Dirac 分布的幂*

陈庆益

（兰州大学）

（华中工学院）

摘　　要

本文结合发散积分的正则化方法及复阶导数概念，在基础空间 $D(R^n)$ 的某些子空间上，给出了 Dirac 分布的一些幂 $\delta^\alpha(x)$ 及 $\delta(x)\ln\delta(x)$ 的确定意义.

1. 引　　言

分布的线性理论已得到广泛的应用，并取得重大成就. 近年来由于物理学及技术科学的需要，分布的非线性理论已提上研究日程，例如见〔1,2〕；特别是Dirac 分布的幂及积 $\delta(x)\ln\delta(x)$，都须赋以确定的意义，并对之进行一些分析运算，例如积分，见〔3〕；粒子物理学中也讨论到方程

$$\psi''(x)-(k-\alpha\delta^m(x))\psi(x)=0,\quad \alpha,x\in R,\ m\in(0,\infty)$$

的固有值问题〔4〕. 至于量子力学中早已用到的关系式

$$\left.\begin{aligned}&(\delta)^2-\left(\frac{1}{\pi x}\right)^2=-\frac{1}{\pi^2x^2}\\&(\delta_\pm)^2=\frac{\mp\delta'}{4\pi i}-\frac{1}{4\pi^2x^2},\qquad \delta_\pm=\frac{1}{2}\left(\delta\pm\frac{1}{\pi i x}\right)\\&\delta\cdot\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}\delta'\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

则在五十年代中就有所论证〔5〕；也可见〔6〕.

众所周知，象 $\delta^2(x)$ 这类非线性运算，不可能在整个 $D(R^n)$ 上定义，例如见〔6〕，这里 $D(R^n)$ 是 R^n 中无穷可微而具紧支集的复值函数的空间. 但正如〔1〕中所指出的，它可在 $D(R^n)$ 的某些理想子环（线性子空间）上定义；但作用结果有某种不定性，见〔2,3,7〕，例如积

$$\delta^3(x)=A\delta+B\delta'+C\delta''$$

A,B,C 为任意实数.

本文结合分布的序列逼近途径及发散积分的正则化方法，并利用复阶导数概念，在 $D(R^n)$ 的某些理想子环上，得出幂 $\delta^\alpha\left(Re\alpha>\frac{1}{2}\right)$ 及积 $\delta\ln\delta$ 的确定定义，并可导出量子力学中用到的关系式（1.1）.

* 1981年4月2日收到.

2. Dirac 分布的幂

为简单起见，以下只对一维情形 $x\in R$ 进行讨论；多维情形完全类似。

作为 $Dirac$ 分布 $\delta(x)$ 的逼近列，取定

$$\delta_\varepsilon(x)=\frac{\varepsilon}{\pi}\Big/(x^2+\varepsilon^2),\qquad \varepsilon=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots \tag{2.1}$$

以后会看到这个列有某种典则性。

对任一固定复数 α，光滑函数 $f(x)$ 的 α 阶导数定义如下〔8〕：

$$D^\alpha f(x)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^x(x-t)^{\beta-1}f^{(\alpha+\beta)}(t)\,dt \tag{2.2}$$

这里 β 选得使 $\alpha+\beta$ 为非负整数，且使 $0<Re\beta\leqslant1$；a 为固定实数，可为 $-\infty$，视 f 是否具紧支集或是否急降而定。附带提到，[8]中本是对多元情形考虑函数的复阶导数的。

现在考虑 $\alpha\in R$ 且 $\alpha>1$ 的情形；$\alpha=1$ 是 $\delta(x)$ 的情形，不用讨论。先讨论 $\alpha\in(1,2)$ 的情形；$\alpha\geqslant2$的情形可以类推。对复的 $\alpha, Re\alpha\geqslant1$，讨论也是相同的。

对$\varphi\in D(R)$，先建立展式：

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(x)=\varphi(0)+D^\beta\varphi(0)x^\beta+A(x_0)x\\&0<|x_0|<|x|,\quad \beta=\alpha-1\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

