关于半对称空间的存在性和测地对应问题*

吴少华

（杭州大学）

Beltrami, E. 证明了著名的测地对应定理，即

定理 A 仅仅是常曲率空间才能和常曲率空间作成测地对应。

Синюков, Н. С. 和 Roter, W. 分别将 Beltrami 定理加以推广，即证明了。

定理 B 如果黎曼空间 $V_n(n>2)$ 允许非平凡测地对应到黎曼循环空间 $\overline{V}_n$（即 $\overline{V}_n$ 的曲率张量满足 $\overline{R}_{hijk|l}=\overline{\lambda}_l\overline{R}_{hijk}$，其中记号“|”表示关于 $\overline{V}_n$ 的联络系数的协变微分；当 $\overline{\lambda}_l=0$ 时，$\overline{V}_n$ 称为黎曼对称空间），则 $\overline{V}_n$ 是常曲率空间[1,2]。

作者将定理进一步推广，证明了

定理 C 如果黎曼空间 $V_n(n>2)$ 允许非平凡测地对应到二次射影循环空间 $\overline{V}_n$（即 $\overline{V}_n$ 的射影曲率张量 $\overline{W}^h{}_{ijk}=\overline{R}^h{}_{ijk}-\dfrac{1}{n-1}(\delta^h{}_k\overline{R}_{ij}-\delta^h{}_j\overline{R}_{ik})$ 满足 $\overline{W}^h{}_{ijk|lm}=\overline{a}_{lm}\overline{W}^h{}_{ijk}$；当 $\overline{a}_{lm}=0$ 时，$\overline{V}_n$ 称为二次射影对称空间），则 $\overline{V}_n$ 是常曲率空间[3]。

因为黎曼循环空间，二次射影循环空间都是半对称空间（即曲率张量满足 $\overline{R}_{hijk|lm}-\overline{R}_{hijk|ml}=0$ 的空间）。从定理 A、B、C 自然产生这样的问题：是否存在和非常曲率的半对称空间 $\overline{V}_n$ 作成非平凡测地对应的黎曼空间呢？Venzi, P. 对这个问题进行过详细的研究1)。

已知射影循环空间 $\overline{V}_n(n\geqslant3)$（即射影曲率张量满足 $\overline{W}^h{}_{ijk|l}=\lambda_l\overline{W}^h{}_{ijk}$ 的空间）是黎曼循环空间[6]，二次射影循环空间 $\overline{V}_n(n\geqslant4)$（即射影曲率张量满足 $\overline{W}^h{}_{ijk|lm}=\overline{a}_{lm}\overline{W}^h{}_{ijk}$ 的空间）是二次黎曼循环空间（即 $\overline{V}_n$ 的曲率张量满足 $\overline{R}^h{}_{ijk|lm}-\overline{R}^h{}_{ijk|ml}=0$）[7]。而非黎曼循环的二次黎曼循环空间是存在的[8]。现在问：非二次黎曼循环的半对称空间是否存在？对于这种空间的这样的存在问题，尚未见到实例。

* 1980年12月15日收到.

1) 见[4]、[5]Venzi, P，得到一些结果，但对此问题，并没有得到肯定或否定的结论.

本文通过证明如下两个定理来解决上述问题。

定理一　如果黎曼空间 $V_n(n\geqslant 4)$ 允许非平凡测地对应到共形对称空间 $\overline{V}_n$（即 $\overline{V}_n$ 的共形曲率张量

$$\overline{C}_{hijk}=\overline{R}_{hijk}-\frac{1}{n-2}(\overline{g}_{hk}\overline{R}_{ij}-\overline{g}_{hj}\overline{R}_{ik}+\overline{g}_{ij}\overline{R}_{hk}-\overline{g}_{ik}\overline{R}_{hj})$$

$$+\frac{\overline{R}}{(n-1)(n-2)}(\overline{g}_{hk}\overline{g}_{ij}-\overline{g}_{hj}\overline{g}_{ik})$$

满足 $\overline{C}_{hijk|l}=0$），则 $\overline{V}_n$ 是共形平坦空间。

定理二　非常曲率的共形对称空间 $V_n(n\geqslant 4)$ 允许非平凡测地对应到半对称空间 $\overline{V}_n$ 的充要条件是 V_n、$\overline{V}_n$ 的线素可化为如下形式：

$$ds^2=\varepsilon_1(dx^1)^2+f^2g^*_{ij}(x^k)dx^idx^j,\quad i,j=2,\cdots\cdots,n;$$

$$d\overline{s}^2=ce^{2\varphi}[\varepsilon_2\ {}_1e^{2\varphi}(dx^1)^2+f^2g^*_{ij}dx^idx^j],\quad \varepsilon_1=\pm 1;$$

其中 $g^*_{ij}(x^k)dx^idx^j$ 是常数高斯曲率 κ^* 的空间，并且

或　$$f=\sin(ax^1+A),\quad \varphi=-\ln|\cos(ax^1+A)|,\quad \kappa^*\neq-\varepsilon_1a^2,\quad \varepsilon_2=1;$$

$$f=\mathrm{Ch}(ax^1+A),\quad \varphi=-\ln|\mathrm{Sh}(ax^1+A)|,\quad \kappa^*\neq\varepsilon_1a^2,\quad \varepsilon_2=-1;$$

或

$$f=\mathrm{Sh}(ax^1+A),\quad \varphi=-\ln\mathrm{Ch}(ax^1+A),\quad \kappa^*\neq-\varepsilon_1a^2,\quad \varepsilon_2=1;$$

