拓扑中分离公理的统一处理*

胡适耕

（华中工学院）

在[1]中，我们从泛拓扑概念出发，提出了拓扑中分离公理的一个一般模式，并给出了相应的非标准条件．本文完全采用经典观点对分离公理作出一个新的统一处理，建立了若干命题用以指明分离性质具有遗传性、可积性、商保持性以及拓扑空间到某个幂空间的可嵌入性的一般性条件；得到了联系分离性质与复盖性质的几个一般结果；指明了邻域分离性与函数分离性在本文的观点之下完全得到统一．

本文采用下述记号：$\mathbf{T}(\mathbf{F})$——开（闭)集族；$\mathbf{CO}=\mathbf{T}\cap\mathbf{F}$；$\mathbf{T}'(\mathbf{F}')$——正则开（闭）集族；$\mathbf{Z}(\mathbf{CZ})$——零(补零)集族；$\mathbf{C}(\mathbf{C}^*)$——紧(条件紧）集族；$\mathbf{P}$——幂集；$\mathbf{S}$——一个空间所有单点集之族；$\mathbf{N}(A)(A\neq\phi)$——集$A$的邻域滤子。对任何集族$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，约定$\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}=\{A\cap B\mid A\in\mathbf{A},\ B\in\mathbf{B}\}$，$\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$的意义可类似规定。其次，$\cap\mathbf{A}=\cap\{A\mid A\in\mathbf{A}\}$．我们总认定每个集族记号可一意地解释在任何拓扑空间中，当须特别指明所属的空间时，用空间本身作下标注出，例如$\mathbf{F}'_X$表示空间X中的正则闭集之族，$\mathbf{P}_X=2^X$，$\mathbf{S}_X=\{\{x\}\mid x\in X\}$，等等。如一般采用的，$C(X,Y)$表示从$X$到$Y$中的连续函数之全体，$C(X)=C(X,R)$，$C_I(X)=C(X,I)$，其中$R$是实直线，$I=[0,1]\subset R$．

若P是关于空间的某一拓扑性质，我们总认定P同时表示有该性质的空间类。这样，集论记号与逻辑记号将交替地使用．例如，空间X满足T_1与$X\in T_1$同义，$T_2\subset T_1$与$T_2\to T_1$同义．

§1. 分离公理

设$\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{U},\mathbf{V}$是四个可解释在任何拓扑空间中的集族符号，假定每个集族总包含空集ϕ．

1.1 定义　设X是任一拓扑空间．

1°　X满足分离公理$N(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{U},\mathbf{V})$，若对任何$A\in\mathbf{A}_X$，$B\in\mathbf{B}_X$，$A\cap B=\phi$，存在$U\in\mathbf{U}_X$，$V\in\mathbf{V}_X$，使得：$A\subset U^0$，$B\subset V^0$，$U\cap V=\phi$。换言之，集$A$，$B$可用$A$的$\mathbf{U}$—邻域与$B$的$\mathbf{V}$—邻域分离．当$\mathbf{U}=\mathbf{V}=\mathbf{T}$时，$N(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{U},\mathbf{V})$简记为$N(\mathbf{A},\mathbf{B})$．

2°　X满足分离公理$N(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{U},d)$，若对任何$A\in\mathbf{A}_X$，$B\in\mathbf{B}_X$，$A\cap B=\phi$，存在$U\in\mathbf{U}_X$，使得$A\subset U^0$且$U\cap B=\phi$．此处符号$d$并无实义，作此记法只是为了叙述某些命题时行文方便．

* 1981年3月6日收到．

3° X满足分离公理$N^*(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{U},\mathbf{V})$或弱—$N(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{U},\mathbf{V})$公理(此处允许以$d$代$\mathbf{V}$)，若在1°(2°)中，要求所取的集$A,B$是互相隔离的。

4° 称X满足分离公理$NP(\mathbf{A},\mathbf{A})$或完备(perfect)的$N(\mathbf{A},\mathbf{A})$公理，若$\mathbf{A}_X\subset\mathbf{Z}_X$。

各种具体的分离公理可作为定义1,1之特例列举如下：

1° $T_1=N(\mathbf{S},\mathbf{S},\mathbf{T},d)$.

2° $T_2=N(\mathbf{S},\mathbf{S})$.

3° $T_{5/2}=N(\mathbf{S},\mathbf{S},\mathbf{F},\mathbf{F})$.

4° $R^0=N(\mathbf{F},\mathbf{S},\mathbf{T},d)$.

