关于Orlicz空间$L_M^*(0,1)$中函数的LO点、LB点与MLO点*

吴从炘　刘铁夫

（哈尔滨工业大学）

众所周知，Lebesgue点（简称L点）在奇异积分的研究中起着重要的作用。为了把它引进Orlicz空间，D.V.Salehov于1957年首先引入了Lebesgue–Orlicz点(简称LO点)，1968年他又引入了Lebesgue–Banach点(简称LB点)。作者之一于1960年也引入过平均Lebesgue–Orlicz点（简称MLO点）。然而对这些类型的点之间的关系的讨论一直是很不充分的，本文将对此给出完整的解决，从而自然也就改进了Salehov有关的主要结果。

设$L_M^*(0,1)$是Young函数$M(u)$生成的Orlicz空间，函数$f(x)\in L_M^*(0,1)$，则点$x_0\in(0,1)$叫做$f(x)$的L点，LO点，MLO点，LB点，分别是指

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0-h}^{x_0+h}|f(x)-f(x_0)|dx=0$$

$$\lim_{h\to 0}\left\|M^{-1}\left(\frac{1}{2h}\right)\left[f(x)-f(x_0)\right]\psi_h(x)\right\|_M=0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h}M\left[f(x)-f(x_0)\right]dx=0$$

$$\lim_{h\to 0}\|f(x_0+hx)-f(x_0)\|_M=0,$$

其中$M^{-1}(u)$是$M(u)$的反函数，$\psi_h(x)$是区间(x_0-h,x_0+h)的特征函数。

我们称$E\subset[0,1]$为完全测度集，假如$mesE=1$。又点$x_0\in(0,1)$叫做函数$f(x)$关于完全测度集的连续点，假如$f(x)$在点x_0关于完全测度集E连续。

$M(u)$满足$\triangle_2$—条件是指，存在$C>0$，$u_0\geq 0$，使$M(2u)\leq CM(u)\quad(u\geq u_0)$。

$M(u)$满足$\triangle'$—条件是指，存在$L>0$，$u_0\geq 0$，使$M(uv)\leq LM(u)M(v)\quad(u,v\geq u_0)$。

以上内容可参看[1—6]。

§1. LO点与LB点

定理1. 对一切$f(x)\in L_M^*(0,1)$，$f(x)$的LB点必为LO点$\Longleftrightarrow M(u)$满足$\triangle'$—条件。

证明. $\Longleftarrow$利用[8]$Ch.2$ §2 引理 1 (d)知

* 1980年12月15日收到.

$$\lim_{h\to 0}\|f(x_0+hx)-f(x_0)\|_M=0$$

等价于对任何 k 有

$$\lim_{h\to 0}\int_0^1 M\Big(k[f(x_0+hx)-f(x_0)]\Big)dx=0.$$

令$hx=u$，则它又等价于对任何 k 有

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h M\Big(k[f(x_0+u)-f(x_0)]\Big)du=0.$$

再令$x_0+u=v$，则它还等价于对任何 k 有

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} M\Big(k[f(v)-f(x_0)]\Big)dv=0.$$

注意到$M(u)$非负，并且

$$\frac{1}{-h}\int_{x_0}^{x_0-h} M\Big(k[f(v)-f(x_0)]\Big)dv=\frac{1}{h}\int_{x_0-h}^{x_0} M\Big(k[f(v)-f(x_0)]\Big)dv,$$

最后它等价于

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h} M\Big(k[f(v)-f(x_0)]\Big)dv=0.$$

这表明对一切 $f(x)\in L_M^*(0,1)$ 和一切 k，$f(x)$的LB点必为 $kf(x)$的 MLO 点。

同样，根据 [8]$Ch.2$ §2 引理 1 (d) 又有

$$\lim_{h\to 0}\left\|M^{-1}\left(\frac{1}{2h}\right)[f(x)-f(x_0)]\psi_h(x)\right\|_M=0$$

等价于对任何 k 有

$$\lim_{h\to 0}\int_{x_0-h}^{x_0+h} M\Big(kM^{-1}(\frac{1}{2h})[f(x)-f(x_0)]\Big)dx=0.$$