这里 $A(x_0)$ 是与点 x_0 有关的常数。为建立（2.3），考虑在 $x=0$ 连续而当 $|x|>0$ 时可微的函数

$$f(x)=\varphi(x)-\varphi(0)-D^\beta\varphi(0)x^\beta$$

由通常的中值定理有：

$$f(x)=f(0)+f'(x_0)x,\quad 0<|x_0|<|x|$$

注意 $f(0)=0$，代入上式，即得（2.3）：

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\varphi(0)+D^\beta\varphi(0)x^\beta+[\varphi'(x_0)-D^\beta\varphi(0)\beta x_0^{\beta-1}]x\\&=\varphi(0)+D^\beta\varphi(0)x^\beta+A(x_0)x\end{aligned}$$

$A(x_0)$ 就由方括号中的量定义。

对 $D(R)$ 的理想子环

$$D_0(R)=\{\varphi(x)\in D(R):\ \varphi(0)=0\}$$

计算线性泛函值：

$$(\delta_\varepsilon^\alpha,\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon^\alpha}{(x^2+\varepsilon^2)^\alpha}\varphi(x)\,dx\ \underset{x=\varepsilon y}{=}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{(1+y^2)^2}\varphi(\varepsilon y)\,dy$$

对 $\varphi(\varepsilon y)$ 应用展式（2.3），并注意 $\varphi(0)=0$，$\beta=\alpha-1>0$，有：

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to0}\left(\delta_\varepsilon^\alpha,\varphi\right)&=\frac{1}{\pi}\lim\int\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{(1+y^2)^\alpha}\Big[D^\beta\varphi(0)\,\varepsilon^\beta y^\beta+A\varepsilon y\Big]dy\\&=\frac{1}{\pi}\lim\int\frac{1}{(1+y^2)^\alpha}\Big[D^\beta\varphi(0)y^\beta+A\varepsilon^{2-\alpha}y\Big]dy\end{aligned}$$

由于 $2\alpha-\beta=\alpha+1>1$ 及 $2\alpha-1>1$，上式中的积分关于参数 ε 为一致并绝对收敛的，故可在积分号内令 $\varepsilon\to0$而取极限。注意 $2-\alpha>0$，即得：

$$\left.\begin{array}{l}\left(\delta^{\alpha},\varphi\right)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\delta_{\varepsilon}^{\alpha},\varphi\right)=\dfrac{c}{\pi}D^{\beta}\varphi(0),\ \ \beta=\alpha-1\\ 1<\alpha<2,\ \ \varphi\in D_0(R),\ \ C=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y^{\beta}}{(1+y^2)^{\alpha}}dy\end{array}\right\}\tag{2.4}$$

一般，当 $k\leqslant\alpha<k+1$（k为正整数）时，由类似于(2.3)的展式

$$\varphi(x)=\varphi(0)+\varphi'(0)x+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}\varphi^{(k-1)}(0)x^k+D^{\beta}\varphi(0)x^{\beta}+A(x_0)x^{k+1}\tag{2.4}$$

$$k-1\leqslant\beta=\alpha-1<k,\ \ 0<|x_0|<|x|$$

（当 $\alpha=k$ 时，$\beta=k-1$，项 $D^{\beta}\varphi(0)x^{\beta}$ 重合于其前一项），在 $D(R)$ 的理想子环

$$D_{k-1}(R)=\{\varphi(x)\in D(R):\varphi(0)=\varphi'(0)=\cdots=\varphi^{(k-1)}(0)=0\}\tag{2.5}$$

上，仿照上面的讨论，可得

$$\left.\begin{array}{l}(\delta^{\alpha},\varphi)=C_{\alpha}D^{\beta}\varphi(0),\ \ \beta=\alpha-1,\ \ k\leqslant\alpha<k+1,\ \ \varphi\in D_{k-1}(R)\\ C_{\alpha}=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y^{\beta}}{(1+y^2)^{\alpha}}dy\end{array}\right\}\tag{2.6}$$