5° 半正则性 (semi-regularity)：$SR=N(\mathbf{S},\mathbf{F},\mathbf{T}^r,d)$.

6° 几乎正则性 (almost-regularity)：$AR=N(\mathbf{S},\mathbf{F}^r)$.

7° 正则性：$R=N(\mathbf{S},\mathbf{F})$. $T_3=T_1\cap R$.

8° 全(comptele)T_2性：$CT_2=N(\mathbf{S},\mathbf{S},\mathbf{Z},\mathbf{Z})$.

9° 几乎全正则性：$ACR=N(\mathbf{S},\mathbf{F}^r,\mathbf{Z},\mathbf{Z})$.

10° 全正则性：$CR=N(\mathbf{S},\mathbf{F},\mathbf{Z},\mathbf{Z})$，$T_{3\frac{1}{2}}=T_1\cap CR$.

11° 弱正规性(mild normality)：$MN=N(\mathbf{F}^r,\mathbf{F}^r)$.

12° 几乎正规性：$AN=N(\mathbf{F},\mathbf{F}^r)$.

13° 正规性：$N=N(\mathbf{F},\mathbf{F})$，$T_4=T_1\cap N$.

14° 弱(weak)T_2性：$WT_2=N^*(\mathbf{S},\mathbf{S})$，弱$T_1(WT_1)$及弱正则($WR$)等仿此。

15° 全正规性(total normality)：$TN=N^*(\mathbf{P},\mathbf{P})$，$T_5=T_1\cap TN$.

16° 完(perfect)T_2性：$PT_2=PN(\mathbf{S},\mathbf{S})$，即$\mathbf{S}\subset\mathbf{Z}$.

17° 完弱正规性：$PMN=PN(\mathbf{F}^r,\mathbf{F}^r)$，即$\mathbf{F}^r\subset\mathbf{Z}$.

18° 完正规性：$PN=PN(\mathbf{F},\mathbf{F})$，即$\mathbf{F}=\mathbf{Z}$。$T_6=T_1\cap PN$.

19° 全隔离性 (total separatedness)：$TS=N(\mathbf{S},\mathbf{S},\mathbf{CO},\mathbf{CO})$.

20° 零维性：$Z=N(\mathbf{S},\mathbf{F},\mathbf{CO},\mathbf{CO})$.

21° 局部紧性(local compactness)：$LC=N(\mathbf{S},\mathbf{F},\mathbf{C}^*,d)$. 正则且局部紧：$R\cap LC=N(\mathbf{S},\mathbf{F},\mathbf{F}\cap\mathbf{C},d)$. 显然，局部连通与局部路连通亦可纳入上述模式，此处不再设立新的符号。

22° 分离条件$N(\mathbf{S},\mathbf{F},\mathbf{T},d)$与$N(\mathbf{Z},\mathbf{Z},\mathbf{Z},\mathbf{Z})$为任何拓扑空间$X$所满足，因此两者是开集公理的逻辑推论而并非新的公理。但写成这种形式的条件有其用处。我们将第二个证明一下。

设A，B是空间X中的不交零集，于是有$f,g\in C_I(X)$，使$A=f^{-1}(o)$，$B=g^{-1}(1)$。令$\varphi=f/f+g$，则$\varphi\in C(X)$，$\varphi(A)=0$，$\varphi(B)=1$，于是

$$A\subset X(\varphi<1/3)\subset X(\varphi\leqslant 1/3)=Z_1\in\mathbf{Z}_X.$$

$$B\subset X(\varphi>2/3)\subset X(\varphi\geqslant 2/3)=Z_2\in\mathbf{Z}_X.$$

Z_1,Z_2是分离A,B的$\mathbf{Z}$—邻域。

在考虑用适当的邻域U，V分离集对(A,B)时，总可排除A,B之一为空的情况，因我们已假定$\mathbf{U},\mathbf{V}$是含有空集的，当A,B之一为空集时，它们之能被分离是显然的。

下面建立若干命题，用以从集族之间的关系来指明各分离公理之间的比较关系。

1.2 定理 1° 若$\mathbf{A}\supset\mathbf{A}_1,\mathbf{B}\supset\mathbf{B}_1,\mathbf{U}\subset\mathbf{U}_1,\mathbf{V}\subset\mathbf{V}_1$.