设 x_0 为 $f(x)$的 LB 点，对任意给定的 k，于$0<\varepsilon<\min(u_0,1)$，则我们有

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{h\to 0}}\int_{x_0-h}^{x_0+h} M\Big(kM^{-1}(\frac{1}{2h})[f(x)-f(x_0)]\Big)dx\\
&\leqslant\overline{\lim_{h\to 0}}\int_{H(x_0,u_0,h)} M\Big(kM^{-1}\Big(\frac{1}{2h}\Big)[f(x)-f(x_0)]\Big)dx\\
&+\overline{\lim_{h\to 0}}\int_{H(x_0,\varepsilon,h)-H(x_0,u_0,h)} M\Big(kM^{-1}\Big(\frac{1}{2h}\Big)[f(x)-fx_0)]\Big)dx\\
&+\overline{\lim_{h\to 0}}\int_{[0,1]\cap CH(x_0,\varepsilon,h)} M\Big(kM^{-1}\Big(\frac{1}{2h}\Big)[f(x)-f(x_0)]\Big)dx\\
&=I_1+I_2+I_3,
\end{aligned}$$

其中对任何 a 规定

$$H(x_0,a,h)=\{x\,|\,|k[f(x)-f(x_0)]|\geqslant a,\ |x-x_0|\leqslant h\}.$$

首先注意到，当h充分小时，$M^{-1}\left(\frac{1}{2h}\right)\geqslant u_0$，于是，由$M(u)$满足$\triangle'$—条件知

$$I_1=\overline{\lim_{h\to 0}}\int_{H(x_0,u_0,h)}M\left(kM^{-1}\left(\frac{1}{2h}\right)[f(x)-f(x_0)]\right)dx$$

$$\leqslant\overline{\lim_{h\to 0}}\int_{H(x_0,u_0,h)}LM\left(M^{-1}\left(\frac{1}{2h}\right)\right)M\left(k[f(x)-f(x_0)]\right)dx$$

$$\leqslant L\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h}M\left(k[f(x)-f(x_0)]\right)dx$$

$$=0.$$

其次，由[7]p.24 引理5.1知$M(u)$亦满足$\triangle_2$—条件，又取N，使得$2^N\geqslant u_0$，再由[6]定理4即有

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}mesH^M(x_0,M(\varepsilon),h)=0,$$

其中

$$H^M(x_0,M(\varepsilon),h)=\{x\,|\,M(k[f(x)-f(x_0)])\geqslant M(\varepsilon),\ |x-x_0|\leqslant h\}.$$

从而

$$I_2=\overline{\lim_{h\to 0}}\int_{H(x_0,\varepsilon,h)-H(x_0,u_0,h)}M\left(kM^{-1}\left(\frac{1}{2h}\right)[f(x)-f(x_0)]\right)dx$$

$$\leqslant\overline{\lim_{h\to 0}}\int_{H(x_0,\varepsilon,h)-H(x_0,u_0,h)}M\left(M^{-1}\left(\frac{1}{2h}\right)\cdot u_0\right)dx$$

$$\leqslant\overline{\lim_{h\to 0}}\int_{H(x_0,\varepsilon,h)-H(x_0,u_0,h)}M\left(M^{-1}\left(\frac{1}{2h}\right)\cdot 2^N\right)dx$$

$$\leqslant\overline{\lim_{h\to 0}}\int_{H(x_0,\varepsilon,h)-H(x_0,u_0,h)}C^N\cdot\frac{1}{2h}dx$$

$$\leqslant C^N\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{1}{2h}\cdot mesH(x_0,\varepsilon,h)$$

$$\leqslant C^N\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{1}{2h}\cdot mesH^M(x_0,M(\varepsilon),h)=0.$$

最后有

$$I_3=\overline{\lim_{h\to 0}}\int_{[0,1]\cap CH(x_0,\varepsilon,h)}M\left(kM^{-1}\left(\frac{1}{2h}\right)[f(x)-f(x_0)]\right)dx$$

$$\leqslant\overline{\lim_{h\to 0}}\int_{[0,1]\cap CH(x_0,\varepsilon,h)}M\left(M^{-1}\left(\frac{1}{2h}\right)\cdot\varepsilon\right)dx$$

$$\leqslant\varepsilon\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h}dx=\varepsilon.$$

