9，得$\sigma(S)=Z(S)$。证毕。

易见，正则的加法可消Γ-半环的半根$\sigma(S)=(0)$。

定理5.11 Γ-半环S的$\sigma(S/\sigma(S))=(0)$。

证明方法完全可以照搬定理4.12的证明，只要注意下面几点：1) 设φ是S到Γ-半环$S/\sigma(S)\equiv\bar{S}$的自然同态，把其中的J、$\bar{J}$、J^*代换为$\sigma(S)$、$\sigma(\bar{S})$、$\varphi^{-1}(\sigma(\bar{S}))$； 2) $r_1,r_2\in\varphi^{-1}(\sigma(\bar{S}))$，有$\bar{r}_1,\bar{r}_2\in\sigma(\bar{S})$，$\bar{s}_1,\bar{s}_2\in\bar{S}$，$s_1$，$s_2$，$s_3$，$s_4\in S$，$r_3$，$r_4\in\sigma(S)$，从而$t_1+t_4+s_4\in S$、$t_2+t_4+s_3\in S$。

§6. Γ-半环与Γ-环的关系

Γ-环是N. Nobusawa于1964年引进的[7]，至今已有许多作者把环论中许多著名的结果推广到了Γ-环，对此可参阅[8,9]等。于此，我们主要讨论在何条件下Γ-半环成为Γ-环。

定义6.1 Γ-半环S说是加法正则的，如果半群S是加法正则的，即对每个$a \in S$，有$x \in S$，使$a+x+a=a$。

以下均设Γ-半环S中的Γ为一个(Abel)加群1)。

定理6.2 加法可消Γ-半环S又是加法正则时，则它是一个Γ-环。

证明 只要证明S是一个(Abel)加群即可。

任取$a \in S$，因S是加法正则的，故有$x \in S$，使$a+x+a=a$；又因S是加法可消的，故$a+x=0$。表明S中任意元素均有负元，易知每一个元的负元是唯一的。故S是一个加群，从而它是一个Γ-环。证毕。

定理6.3 若Γ-半环S半同构于一个Γ-环R，则S是一个Γ-环，且$S \underset{\Gamma}{\cong} R$。

证明 设φ是题设的半同构，任取$a \in S$，有$x \in S$，使$\varphi x = -\varphi a$，故$\varphi(a+x) = \varphi a + \varphi x = \varphi a - \varphi a = 0' \in R$；又因$ker\varphi = (0)$，且$(a+x) \in ker\varphi$，于是$a+x=0$。因之，$S$是一个Γ-环；若$\varphi a = \varphi b (a, b \in S)$，则$\varphi(a-b) = \varphi a - \varphi b = 0'$，得$a=b$，即$\varphi$是1—1的。故$\varphi$是$S$到Γ-环$R$的一个同构。证毕。

定理6.4 一个加法正则Γ-半环S半同构于加法可消Γ-半环T，则S是一个Γ-环。

证明 设φ是题设的半同构，e是S的加法幂等元(至少零元就是)。由$e+e=e$，得$\varphi e + \varphi e = \varphi e$，因$T$是加法可消的，故$\varphi e = 0' (0' \in T)$。因$\varphi$是半同构，知$e=0$，表明$S$是具唯一加法幂等元(即零元)的正则加半群。如上，可知S是一个加群，故S是一个Γ-环。

推论6.5 设φ是加法正则Γ-半环S到加法可消半环T的一个满同态，则$S/ker\varphi$是一个Γ-环。

利用$S/ker\varphi$与T是半同构这一事实，即可得证。

定理6.6 若Γ-半环S是有限的，则$S/Z(S)$是一个Γ-环。

证明 由定理2.8知$Z(S/Z(S)) = (0)$。故只要证当$Z(S) = (0)$时的有限Γ-半环是一个Γ-环。

任取$s \in S$，因S是有限的，故有正整数n与m，$m<n$，使$ns = ms$，即$ms + (n-m)s = ns$，故$ms + (n-m)s = ms$，即$(n-m)s \in Z(S) = (0)$，于是$(n-m)s = 0$，或$(n-m-1)s + s = 0$，表明S中每一个元素均有负元，S是一个加群，因之，S是一个Γ-环。

1) 因一个带零元的加法可消(Abel)加半群是加群的充要条件是它加法正则的。因此，这节的Γ也可改为带零元的加法可消且加法正则的(Abel)加半群。

参考文献

[1] Bourne, S., The Jacobson radical of a semiring, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 37 (1951), 163—170.

[2] Bourne, S. and Zassenhaus, H., On the semiradical of a semiring, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 44(1958), 907—914.

[3] LaTTRRE, D. R., The radical of semiring, Master's Thesis (multilithed) The University of Tennessee, Knoxville, 1962.

[4] Bourne, S., On the homomorphism theorem for semiring, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 38(1952). 118—119.

[5] Barnes, W. E., On the Γ-ring of Nabusawa, Pacific J. Math., 18(1966), 411—422.

[6] McCoy, N. H., Rings and ideals, Caros Monograph Series, (1948).

[7] Nobusawa, On a generalization of ring theory, Osaka J. Math. 1(1964), 81—89.

[8] Luh, J., On the theory of simple Γ-rings, Michigan Math. J., 16(1969), 65—75.

[9] Coppage, W. E. and Luh, J., Radicals of Γ-rings, J. Math. Soc. Japan, 23(1971), 40—52.

On the Γ-hemiring

By Xu Zhongming (徐忠明)

Abstract

Just as Nobusawa has extended the concept of ring to the concept of Γ-ring. we introduce in this paper a new concept of Γ-hemiring based on the concept of abelian additive hemigroup. And then, we extend the foundamental results associated with hemiring which are developed by Bourne and Zassenhaus to some analogous results associated with Γ-hemiring, such as the notions of ideal, zeroid, homomorphism and Jacobsonian radical and semi-radical in the case of Γ-hemiring. Finally, we have given some conditions for a Γ-hemiring being a Γ-ring.