则$N(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{U},\mathbf{V})\subset N(\mathbf{A}_1,\mathbf{B}_1,\mathbf{U}_1,\mathbf{V}_1)$，$N^*(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{U},\mathbf{V})\subset N^*(\mathbf{A}_1,\mathbf{B}_1,\mathbf{U}_1,\mathbf{V}_1)$.

2° $N(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{U},\mathbf{V})\subset N(\mathbf{A},\mathbf{B})$.

3° $N(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{U},\mathbf{V})\subset N^*(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{U},\mathbf{V})$，当 $\mathbf{A},\mathbf{B}\subset\mathbf{F}$时，$N(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{U},\mathbf{V})=N^*(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{U},\mathbf{V})$.

4° $PN(\mathbf{A},\mathbf{A})\subset N(\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{Z},\mathbf{Z})$.

5° $X\in N(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{Z},\mathbf{Z})\Longleftrightarrow$对任何$A\in\mathbf{A}$, $B\in\mathbf{B}$: $A\cap B=\phi$, A,B能被函数分离，即存在$f\in C_I(X)$: $f(A)=0$, $f(B)=1$.

证明 1°,2°,3°是显然的。今设空间X满足 $\mathbf{A}_X\subset\mathbf{Z}_X$，于是 $X\in N(\mathbf{Z},\mathbf{Z},\mathbf{Z},\mathbf{Z})\Rightarrow X\in N(\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{Z},\mathbf{Z})$，这样4°得证。用证明 $X\in N(\mathbf{Z},\mathbf{Z},\mathbf{Z},\mathbf{Z})$ 的方法即可证明5°.

利用以上结果可得出一系列具体推论，其主要者可举出如下：

推论 1° $PT_2\to CT_2\to T_{5/2}\to T_2\to T_1$

2° $CR\to R\to AR$, $N\to AN\to MN$

3° $T_1+WT_2=T_2$, $T_1+WR=T_3$

1.3定理 1° $N(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{F},\mathbf{F})\subset N(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{T}^r,\mathbf{T}^r)$

2° $N(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{CO},\mathbf{CO})=N(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{CO},d)\subset N(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{Z},\mathbf{Z})$

3° $N(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{Z},\mathbf{Z})\subset(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{CZ},\mathbf{CZ})$

4° $N(\mathbf{S},\mathbf{B},\mathbf{Z},\mathbf{Z})=N(\mathbf{S},\mathbf{B},\mathbf{CZ},\mathbf{CZ})=N(\mathbf{S},\mathbf{B},\mathbf{CZ},d)$

5° $N(\mathbf{A},\mathbf{F})=N(\mathbf{A},\mathbf{F},\mathbf{F},\mathbf{F})=N(\mathbf{A},\mathbf{F},\mathbf{F},d)=N(\mathbf{A},\mathbf{F},\mathbf{T}^r,\mathbf{T}^r)$.

证明 1° 若U,V是分离集A,B之闭邻域，则U^0,V^0是分离A,B之正则开邻域。

2° 从$\mathbf{CO}\subset\mathbf{Z}\cap\mathbf{CZ}$推出。

3° 设$f\in C(X)$. $A,B\subset X$, $f(A)=0$, $f(B)=1$，则

$A\subset X(f<1/2)=G_1, B\subset X(f>1/2)=G_2$

G_1,G_2是分离$A.B$之补零邻域。

4° 已有$N(\mathbf{S},\mathbf{B},\mathbf{Z},\mathbf{Z})\subset N(\mathbf{S},\mathbf{B},\mathbf{CZ},\mathbf{CZ})\subset N(\mathbf{S},\mathbf{B},\mathbf{CZ},d)$，今设$X\in N(\mathbf{S},\mathbf{B},\mathbf{CZ},d)$，要证者$X\in N(\mathbf{S},\mathbf{B},\mathbf{Z},\mathbf{Z})$。设 $x\in X$, $x\bar{\in}B\in\mathbf{B}$，取$U\in\mathbf{CZ}_X$: $x\in U\subset B^C$. 再取 $f\in C(X)$及实数c，使$U=X(f<c)$。于是有实数α，β：$f(x)<\alpha<\beta<c$. 令$V=X(f\leqslant\alpha)$, $W=X(f\geqslant\beta)$，则V,W是分离x与B的零集邻域，所要结论得证.