总之，x_δ 为 $f(x)$ 的 LO 点。

$\Longrightarrow$ 容易证明 $M(u)$ 满足$\triangle'$—条件等价于存在 $L>0$，$K>0$，$u_o\geqslant 0$，使

$$M(uv)\leqslant LM(ku)M(v)\quad (u,v\geqslant u_o). \tag{*}$$

事实上，若 $M(u)$满足$\triangle'$—条件，则 (*) 式自然成立，这只须取 $k=1$。反之．若(*)式成立，则

$$M(uv)\leqslant LM(ku)M(v)\quad (u,v\geqslant u_o),$$

此处不妨设$u_0>1$，于是

$$M(u_0v)\leqslant LM(ku_0)M(v)\quad (v\geqslant u_0),$$

即$M(u)$满足$\triangle_2$—条件，从而当$k>1$时由[7]$p.23$有$k'>o$，使$M(ku)\leqslant k'M(u)\ (u\geqslant u')$，亦即有

$$M(uv)\leqslant LM(ku)M(v)\leqslant Lk'M(u)M(v)\quad (u,v\geqslant u_1),$$

其中 $u_1=max(u_o,u')$。又当 $k\leqslant 1$ 时

$$M(uv)\leqslant LM(ku)M(v)\leqslant LM(u)M(v)\quad (u,v\geqslant u_o).$$

总之，$M(u)$满足$\triangle'$—条件。

因此，若 $M(u)$不满足$\triangle'$—条件，则有

$1\leqslant k_n\nearrow\infty$，$u_n\nearrow\infty$，$v_n\nearrow\infty$，使

$$M(u_nv_n)\geqslant 2^nM(k_nu_n)M(v_n)\quad (n=1,2,\cdots).$$

显然，不妨设$M(u_1)\geqslant 1$，$M(v_1)\geqslant 1$，且$v_{n+1}\geqslant 2v_n$，于是

$$\frac{1}{M(v_{n+1})}\leqslant\frac{1}{M(2v_n)}\leqslant\frac{1}{2M(v_n)}.$$

作 $$G_n\subset\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4M(v_n)},\frac{1}{2}+\frac{1}{2M(v_n)}\right]\cup\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2M(v_n)},\frac{1}{2}-\frac{1}{4M(v_n)}\right],$$

同时使

$$mesG_n=\frac{1}{2^nM(k_nu_n)M(v_n)}\qquad (n=1,2,\cdots),$$

从而

$$mesG_n\leqslant\frac{1}{2^nM(v_n)}\leqslant\frac{1}{2M(v_n)}.$$

命

$$f(x)=\begin{cases}u_n\text{ 当}x\in G_n\ (n=1,2,\cdots)\text{时}\\ 0\text{ 当}x\in[0,1]-\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n\text{ 时}\end{cases},$$

则因

$$\int_0^1 M[f(x)]dx=\sum_{n=1}^{\infty}M(u_n)mesG_n=\sum_{n=1}^{\infty}M(u_n)\frac{1}{2^nM(k_nu_n)M(v_n)}$$
$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}M(u_n)\frac{1}{2^nM(u_n)M(v_n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^nM(v_n)}$$
$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\infty,$$

故$f(x)\in L_M(0,1)\subset L_M^*(0,1)$。

今证$x=\frac{1}{2}$是$f(x)$的LB点。

事实上，对任何给定的k，取n_0使$k_{n_0}\geqslant|k|$，则当$0<h<\frac{1}{2M(v_{n_0})}$时，有$n(h)$使

$$\frac{1}{4M(v_{n(h)})}\leqslant h<\frac{1}{2M(v_{n(h)})}$$

或

$$\frac{1}{2M(v_{n(h)+1})}\leqslant h<\frac{1}{4M(v_{n(h)})}.$$

显然，当$h\searrow 0$时，$n(h)\nearrow\infty$。

于$\varepsilon>0$，则一定存在这样的δ，$0<\delta<\frac{1}{2M(v_{n_0})}$，

并且使$\sum\limits_{l=n(\delta)}^{\infty}\frac{1}{2^{l-1}}<\varepsilon$，再注意到$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，$M(u)$为偶函数，于是，当$0<h<\delta$时

$$\frac{1}{2h}\int_{\frac{1}{2}-h}^{\frac{1}{2}+h}M\left(k\left[f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right)dx\leqslant\frac{1}{2\cdot\frac{1}{4M(v_{n(h)})}}\int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2M(V_{n(h)})}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2M(V_{n(h)})}}M[kf(x)]dx$$

$$\leqslant 2M(v_{n(h)})\sum_{l=n(h)}^{\infty}\int_{G_l}M[kf(x)]dx=2M(v_{n(h)})\sum_{l=n(h)}^{\infty}M(ku_l)mesG_l$$

$$\leqslant 2M(v_{n(h)})\sum_{l=n(h)}^{\infty}M(k_lu_l\ mes)G_l=2M(v_{n(h)})\sum_{l=n(h)}^{\infty}\frac{1}{2^lM(v_l)}$$

$$\leqslant\sum_{l=n(h)}^{\infty}\frac{1}{2^{l-1}}\leqslant\sum_{l=n(\delta)}^{\infty}\frac{1}{2^{l-1}}<\varepsilon,$$

