Jacobi和Gauss－Seidel迭代法收敛性的判定*

高益明

（东北师大）

§1 引 言

解线代数方程组

$$AX=b$$

的Jacobi迭代法和Gauss－Seidel迭代法收敛的充要条件是Jacobi迭代矩阵$B=D^{-1}(E+F)$的谱半径$\rho(B)$小于1，但验证这一充要条件需要求阵B的特征值，使用很不方便。因此促使人们去寻找使用方便、计算简单判定两迭代法收敛的充分条件。如大家所熟知，两迭代法收敛的一充分条件是：

$$\mu=\max_i\sum_{j=1}^n|b_{ij}|<1,$$

$$\nu=\max_j\sum_{i=1}^n|b_{ij}|<1.$$

当$\mu=1$，$\nu=1$时，上述充分条件不满足，为此需要寻找新的判定方法，蒋尔雄在[1]中给出了$\mu=1$时迭代收敛的充分条件，孙达传在[2]中给出了当$\mu=1$时迭代法收敛更一般的充分条件，并用类似的方法给出了当$\mu=1$时迭代法收敛的充分条件。

本文的目的是在此基础上，给出$\mu=1$（或$\nu=1$）时两迭代法收敛更一般的充分条件，并且进一步给出当$\mu>1$（或$\nu>1$）时两迭代法收敛的充分条件，同时也给出非负（非正）矩阵类两迭代法发散的充分条件。

§2 判定定理

为了定理讨论的需要，我们引入如下记法：

$A=D-E-F$，其中D，E，F分别为矩阵A的对角、严格下三角，严格上三角部分。而Jacobi迭代阵$B=D^{-1}(E+F)=L+U$

* 1981年2月12日收到。
推荐者：冯果忱（吉林大学计算中心）。

且
$$B=(b_{ij}),\qquad b_i=\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|,$$
$$\widetilde{b}_j=\sum_{i=1}^{n}|b_{ij}|,\qquad 1\leqslant i,j\leqslant n.$$

下面我们给出当 $\mu\geqslant1$（或 $\nu\geqslant1$）时，两迭代法收敛的充分条件定理。

定理 1 设矩阵 B 满足 $\mu=1$、$\nu=1$，如果对每个 $b_i=1$，都存在非零元素链 $b_{ir_1}b_{r_1r_2}\cdots b_{r_kj}$ 且 $b_j<1$，则两迭代法收敛。

证明： 我们用 $b_j<p_j<1$ 乘矩阵 B 的第 j 列，再用 $\frac{1}{p_j}$ 乘第 j 行得矩阵 B_1，则有 $B_1\sim B$，

设 $B_1=(b^{(1)}_{kj})$，$b^{(1)}_k=\sum_{j=1}^{n}|b^{(1)}_{kj}|$，$1\leqslant k,j\leqslant n$.

由于 $b_{r_kj}\neq0$，于是有：

$$b^{(1)}_k\leqslant b_k\leqslant1,\quad k\neq j、r_k,$$
$$b_{r_k}^{(1)}=b_{r_k}-(1-p_j)b_{r_kj}<b_{r_k}=1,$$
$$b^{(1)}_j\leqslant b_j\frac{1}{p_j}<1,$$

即矩阵 B_1 至少有：$b^{(1)}_j<1$，$b^{(1)}_{r_k}<1$.

接着我们再用 $b^{(1)}_{r_k}<b_{r_k}<1$ 乘阵 B_1 的第 r_k 列，再用 $\frac{1}{p_{r_k}}$ 乘第 r_k 行得矩阵 B_2，则 $B_2\sim B$，设 $B_2=(b^{(2)}_{kj})$，$b^{(2)}_k=\sum_{j=1}^{n}|b^{(2)}_{kj}|$，$1\leqslant k$，$j\leqslant n$。由于 $b_{r_{k-1}r_k}\neq0$，于是有：

$$b^{(2)}_k\leqslant b^{(1)}_k\leqslant1,\quad k\neq j、r_k、r_{k-1},$$
$$b^{(2)}_{r_{k-1}}=b^{(1)}_{r_{k-1}}-(1-p_{r_k})b^{(1)}_{r_{k-1}r_k}<b_{r_{k-1}}\leqslant1,$$
$$b^{(2)}_{r_k}\leqslant b_{r_k}\frac{1}{p_{r_k}}<1,$$
$$b^{(2)}_j\leqslant b^{(1)}_j<1,$$

即矩阵 B_2 至少有：$b^{(2)}_j<1$，$b^{(2)}_{r_k}<1$，$b^{(2)}_{r_{k-1}}<1$.