特别当 β 使 y^{β} 为奇函数时，$C_{\alpha}=0$，这时 $\delta^{\alpha}=0$

例如，$\alpha=2l$（l 为正整数）时，就有

$$\delta^{2l}=0\tag{2.7}$$

现在考虑$\dfrac{1}{2}<\alpha<1$的情形。由于

$$\left(\delta_{\varepsilon}^{\alpha},\varphi\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{(1+y^2)^{\alpha}}\varphi(\varepsilon y)dy,\ \ \varphi\in D(R)$$

注意 $2\alpha>1$，$1-\alpha>0$，令 $\varepsilon\to0$ 得 $(\delta_{\varepsilon}^{\alpha},\varphi)\to0$，即

$$\delta^{\alpha}=0,\ \ \frac{1}{2}<\alpha<1.$$

综合上述讨论，得如下结果。

定理2.1 当 $\dfrac{1}{2}<\alpha<1$ 时，

$$\delta^{\alpha}=0\ ;\tag{2.8}$$

当 $\alpha>1$ 时，$\delta^{\alpha}(x)$ 定义于 $D(R)$ 的线性子空间 $D_{[\alpha]-1}(R)$ 上，这里 $[\alpha]$ 为 α 的整数部分，并取如下的确定值：

$$\left.\begin{array}{l}(\delta^{\alpha},\varphi)=C_{\alpha}D^{\beta}\varphi(0),\ \ \beta=\alpha-1\\ C_{\alpha}=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y^{\beta}}{(1+y^2)^{\alpha}}dy\end{array}\right\}\tag{2.6}$$

特别当 y^{β} 为奇函数时，$\delta^{\alpha}=0$.

注 上面的方法不能处理 $0<\alpha\leqslant1/2$ 的情形。若能证当 $0\leqslant\alpha\leqslant1$ 时有

$$(\delta^{\alpha},\varphi)=C_{\alpha}I^{\beta}\varphi(0),\ \ \beta=1-\alpha,\ \ \varphi\in D(R)$$

可能是有意义的。这里 $I^{\beta}\varphi$ 为 φ 的分数阶积分：

$$I^{\beta}\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^x(x-t)^{\beta-1}\varphi(t)dt,\qquad 0\leqslant\beta\leqslant1\tag{2.9}$$

而 C_{α} 可能是常数

$$C_{\alpha}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{y^{\beta}(1+y^2)^{\alpha}},\ \ 0\leqslant\beta<1\tag{2.10}$$

注意幂 δ^{α} 是整体意义的，不能把 $\delta^{\alpha+\beta}$ 理解为 $\delta^{\alpha}\cdot\delta^{\beta}$。

3. 量子力学中的乘积

现在用上面得到的结果来推导关系式（1.1）。由于 $\delta^2(x)=0$，（1.1）中的第一式成立。附带提到，由于 δ^2 在 $D(R)$ 上一般无定义，故〔6〕中把（1.1）的第一式的左边作为一个整体来讨论，并区分 $\left(\frac{1}{x}\right)^2$ 与 $\frac{1}{x^2}$ 的意义。这当然是比较严谨的，但却是不大自然的。我们这里把那个式子的左、右边都作用于 $D_1(R)$ 上，因此不必作这种区分。

为核验（1.1）的第四式，在 $D(R)$ 的子空间 $D_0(R)$ 上考虑线性泛函值：

$$\left(\delta\cdot\frac{x}{x^2+\varepsilon^2},\varphi\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon x}{(x^2+\varepsilon^2)^2}\varphi(x)dx=\frac{1}{\pi}\int\frac{\varepsilon^{-1}y}{(1+y^2)^2}\varphi(\varepsilon y)dy$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\frac{\varepsilon^{-1}y}{(1+y^2)^2}\left[\varphi(0)+\varphi'(0)\varepsilon y+D^\beta\varphi(y_0)\varepsilon^\beta y^\beta\right]dy,\qquad 1<\beta<2,\ (x=\varepsilon y)$$