或

$$\frac{1}{2h}\int_{\frac{1}{2}-h}^{\frac{1}{2}+h}M\left(k\left[f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right)dx=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2M(v_{n(h)+1})}}\int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{4M\ v_{n(h)}}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4M\ v_{n(h)}}}M(kf(x))dx$$

$$\leqslant M(v_{n(h)+1})\sum_{l=n(h)+1}^{\infty}\int_{G_l}M[kf(x)]dx=M(v_{n(h)+1})\sum_{l=n(h)+1}^{\infty}M(ku_l)mesG_l$$

$$\leqslant M(v_{n(h)+1})\sum_{l=n(h)+1}^{\infty}M(k_lu_l)mes\,G_l=M(v_{n(h)+1})\sum_{l=n(h)+1}^{\infty}\frac{1}{2^lM(v_l)}$$

$$\leqslant\sum_{l=n(h)+1}^{\infty}\frac{1}{2^l}\leqslant\sum_{l=n(\sigma)+1}^{\infty}\frac{1}{2^l}<\varepsilon.$$

但$x=\frac{1}{2}$不是$f(x)$的LO点：

根据[7]p.76(9.20)和p.77(9.23)得

$$\left\|M^{-1}\left(\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2M(v_n)}}\right)\left[f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right]\psi_{\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2M(v_n)},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2M(v_n)}\right]}(x)\right\|_M$$

$$\geqslant\|M^{-1}(M(v_n))f(x)\psi_{G_n}(x)\|_M=u_nv_n\|\psi_{G_n}(x)\|_M$$

$$\geqslant u_nv_n\|\psi_{G_n}(x)\|_{(M)}=u_nv_n\frac{1}{M^{-1}\left(\frac{1}{mesG_n}\right)}$$

$$=u_nv_n\cdot\frac{1}{M^{-1}(2^nM(k_nu_n)M(v_n))}\geqslant u_nv_n\frac{1}{M^{-1}(M(u_nv_n))}$$

$$=1 \qquad (n=1,2,\cdots)$$

总之，与假设矛盾。

注。Salehov[6]在附加$M(u)$的余N函数$N(v)$满足$\triangle_2$—条件的假设下才证得本定理的充分性。

定理2。对一切$f(x)\in L_M^*(0,1)$，$f(x)$的LO点必为LB点$\Longleftrightarrow M(u)$的余N函数$N(v)$满足$\triangle'$—条件。

证明。$\Longrightarrow$根据[9]的结果，$N(v)$满足$\triangle'$—条件$\Longleftrightarrow$存在$L>0$，$u_0\geqslant 0$，使当$u,v\geqslant u_0$时

$$M(Luv)\geqslant M(u)M(v).$$

因此，如若不然，则一定存在$1\leqslant u_n\nearrow\infty$，$1\leqslant v_n\nearrow\infty$，使

$$M(n2^nu_nv_n)\leqslant M(u_n)M(v_n)\quad n=1,2,\cdots).$$

于是，仿定理1的证明，可作出相应的函数$f(x)\in L_M^*(0,1)$，只是此时要求

$$mesG_n=\frac{1}{M(n2^nu_nv_n)}\quad (n=1,2,\cdots).$$

因此

$$mesG_n\leqslant\frac{1}{2^nM(u_nv_n)}\leqslant\frac{1}{2M(v_n)}$$

由于

$$\int_0^1 M[f(x)]dx=\sum_{n=1}^{\infty}M(u_n)\cdot\frac{1}{M(n2^nu_nv_n)}$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}M(u_n)\frac{1}{2^nM(nv_nu_n)}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\infty$$

故$f(x)\in L_M(0,1)\subset L_M^*(0,1)$。

$x=\frac{1}{2}$是$f(x)$的LO点。

事实上，对任何给定的k，取n_0，使$n_0\geqslant 2|k|$，则如同定理1之证，有$0<\delta<\frac{1}{2M(v_{n_0})}$，使当$0<h<\delta$时

$$\int_{\frac{1}{2}-h}^{\frac{1}{2}+h} M\left(kM^{-1}\left(\frac{1}{2h}\right)\left[f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right)dx \leqslant \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2M(v_{n(h)})}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2M(v_{n(h)})}}$$

$$\cdot M\left(kM^{-1}\left(\frac{1}{2\cdot\frac{1}{4M(v_{n(h)})}}f(x)\right)dx\right.$$

$$\leqslant \sum_{l=n(h)}^{\infty} M(2ku_lv_l)\cdot mesG_l \leqslant \sum_{l=n(\delta)}^{\infty}\frac{1}{2^l}<\varepsilon,$$