依次类推，经 k 次变换后得矩阵 B_k 至少有：$b^{(k)}_j<1$，$b^{(k)}_{r_k}<1$，…，$b^{(k)}_{r_1}<1$.

最后，我们再用 $b^{(k)}_{r_1}<p_{r_1}<1$ 乘阵 B_k 的第 r_1 列，再用 $\frac{1}{p_{r_1}}$ 乘第 r_1 行得矩阵 B_{k+1}，则 $B_{k+1}\sim B$.

设 $B_{k+1}=(b^{(k+1)}_{kj})$，$b^{(k+1)}_k=\sum_{j=1}^{n}|b^{(k+1)}_{kj}|$，$1\leqslant k$，$j\leqslant n$. 由于 $b_{ir_1}\neq0$，于是有：

$$b^{(k+1)}_k\leqslant b^{(k)}_k\leqslant1,\quad k\neq j、r_k、r_{k-1}、\cdots、r_1\ i,$$
$$b^{(k+1)}_i=b^{(k)}_i-(1-p_{r_1})b^{(k)}_{ir_1}<b^{(k)}_i\leqslant1,$$
$$b^{(k+1)}_{r_1}\leqslant b^{(k)}_{r_1}\frac{1}{p_{r_1}}<1,$$

$b_k^{(k+1)} \leqslant b_k^{(k)} < 1$，$k = j、r_k、r_{k-1}、\cdots、r_2$。

即矩阵 B_{k+1} 至少有：$b_k^{(k+1)} < 1$，$k = j、r_k、\cdots、r_1、i$。

同样可对每个 $b_k = 1$ 的行作变换，使得变换后的 $b_k^* < 1$。

也就是可以通过变换得：$\hat{B} = p^{-1}Bp \sim B$。设 $\hat{B} = (\hat{b}_{ij})$，$\hat{b}_i = \sum_{j=1}^{n} |\hat{b}_{ij}|$，则有：

$\hat{b}_i < 1$，$i = 1、2 \cdots n$。

即 $\mu = \max_i \hat{b}_i = \max_i \sum_{j=1}^{n} |\hat{b}_{ij}| < 1$，

于是可得两迭代法对阵 $\hat{B}$ 收敛。

由此得：$\rho(B) = \rho(\hat{B}) < 1$，

而由 $\hat{B} = p^{-1}BP = P^{-1}LP + P^{-1}UP = \hat{L} + \hat{U}$，

可得：$I - \hat{L} = P^{-1}(I-L)P$，$\hat{U} = p^{-1}UP$，

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{B}} &= (I - \hat{L})^{-1}\hat{U} = P^{-1}(I-L)^{-1}PP^{-1}UP \\ &= P^{-1}(I-L)^{-1}UP = P^{-1}\mathbf{B}_1P,\end{aligned}$$

即
$$\hat{\mathbf{B}} \sim \mathbf{B}_1, \quad \rho(\hat{\mathbf{B}}_1) = \rho(\mathbf{B}_1) < 1,$$

故有两迭代法收敛。（证毕）

完全类似地对矩阵 B 的列进行讨论可得：

推论1 设矩阵 B 满足 $\nu = 1$、$\mu \geqslant 1$，如果对每个 $\tilde{b}_i = 1$，都存在非零元素链 $b_{jr_k}b_{r_kr_{k-1}}\cdots b_{r_2r_1}b_{r_1i}$，且 $\tilde{b}_j < 1$，则两迭代法收敛。

定理2 设矩阵 B 满足 $\mu > 1$、$\nu \geqslant 1$，如果有 $b_i > 1$，$b_i \cdot b_k < 1$，$k = 1, 2, \cdots, n, k \neq i$，则则两迭代法收敛。

证明：不失一般性，不妨设 $b_1 > 1$，则由定理条件得：$b_1b_k < 1$，则必有 $b_k < 1$，$k = 2, \cdots, n$。

我们用 $\frac{1}{b_1}$ 乘矩阵 B 的第一行，再用 b_1 乘第一列得矩阵 B_1，则 $B_1 \sim B$。

设
$$B_1 = (b_{kj}^{(1)}), \quad b_k^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} |b_{kj}^{(1)}|, \quad 1 \leqslant k, j \leqslant n.$$

于是有：

$$b_1^{(1)} = b_1 \cdot \frac{1}{b_1} = 1$$

$$b_k^{(1)} = b_k - (1 - b_k)b_{k1} \leqslant b_1 \cdot b_k < 1, \qquad k = 2, 3, \cdots, n.$$