由于 $4-(1+\beta)>1$，上式中的积分对参数 ε 为一致并绝对收敛的；又因 $\varepsilon^{\beta-1}\to 0(\varepsilon\to 0)$，故得

$$\left(\delta\cdot\frac{1}{x},\varphi\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\delta_\varepsilon\cdot\frac{x}{x^2+\varepsilon^2},\varphi\right)=\frac{\varphi'(0)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y^2}{(1+y^2)^2}dy$$

$$=\frac{\varphi'(0)}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}\varphi'(0)=\frac{-1}{2}(\delta',\varphi),\qquad \varphi\in D_0(R)$$

这表明在 $D_0(R)$ 上确有

$$\delta\cdot\frac{1}{x}=\frac{-1}{2}\delta'$$

同样可得
$$\frac{1}{x}\cdot\delta=\frac{-1}{2}\delta'$$

（1.1）的中间二式容易由已得二式导出（在 $D_1(R)$ 上定义）：

$$\left(\delta\pm\right)^2=\frac{1}{4}\left(\delta\pm\frac{1}{\pi ix}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\delta^2\pm 2\delta\cdot\frac{1}{\pi ix}-\frac{1}{\pi^2x^2}\right)$$

$$=\frac{\mp\delta'}{4\pi i}-\frac{1}{4\pi^2x^2}$$

注 如果 δ 的逼近列不取为（2.1），而取

$$\delta_n=\frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{x}$$

或
$$\delta_n=\sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-nx^2}$$

则在（1.1）的第四式中右边的系数就不是 $\frac{-1}{2}$，而分别是

$$\frac{-1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y\sin y}{1+y^2}dy=\frac{-1}{2}e^{-1}$$

$$\frac{-1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y^2}{1+y^2}e^{-y^2}dy$$

因此，相当于量子力学中用到的关系式（1.1），δ 的逼近列（2.1）有一种典则性意义。

4. $\delta(x)\ln\delta(x)$的意义

〔3〕中为了考虑集中于某值而具概率p的讯息的熵，引进积

$$p\delta(x)\ln\delta(x) \tag{4.1}$$

及其积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\ln\delta(x)dx \tag{4.2}$$

而在计算中只取积分的有限部分，丢掉发散部分（4.2）。现在我们用前面的方法来处理（4.1）。为此在子空间$D_0(R)$上计算积分：

$$\begin{aligned}\left(\delta_\varepsilon\ln\delta_\varepsilon,\varphi\right)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\ln\frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}\varphi(x)dy\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+y^2}\ln\frac{(\pi\varepsilon)^{-1}}{1+y^2}\varphi(\varepsilon y)dy \qquad (x=\varepsilon y)\\&=\frac{1}{\pi}\int\frac{1}{1+y^2}\ln\frac{(\pi\varepsilon)^{-1}}{1+y^2}[\varphi(0)+D^\beta\varphi(0)\varepsilon^\beta y^\beta]dy,\quad 0<\beta<1,\ \varphi\in D_0(R)\end{aligned}$$

由于$\varepsilon^\beta\ln\varepsilon^{-1}\to0$ $(\varepsilon\to0)$，并注意当$0<\beta<1$时积分关于ε一致且绝对收敛，由上式令$\varepsilon\to0$取极限得：

$$(\delta\ln\delta,\varphi)=\lim_{\varepsilon\to0}(\delta_\varepsilon\ln\delta_\varepsilon,\varphi)=0 \qquad \varphi\in D_0(R)$$

即

$$\delta(x)\ln\delta(x)=0$$

随之（4.1）的积分（4.2）为0，这就比〔6〕中简单地丢掉它显得合理一些。

注 〔9〕中大概是用非标准分析的方法对δ的分数幂作了讨论。但我们未见到这篇文章，不知其详。显然，我们这里的方法十分初等、简单，而且结果十分明确。因此，本文的讨论有独立的意义，特别是涉及分数导数值的展式，更有自身的价值；此外，δ^α所作用的子空间$D_{k-1}(R)$，在量子场论中可能是对粒子的某种限制和描述。

参 考 文 献

〔1〕 Rosinger, E, Distributions and nonlinear partial differential equations, Springer-Verlag (1978) .3—20.