或

$$\int_{\frac{1}{2}-h}^{\frac{1}{2}+h} M\left(M^{-1}\left(\frac{1}{2h}\right)\left[f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right)dx = \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2M(v_{n(h)+1})}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2M(v_{n(h)+1})}}$$

$$\cdot M\left(kM^{-1}\left(\frac{1}{2h}\right)f(x)\right)dx$$

$$\leqslant \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2M(v_{n(h)+1})}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2M(v_{n(h)+1})}} M\left(kM^{-1}\left(\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2M(v_{n(h)+1})}}f(x)\right)dx\right. = \sum_{l=n(h)+1}^{\infty} M(ku_lv_l)mesG$$

$$\leqslant \sum_{l=n(\delta)}^{\infty}\frac{1}{2^l}<\varepsilon.$$

但$x=\frac{1}{2}$不是$f(x)$的LB点，这只须注意

$$\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2M(v_n)}}\int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2M(v_n)}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2M(v_n)}} M\left[f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right]dx \geqslant M(v_n)\int_{G_n} M[f(x)]dx$$

$$=M(v_n)M(u_n)mesG_n \quad \geqslant M(n\cdot 2^n u_n v_n)\cdot mesG_n=1 \qquad (n=1,2,\cdots).$$

$\Leftarrow$　类似于定理1相应部分的证明，设x_0是$f(x)$的LO点，则对任意给定的k，于$\varepsilon>0$满足$M^{-1}(\varepsilon)\leqslant u_0$(此处不妨设$u_0>0$)，有

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h} M\left(k\left[f(x)-f(x_0)\right]\right)dx \quad \leqslant I_1'+I_2'+I_3',$$

此时

$$I_1'=\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{1}{2h}\int_{H(x_0,u_0,h)} M\left(k\left[f(x)-f(x_0)\right]\right)dx$$

$$\leqslant \overline{\lim_{h\to 0}}\int_{x_0-h}^{x_0+h} M\left(LkM^{-1}\left(\frac{1}{2h}\right)[f(x)-f(x_0)]\right)dx=0,$$

$$I_2' = \overline{\lim_{h\to 0}}\frac{1}{2h}\int_{H(x_0,M^{-1}(\varepsilon),h)-H(x_0,u_0,h)} M(k[f(x)-f(x_0)])dx$$

$$\leqslant M(u_0)\overline{\lim_{h\to 0}}\int_{H(x_0,M^{-1}(\varepsilon),h)}\frac{1}{M^{-1}(\varepsilon)}\Big|k[f(x)-f(x_0)]\Big|M\Big(M^{-1}\Big(\frac{1}{2h}\Big)\Big)dx$$

$$\leqslant M(u_0)\overline{\lim_{h\to 0}}\int_{x_0-h}^{x_0+h}M\Big(\frac{k}{M^{-1}(\varepsilon)}M^{-1}\Big(\frac{1}{2h}\Big)[f(x)-f(x_0)]\Big)dx=0.$$

$$I_3' = \overline{\lim_{h\to 0}}\frac{1}{2h}\int_{[0,1]\cap CH(x_0,M^{-1}(\varepsilon),h)} M\Big(k[f(x)-f(x_0)]\Big)dx$$

$$\leqslant \overline{\lim_{h\to 0}}\frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h}M\Big(M^{-1}(\varepsilon)\Big)dx=\varepsilon,$$

故 x_0 是 $f(x)$ 的 LB 点。

注。 Salehov[6] 只证明了本定理的充分性，为完整起见，这里给出一个与他不同的证法。

由定理 1，立得

定理 3. 对一切 $f(x)\in L_M^*(0,1)$，$f(x)$ 的 LB 点与 LO 点等价 $\Longleftrightarrow M(u)$ 与 $N(v)$ 均满足 $\triangle'$ 一条件。

定理 4. 对一切 $f(x)\in L_M^*(0,1)$，$f(x)$ 关于 $M_1(u)$ 的 LB 点必为关于 $M_2(u)$ 的 LB 点 $\Longleftrightarrow$ 存在 $L>0$，$K>0$，和 $u_0\geqslant 0$，使 $M_2(u)\leqslant LM_1(Ku)\quad(u\geqslant u_0)$。