再设 $b_{1i}^{(1)} \neq 0$，$b_i^{(i)} < p_i < 1$，我们用 p_i 乘阵 B_1 的第 i 列，再用 $\frac{1}{p_i}$ 乘第 i 行得矩阵 B_2，则

$$B_2 \sim B.$$

设
$$B_2 = (b_{kj}^{(2)}), \quad b_k^{(2)} = \sum_{j=1}^{n} |b_{kj}^{(2)}|, \quad 1 \leqslant k, \ j \leqslant n.$$

于是有：
$$b_1^{(2)}=b_1^{(1)}-(1-p_i)b_{1i}^{(1)}<b_1^{(1)}=1,$$
$$b_i^{(2)}=b_i^{(1)}\frac{1}{p_i}<1,$$
$$b_k^{(2)}=b_k^{(1)}-(1-p_i)b_{ki}^{(1)}\leqslant b_k^{(1)}<1,\ k\neq i、1,$$
即矩阵B_2满足：
$$\mu=\max_k\ b_k^{(2)}<1,$$
于是可得两迭代法对矩阵B_2收敛。

且有 $\rho(B)=\rho(B_2)<1$.

用定理1类似方法可证明：

$\widehat{\mathbf{B}}_1\sim\mathbf{B}_1$（$\widehat{\mathbf{B}}_1$ 为对应 B_2 的 *Gauss—Seidel* 迭代阵），

故有 $\rho(\widehat{\mathbf{B}}_1)=\rho(\mathbf{B}_1)<1$,

所以两迭代法收敛。 （证毕）

对矩阵B的列进行类似讨论可得：

推论 2 设阵B满足$\nu>1$，$\mu\geqslant1$，如果有$\widetilde{b}_i>1$，$\widetilde{b}_i\cdot\widetilde{b}_k<1$，$k=1,2,\cdots,n$，$k\neq i$，则两迭代法收敛。

定理 3 设B为非负矩阵，且$C=\frac{1}{2}(B+B^*)$，如果C满足：$\mu_C<1$（或$\nu_C<1$），则两迭代法收敛。

证明： 设$\lambda_i, 1\leqslant i\leqslant n$是阵$B$的特征值，则由[5]§2的引理知：$|Re\lambda_i|\leqslant\rho(C)$，$1\leqslant i\leqslant n$. 而由B为非负矩阵，由 *Perron—Frobenius* 定理知：B有一个正实特征值$\lambda=\rho(B)$，于是有：
$$\rho(B)\leqslant\rho(C),$$
当$\mu_C<1$（或$\nu_C<1$）时有$\rho(C)<1$，故由[4]第三章定理3.3得：
$$\rho(\mathbf{B}_1)<\rho(B)\leqslant\rho(C)<1,$$
所以两迭代法收敛。 （证毕）

我们只要注意到如果B为非正矩阵，则$-B$阵为非负矩阵，立即可得：

推论 3 设B为非正矩阵，且$C=\frac{1}{2}(B+B^*)$，如果C满足：$\mu_C<1$（或$\nu_C<1$），则两迭代法收敛。

我们将此定理及推论与定理1、2及推论结合起来又可得到如下推论：

推论 4 设B为非负（非正）矩阵，且$C=\frac{1}{2}(B+B^*)$，如果C满足定理1（或推论1）条件，则两迭代法收敛。

推论 5 设B为非负（非正）矩阵，且$C=\frac{1}{2}(B+B^*)$ 如果C满足定理2（或推论2）条件，则两迭代法收敛。

下面我们将进一步给出两迭代法发散的充分条件，为了需要我们引入：
$$b_m=\min_k\{b_k\},\qquad \widetilde{b}_m=\min_k\{\widetilde{b}_k\},$$
$$b_M=\max_k\{b_k\},\qquad \widetilde{b}_M=\max_k\{\widetilde{b}_k\}.$$

定理4　设 B 为非负矩阵，如果 $\max\{b_m, \widetilde{b}_m\}\geqslant 1$ 则两迭代法发散。

证明：由于 B 为非负矩阵，由非负矩阵性质知：B 有一个正实特征值 $\lambda_1=\rho(B)$，且有：

$$b_m\leqslant\lambda_1\leqslant b_M \qquad (见[4]),$$

而对 B 的转置 B^T 讨论则有：

$$\widetilde{b}_m\leqslant\lambda_1\leqslant\widetilde{b}_M,$$

设
$$r=\max\{b_m, \widetilde{b}_m\},\quad R=\min\{b_M, \widetilde{b}_M\},$$
则得：
$$r\leqslant\lambda_1\leqslant R,$$
故当
$$r=\max\{b_m, \widetilde{b}_m\}\geqslant 1 时,$$
有
$$\rho(\mathbf{B}_1)>\rho(B)=\lambda_1\geqslant 1,$$
所以两迭代法发散。