〔2〕 Güttinger, W., Generalized functions in elementary particle physics and passive system theory, SIAM J. Appl. Math. 15(1967) 964—1000.

〔3〕 Bremermann, H. J., Some remarks on analytic representations and products of distributions, Ibid. 924—943.

〔4〕 Amrein W. O., Georgescu V., Strong asymptotik completeness of wave operators for highly singular potentials, Helv. Phys. Acta 47(1974) 517—533.

〔5〕 Gomzález-Dominguez, A., Scarfiello, R. Nota sobre la formula v.p.$\frac{1}{x}\cdot\delta=\frac{-1}{2}\delta'$, Rev. de la Unión Mat. Argen 1(1956) 53—67.

〔6〕 Mikusiñshi, J., On the Square of the Dirac Delta-distribution, Bull. de L'Acap. Polon. des Sci., Ser. Math. 14(1966) 511—513.

〔7〕 Braunss, G., Liese R., Canonical products of distributions and causal solutions of nonlinear wave equations, J. Diff. Eq. 16(1974) 399—412.

〔8〕 Leray, J., Hyperbolic Differential Equations, Princeton (1955) 24—25.

〔9〕 Thurber, J. K., Katz J. Applications of fractional powers of delta-functions, in Victoria Symposium on Nonstandard Analysis, Lecture Notes in Math. Vol. 369, Springer-Verlag (1974)272—302.

Powers of Dirac Distribution

By Chen Chingyih (陈庆益)

Abstract

In this article we give some powers $\delta^{\alpha}(x)$, $\mathrm{Re}\,\alpha>\frac{1}{2}$, a definite meaning, using; the sequential approach of distributions; the regularization of divergent integrals and the idea of fractional derivatives, especially expansions containing fractional derivatives and powers (2.4). Our main result is the following

Theorem 2.1. For $\mathrm{Re}\,\alpha<\frac{1}{2}$ the power $\delta^{\alpha}(x)$ is well defined on the ideal subring

$$D_{k-1}(R)=\{\varphi(x)\in D(R):\ \varphi(0)=\varphi'(0)=\cdots=\varphi^{(k-1)}(0)=0\},\quad k=[\mathrm{Re}\,\alpha]$$

of the space D(R) of infinitely differentiable complex-valued functions with compact support in the following way

$$(\delta^{\alpha},\varphi)=C_{\alpha}D^{\beta}\varphi(0),\ \ \beta=\alpha-1,\ \ \mathrm{Re}\,\alpha\geqslant 1,\ \ \varphi\in D_{k-1}(R)$$

$$C_{\alpha}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y^{\beta}}{(1+y^{2})^{\alpha}}dy$$

$$\delta^{\alpha}=0,\qquad \frac{1}{2}<\mathrm{Re}\,\alpha<1;\ \ or\ \alpha=2k,\ \ k=1,2,\cdots.$$

If α is such that y^{β} is an odd function of y, then $C_{\alpha}=0$; hence $\delta^{\alpha}=0$.

Using this result, we can affirm relations(1.1) in quantum mechanics and give the δ-sequence(2.1) a canomical meaning.

We give the product $\delta(x)\ln\delta(x)$ a definite meaning too.

In higher dimensional case the discussion is similar. It would be interesting to prove

$$(\delta^{\alpha},\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{\Gamma(\beta)y^{\beta}(Hy^{2})^{\alpha}}I^{\beta}\varphi(0),\quad \beta=1-\alpha$$

in the case $0\leqslant\mathrm{Re}\,\alpha\leqslant 1$, where $I^{\beta}\varphi(x)$ is the fractional integral of φ.

More propably, the ideal subring $D_{k-1}(R)$, on which the power $\delta^{\alpha}(x)$ is applied, may be a restriction and description to elementary particles in quantum field theory.

It is emphasized that the power δ^{α} is an entity as a whole and that $\delta^{\alpha+\beta}\neq\delta^{\alpha}\cdot\delta^{\beta}$.