证明 $\Longleftarrow$ 设 x_0 为 $f(x)$ 关于 $M_1(u)$ 的 LB 点，则如同定理 1 之证，对任何给定的 k，于 $\varepsilon>0$ 满足 $M_2^{-1}(\varepsilon)\leqslant u_0$（此处不妨设 $u_0>0$），有

$$I_1'' = \overline{\lim_{h\to 0}}\frac{1}{2h}\int_{H(x_0,u_0,h)} M_2\Big(k[f(x)-f(x_0)]\Big)dx$$

$$\leqslant L\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h}M_1(Kk[f(x)-f(x_0)]dx=0,$$

$$I_2'' = \overline{\lim_{h\to 0}}\frac{1}{2h}\int_{H(x_0,M_2^{-1}(\varepsilon),h)-H(x_0,u_0,h)} M_2(k[f(x)-f(x_0)]dx$$

$$\leqslant M_2(u_0)\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{1}{2h}mesH^{M_1}(x_0,M_1(M_2^{-1}(\varepsilon)),h)=0,$$

$$I_3'' = \overline{\lim_{h\to 0}}\frac{1}{2h}\int_{[0,1]\cap CH(x_0,M_2^{-1}(\varepsilon),h)} M_2(k[f(x)-f(x_0)])dx$$

$$\leqslant \overline{\lim_{h\to 0}}\frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h}M_2(M_2^{-1}(\varepsilon))dx=\varepsilon,$$

即 x_0 是 $f(x)$ 关于 $M_2(u)$ 的 LB 点。

$\Longrightarrow$ 若不然，则有 $1\leqslant k_n\nearrow\infty$ 和 $u_n\nearrow\infty$，使

$$M_2(u_n)\geqslant 2^{2n}M_1(k_n u_n) \qquad (n=1,2,\cdots)$$

作
$$G_n\subset\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n-1}}\right],$$

并满足
$$mesG_n=\frac{M_1(u_1)}{2^{2n}M_1(k_n u_n)\cdot n} \qquad (n=1,2,\cdots),$$

令 $f(x)$ 如同定理 1，则易见 $f(x)\in L_{M_1}^*(0,1)$。

$x=\frac{1}{2}$为 $f(x)$关于 $M_1(u)$的 LB 点。

事实上，对任何给定的 k，取 n_0 使$k_{n_0}\geqslant|k|$，则当 $0<h<\frac{1}{2^{n_0}}$时，有$n(h)$使得

$\frac{1}{2^{n(h)+1}}\leqslant h<\frac{1}{2^{n(h)}}$，

故仿定理 1 之证有$0<\delta<\frac{1}{2^{n_0}}$，使当 $0<h<\delta$时

$$\frac{1}{2h}\int_{\frac{1}{2}-h}^{\frac{1}{2}+h}M_1\left(k\left[f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right)dx \leqslant 2^{n(h)}\sum_{l=n(h)+1}^{\infty}M_1(ku_l)\,\mathrm{mes}G_l$$

$$\leqslant M_1(u_1)\sum_{l=n(\delta)}^{\infty}\frac{1}{2^l}<M_1(u_1)\varepsilon$$

但$x=\frac{1}{2}$不是 $f(x)$关于 $M_2(u)$的 LB点，这是因为

$$\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2^n}}\int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}}M_2\left(f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right)dx=2^{n-1}\sum_{l=n+1}^{\infty}M_2(u_l)\,mesG_l$$

$$\geqslant M_1(u_1)\sum_{l=n+1}^{\infty}\frac{1}{2}=\infty$$

最后由定理 1，2，4 可得

定理5. 若存在正数 L，K，L'，L''和 u_0，u_0'，$u_0''\geqslant 0$满足

1° $M_2(u)\leqslant LM_1(Ku)$　　　　$(u\geqslant u_0)$

2° $M_1(L'uv)\geqslant M_1(u)M_1(v)$　　　　$(u,v\geqslant u_0')$

3° $M_2(uv)\leqslant L''M_2(u)M_2(v)$　　　　$(u,v\geqslant u_0'')$，

则 $f(x)$关于 $M_1(u)$的 LO 点必为关于 $M_2(u)$的 LO 点。

注。这也就是 Salehov [1]中的主要定理。

§2　MLO 点与 LB 点

定理6. 对一切 $f(x)\in L_M^*(0,1)$，其关于完全测度集的连续点必为 LB 点。

证明. 设 x_0 为 $f(x)$ 关于完全测度集 E 的连续点，则 $mesE=1$，$f(x)$ 在 x_0 关于 E 为连续。对任意给定的 k，于 $\varepsilon>0$，由[7]$ch\cdot 1$§1(1.15)知$\lim\limits_{u\to 0}M(u)=0$，故存在 $\delta_0>0$，使当$|\delta|\leqslant\delta_0$时，$M(\delta)<\varepsilon$；又存在$h_0>0$，使当 $0<h<h_0$ 时，有