定理5　设 B 为非正矩阵，如果 $\max\{b_m, \widetilde{b}_m\}\geqslant 1$，则两迭代法发散。

证明：由于 B 是非正矩阵，则 $-B$ 为非负矩阵，于是可知 B 有一负实特征值 $-\lambda_1$，$\lambda_1=\rho(B)$，且有：$b_m\leqslant\lambda_1\leqslant b_M$，

而对 B 的转是阵 B^T 讨论则有：

$$\widetilde{b}_m\leqslant\lambda_1\leqslant\widetilde{b}_M,$$

设
$$r=\max\{b_m, \widetilde{b}_m\},\quad R=\min\{b_M, \widetilde{b}_M\},$$
则得：
$$r\leqslant\lambda_1\leqslant R,$$
故当
$$r=\max\{b_m, \widetilde{b}_m\}\geqslant 1 时,$$
有
$$\rho(\mathbf{B}_1)>\rho(B)=\lambda_1\geqslant 1,$$
所以两迭代法发散。

§3. 数值例子

下面我们列举几个简单数值例子，以说明我们在 §2 中给出的判定定理的实用性。

例 1
$$B=\begin{pmatrix}0 & 0.2 & 0.8\\ 0.5 & 0 & 0.5\\ 0.3 & 0.5 & 0\end{pmatrix}.$$

显然，$\mu=1$，$\nu=1.3>1$，但对 $b_1=1$，$b_2=1$，都存在非零元素链：$\{b_{13}\}$，$\{b_{23}\}$，而 $b_3=0.8<1$，故由§2定理 1 得：两迭代法收敛。

例 2
$$B=\begin{pmatrix}0 & 0.5 & 1\\ 0.2 & 0 & 0.3\\ 0 & 0.6 & 0\end{pmatrix}.$$

很明显，$\mu=1.5>1$，$\nu=1.3>1$，但对于 $b_1=1.5>1$，有 $b_1\cdot b_2=1.5\times 0.5=0.75<1$，$b_1\cdot b_3=1.5\times 0.6=0.9<1$，故由§2定理 2 得：

两迭代法收敛。

例 3

$$B=\begin{pmatrix}0 & 0.5 & 0.7\\ 0.5 & 0 & 0.4\\ 0.1 & 0.6 & 0\end{pmatrix}.$$

显然，B为非负阵，$\mu=1.2>1$，$\nu=1.1>1$，且不满足§2定理 2（或推论 2）条件，但矩阵

$$C=\frac{1}{2}(B+B^*)=\begin{pmatrix}0 & 0.5 & 0.4\\ 0.5 & 0 & 0.5\\ 0.4 & 0.5 & 0\end{pmatrix},$$

对 $C_2=0.5+0.5=1$，有非零元素链 $\{C_{23}\}$，而 $C_3=0.9<1$，故由 §2 推论 4 得：两迭代法收敛。

例 4

$$B=\begin{pmatrix}0 & 0.6 & 0.5\\ 0.7 & 0 & 0.4\\ 0.2 & 0.8 & 0\end{pmatrix}.$$

显然，B为非负矩阵，而 $b_m=\min_k\{b_k\}=\min\{1.1,\ 1.1,\ 1\}=1$，而 $\widetilde{b_m}=\min_k\{\widetilde{b_k}\}=\min\{0.9,\ 1.4,\ 0.9\}=0.9$.

所以有：$r=\max\{b_m,\widetilde{b_m}\}=1$，

由§2定理 4 得：两迭代法发散.

吉林大学冯果忱教授对本文进行了热情指导和有益讨论，作者表示衷心感谢。

参 考 文 献

[1] 蒋尔雄，矩阵的第一种模为 1 的迭代收敛性定理，数学论文集，上海科技出版社，1962.

[2] 孙达传，线性代数方程组迭代收敛充分条件的改进，数学通报，1964年12月.

[3] James, K. R., Convergence of matrix iterations subject of diagonal dominance, SIAM. J. Numer. Anal., vol 10. №3, 1973.

[4] Varga,. R. S., Matrix iteration analysis, Prentice-Hall Inc., 1962.

[5] 高益明，矩阵广义对角占优和非奇的判定，(尚待发表).

On the Determination of Convergence of Jacobi's and Gauss—Seidel's Iteration Methods

By Gao Iming (高益明)

Abstract

This brief note gives several more general sufficient conditions for convergence of the well-known iteration methods mentioned in the title. Principal results are given by Theorems 1, 2 and 3.