其中 $a(\neq 0)$，A，$C(\neq 0)$ 是任意常数。这时，V_n，$\overline{V}_n$ 都是亚射影空间。

证明　如果黎曼空间 V_n 和 $\overline{V}_n$ 作成非平凡测地对应，则成立

$$\overline{\left\{\begin{matrix}h\\ i\ j\end{matrix}\right\}}=\left\{\begin{matrix}h\\ i\ j\end{matrix}\right\}+\delta^h_i\varphi_j+\delta^h_j\varphi_i,\quad \varphi_j\neq 0,$$

$$\overline{R}^h{}_{ijk}=R^h{}_{ijk}+\delta^h{}_k\varphi_{ij}-\delta^h{}_j\varphi_{ik},\quad \varphi_{ij}\equiv\varphi_{i,j}-\varphi_i\varphi_j.$$

首先证明

引理　如果黎曼空间 V_n 允许测地对应到半对称空间 $\overline{V}_n$，则 $\overline{V}_n$ 是常曲率空间或成立：$\varphi_{ij}=\Delta g_{ij}$，$\Delta=\mathrm{const}$；$\varphi_a\overline{R}^a{}_{ijk}=0$；$\varphi_a\overline{R}^a{}_{ijk|l}+\Delta\widetilde{R}_{lijk}=0$；　$g_{ia}\overline{R}^a{}_{jlm|t}+g_{ja}\overline{R}^a{}_{ilm|t}-\varphi_i\widetilde{R}_{tjlm}-\varphi_j\widetilde{R}_{tilm}=0$；　其中 $\widetilde{R}_{lijk}=g_{la}\overline{R}^a{}_{ijk}$。

利用引理和 Derdzinski, A. 和 Roter, W. 的结果[9]可以证明定理一*)。再利用定理一、引理、以及保圆向量场的结果[10]，可以证明定理二。

由于定理二中的线素 $d\overline{s}^2$ 是非常曲率的半对称空间，因此上述第一个问题得到解决。如果半对空间一定是二次黎曼循环空间，则定理 C 与定理二是矛盾的。

*）编辑部注：本文作者附来定理一、二的详细证明由编辑部存档备查。

参　考　文　献

[1] Синюков, Н. С., ДАН. СССР, 98(1954), 1, 21—23.

[2] Roter, W., Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math., Astron., Phys., 9(1961), 147—149.

[3] 吴少华，杭州大学学报(自然科学版)，(1980)4, 44—50.

[4] Venzi, P. Tensor, 32(1978), 2, 193—198.

[5] Venzi, P., Tensor, 33(1979), 1, 23—28.

[6] Miyazawa, T., Tensor, 32(1978), 2, 216—218.

[7] 吴少华，杭州大学学报(自然科学版)，(1979)，4，1—7.

[8] Койгородов, В. Р., *Изв. Вузов. Матем.*, (1974), 5, 117—127.

[9] Derdzinski, A. & Roter, W., *Tensor*, 32(1978), 1, 11—23.

[10] Adati, T., *Tohoku. Math. Jour. Sec. Ser.*, 3(1951), 153—159, 343—358.

On the Existences of Semi-Symmetric Spaces and of Geodesic Mapping between a Riemannian Space and Semi-Symmetric Space

By Wu Shaohua (吴少华)

Abstract

In the present paper we prove abstractly the following:

Theorem 1. If it is possible to map geodesically a Riemannian space $V_n(n\geqslant 4)$ onto a conformally symmetric space $\overline{V}_n$, then $\overline{V}_n$ is a conformally flat.

Theorem 2. In order that a conformally symmetric space $V_n(n\geqslant 4)$ with no constant curvature admits geodesic transformation to a semi-symmetric space $\overline{V}_n$, i.e. its curvature tensor satisfies relation

$$\overline{R}^h{}_{ijk|lm}-\overline{R}^h{}_{ijk|ml}=0,$$

it is necessary and sufficient that metrics of V_n and $\overline{V}_n$ are reducible to following forms respectively:

$$ds^2=\varepsilon_1(dx^1)^2+f^2 g^*_{ij}(x^k)dx^i dx^j,\quad i,j=2,3,\cdots,n,$$

$$d\overline{s}^2=ce^{2F}[\varepsilon_2\varepsilon_1 e^{2F}(dx^1)^2+f^2 g^*_{ij}(x^k)dx^i dx^j],\quad \varepsilon_1=\pm 1,$$

where $g^*_{ij}(x^k)dx^i dx^j$ is of constant Gauss curvature κ^* and

$$f=\sin(ax^1+A),\quad \varphi=-\ln|\cos(ax^1+A)|,\quad \kappa^*\neq-\varepsilon_1 a^2,\quad \varepsilon_2=1;$$

or

$$f=\mathrm{ch}(ax^1+A),\quad \varphi=-\ln|\mathrm{sh}(ax^1+A)|,\quad \kappa^*\neq\varepsilon_1 a^2,\quad \varepsilon_2=-1;$$

or

$$f=\mathrm{sh}(ax^1+A),\quad \varphi=-\ln\mathrm{ch}(ax^1+A),\quad \kappa^*\neq-\varepsilon_1 a^2,\quad \varepsilon_2=1;$$

where $a(\neq 0)$, $A, C(\neq 0)$ are arbitrary constants.

The theorem 2 and theorem C of the paper shows the existences of semi-symmetric space of non-Riemannian birecurrent space and of geodesic mapping between a Riemannian space and semi-symmetric space with no constant curvature.