$$|f(v)-f(x_0)|<\frac{\delta_0}{|k|},$$

其中

$$v\in E\cap(x_0-h,\ x_0+h)=E^*,$$

显然，$mesE^*=2h$，故当$0<h<h_0$时

$$\left|\frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h}M\Big(k[f(v)-f(x_0)]\Big)dv\right|=\frac{1}{2h}\left|\int_{E^*}M\Big(k[f(v)-f(x_0)]\Big)dv\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2h}\int_{E^*}M\left(k\cdot\frac{\delta}{k}\right)dv<\varepsilon,$$

即 x_0 是 $f(x)$的 LB 点。

观察定理 1 的充分性证明，立即得到下述定理

定理7. 对一切 $f(x)\in L_M^*(0,1)$，其 LB 点必为 MLO 点。

定理8. 对一切 $f(x)\in L_M^*(0,1)$，其 LB 点与 MLO 点等价$\Leftrightarrow M(u)$ 满足$\triangle_2$一条件。

证明. $\Rightarrow$ 若不然，则存在$u_n\nearrow\infty$，且$M(u_1)>1$，$M(2u_n)>2^nM(u_n)$，$u_{n+1}\geqslant 2u_n$。仿定理 1 之证可作出相应的 $f(x)\in L_M^*(0,1)$，只是此时要求

$$mesG_n=\frac{1}{2^nM^2(u_n)}\quad(n=1,2\cdots).$$

$x=\frac{1}{2}$是 $f(x)$的MLO点。

事实上，如同定理 1 之证，有$0<\delta<\frac{1}{2M(u_1)}$，使当$0<h<\delta$时：

$$\frac{1}{2h}\int_{\frac{1}{2}-h}^{\frac{1}{2}+h}M\left[f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right]dx\quad\leqslant M(u_{n(h)+1})\int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{M(u_{n(h)})}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4M(u_{n(h)})}}M[f(x)]dx$$

$$=M(u_{n(h)+1})\sum_{l=n(h)+1}^{\infty}M(u_l)mesG_l\quad\leqslant\sum_{l=n(\delta)}^{\infty}\frac{1}{2^l}<\varepsilon,$$

或

$$\frac{1}{2h}\int_{\frac{1}{2}-}^{\frac{1}{2}+h}M\left[f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right]dx\quad\leqslant 2M(u_{n(h)})\int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2M(u_{n(h)})}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2M(u_{n(h)})}}M[f(x)]dx$$

$$\leqslant 2M(u_{n(h)})\sum_{l=n(h)}^{\infty}M(u_l)mesG_l\leqslant\sum_{l=n(\delta)}^{\infty}\frac{1}{2^{l-2}}<\varepsilon.$$

但$x=\frac{1}{2}$不是 $f(x)$的 LB 点，这只须注意

$$\frac{1}{2\frac{1}{M(u_n)}}\int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2M(u_n)}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2M(u_n)}}M\left(2\left[f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right)dx\quad\geqslant M(u_n)M(2u_n)\cdot mesG_n\geqslant 1$$

$$(n=1,2,\cdots).$$

$\Leftarrow$ 只须注意当$M(u)$满足Δ_2一条件时

$\lim\limits_{h\to 0}\left\|f(x_o+hx)-f(x_o)\right\|_M=0$等价于$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{x_o-h}^{x_o+h}M[f(v)-f(x_o)]\,dv=0$.

定理9. 对一切$f(x)\in L_M^*(0,1)$，其MLO点必为L点.

证明. 设x_o为$f(x)$的MLO点，则由[7]$ch\cdot 2$ §8即知

$$M\left\{\frac{1}{2h}\int_{x_o-h}^{x_o+h}|f(x)-f(x_o)|\,dx\right\}\leqslant\frac{1}{2h}\int_{x_o-x}^{x_o+h}M[f(x)-f(x_o)]dx,$$

于是

$$\lim_{h\to 0}M\left\{\frac{1}{2h}\int_{x_o-h}^{x_o+h}\left|f(x)-f(x_o)\right|dx\right\}=0,$$

故再由$M^{-1}(u)$单调连续便知

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{x_o-h}^{x_o+h}\left|f(x)-f(x_o)\right|dx=M^{-1}\left[\lim_{h\to 0}M\left\{\frac{1}{2h}\int_{x_o-h}^{x_o+h}\left|f(x)-f(x_o)\right|dx\right\}\right]=0.$$

即x_o是$f(x)$的L点.

定理10. 对任何Young函数$M(u)$，都必存在$f(x)\in L_M^*(0,1)$，它有非MLO点的L点.

证明. 由[7]$ch\cdot 2$§1(1.15)，(1.16)知　$\lim\limits_{u\to 0}\frac{M(u)}{u}=0$，$\lim\limits_{u\to\infty}\frac{M(u)}{u}=\infty$，又$\frac{M(u)}{u}$是$u$的连续函数，于是，有$0<u_n\nearrow\infty$，并使$2^n u_n\leqslant M(u_n)<2^{n+1}u_n$。如同定理4之证，可作出相应的$f(x)\in L_M^*(0,1)$，只是此时要求

$$mes\ G_n=\frac{u_1}{2^{2n}u_n}\qquad(n=1,2,\cdots).$$

$x=\frac{1}{2}$是$f(x)$的L点.

事实上，对任何$0<h<\frac{1}{2}$，都存在$n(h)$，使

$\frac{1}{2^{n(h)+1}}\leqslant h<\frac{1}{2^{n(h)}}$，于是仿定理4之证，有$0<\delta<\frac{1}{2}$，使当$0<h<\delta$时

$$\frac{1}{2h}\int_{\frac{1}{2}-h}^{\frac{1}{2}+h}\left|f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|dx\quad\leqslant 2^{n(h)}\sum_{l=n(h)+1}^{\infty}u_l mes\ G_l$$

$$\leqslant u_1\sum_{l=n(\delta)}^{\infty}\frac{1}{2^l}<u_1\varepsilon.$$

但$x=\frac{1}{2}$不是$f(x)$的MLO点，这是因为

$$\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2^n}}\int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}}M\left[f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right]dx=2^{n-1}\sum_{l=n+1}^{\infty}M(u_l)\ mes\ G_l\geqslant\frac{u_1}{2}.$$

§3 LO点与MLO点

由§1定理1，2，3和§2定理8，并观察定理2的必要性之证，即得下述诸定理。

定理11. 对一切 $f(x)\in L_M^*(0,1)$，其 MLO 点必为 LO 点 $\Leftrightarrow M(u)$ 满足 Δ' 一条件.

定理12. 对一切 $f(x)\in L_M^*(0,1)$，其 LO 点必为 MLO 点 $\Leftrightarrow M(u)$ 的余 N 函数 $N(v)$ 满足 Δ' 一条件.

定理13. 对一切 $f(x)\in L_M^*(0,1)$，其 LO 点、LB 点与 MLO 点一致 $\Leftrightarrow M(u)$，$N(v)$ 都满足 Δ' 一条件

本文定理1，2，4的结论已在[11]中发表.

参 考 文 献

[1] Salehov, D. V., *Dokl. Acad. Nauk. SSSR*, 116 (1957). 355—358.

[2] Salehov, D. V., *Ukrain. Mat. Ž.*, 13 (1961), no. 4, 34—50.

[3] Salehov. D. V., ibid. 17(1965), no.4, 72—81.

[4] Salehov, D. V., *Dokl. Acad. Nauk. SSSR*, 175(1967), 1018—1021.

[5] Salehov, D. V., *Voroněz. Gos. Univ. Irudy Sem. Funkcional. Anal. Vyp.* 10(1968), 114—121.

[6] 吴从炘，哈尔滨工业大学学报，(1960)，第1期，163—170.

[7] Красносельский, М. А., Рутицкий, Я. Б. 凸函数和奥尔里奇空间，(1962) 科学出版社，北京，吴从炘译.

[8] Luxemburg, W. A. J., Banach function spaces, (1955).

[9] Anod, T., *Dokl. Acad. Nauk. SSSR*, 136(1960) 1007—1010.

[10] Нэтансон, И. П., 实变函数论，(1955)，高等教育出版社，北京，徐瑞云译.

[11] 吴从炘，自然杂志，3(1980)，no. 9, 712.

Concerning LO Points, LB Points and MLO Points of Functions in the Orlicz Space $L_M^*(0,1)$

By Wu Congxin(吴从炘) *and* *Liu Tiefu*(刘铁夫)

Abstract

Some relationships among LO, LB and MLO points of Functions in $L_M^*(0,1)$ have been investigated in more detail in this paper, thus improving the corresponding principal results of Salehov's.