5° 任取$A\in\mathbf{A}_X$, $B\in\mathbf{F}_X$, $A\cap B=\phi$。若$X\in N(\mathbf{A},\mathbf{F})$，则$A,B$可由开集$V,U$分离。又取开集$W,W_1$分离$A$与$V^C$，则$\bar{W}$与$\bar{U}$是分离$A$，$B$之闭邻域。于是我们已有：

$N(\mathbf{A},\mathbf{F})\subset N(\mathbf{A},\mathbf{F},\mathbf{F},\mathbf{F})\subset N(\mathbf{A},\mathbf{F},\mathbf{F},d)\cap N(\mathbf{A},\mathbf{F},\mathbf{T}^r,\mathbf{T}^r)$。今设 $X\in N(\mathbf{A},\mathbf{F},\mathbf{F},d)$, $A\in\mathbf{A}_X$, $B\in\mathbf{F}_X$, $A\cap B=\phi$，则有A的闭邻域W: $W\cap B=\phi$，于是 W^0与W^C是分离A,B之开集。另一方面，$N(\mathbf{A},\mathbf{F},\mathbf{T}^r,\mathbf{T}^r)\subset N(\mathbf{A},\mathbf{F})$是显然的.

推论 1° $R=N(\mathbf{S},\mathbf{F},\mathbf{F},\mathbf{F})=N(\mathbf{S},\mathbf{F},\mathbf{T}^r,\mathbf{T}^r)\subset N(\mathbf{S},\mathbf{F},\mathbf{T}^r,d)=SR$; $R=N(\mathbf{S},\mathbf{F},\mathbf{F},d)\subset N(\mathbf{S},\mathbf{F},d,\mathbf{T})=R^0$, $T_3\subset T_{5/2}$.

2° $N=N(\mathbf{F},\mathbf{F},\mathbf{F},\mathbf{F})=N(\mathbf{F},\mathbf{F},\mathbf{F},d)=N(\mathbf{F},\mathbf{F},\mathbf{Z},\mathbf{Z})=N(\mathbf{F},\mathbf{F},\mathbf{CZ},\mathbf{CZ})=N(\mathbf{F},$

$\mathbf{F},\mathbf{Z},d$)(这里用了Urysohn定理)。

3° $CT_2=N(\mathbf{S},\mathbf{S},\mathbf{CZ},\mathbf{CZ})=N(\mathbf{S},\mathbf{S},\mathbf{CZ},d)$.

4° $ACR=N(\mathbf{S},\mathbf{F}^r,\mathbf{CZ},\mathbf{CZ})=N(\mathbf{S},\mathbf{F}^r,\mathbf{CZ},d)$.

5° $CR=N(\mathbf{S},\mathbf{F},\mathbf{CZ},\mathbf{CZ})=N(\mathbf{S},\mathbf{F},\mathbf{CZ},d)$.

6° $TS=N(\mathbf{S},\mathbf{S},\mathbf{CO},d)\subset N(\mathbf{S},\mathbf{S},\mathbf{Z},\mathbf{Z})=CT_2\subset T_{5/2}$.

7° $Z=N(\mathbf{S},\mathbf{F},\mathbf{CO},d)\subset N(\mathbf{S},\mathbf{F},\mathbf{Z},\mathbf{Z})=CR$.

1.4定理　$X\in N(\mathbf{A},\mathbf{F},\mathbf{U},d)\Longleftrightarrow\mathbf{A}_X$ 中每个非空集 A 有一个由 $\mathbf{U}_X$ 中的集组成的邻域基（省称为$\mathbf{U}$—邻域基）.

证明　设 $X\in N(\mathbf{A},\mathbf{F},\mathbf{U},d)$. $\emptyset\neq A\in\mathbf{A}_X$, 任取$A$的开邻域$V$, 有$A$的一个“$\mathbf{U}$—邻域” U, 即$A\subset U^0$, $U\in\mathbf{U}_X$, 使得 $U\cap V^C=\emptyset$, 即 $U\subset V$. 这说明A有一个$\mathbf{U}$—邻域基. 反之若 $A\in\mathbf{A}_X$有一个$\mathbf{U}$—邻域基, $B\in\mathbf{F}_X$, $A\cap B=\emptyset$, 则 B^C是A的开邻域, 于是存在A的$\mathbf{U}$—邻域 U: $U\subset B^C$, 即$U\cap B=\emptyset$.

以上两个定理合起来有下述推论:

论推　1° $X\in N(\mathbf{S},\mathbf{F},\mathbf{U},d)\Longleftrightarrow$ 每点 $x\in X$ 有一个$\mathbf{U}$—邻域基$\Longleftrightarrow$(在$\mathbf{U}\subset\mathbf{T}$之条件下) X有一个$\mathbf{U}$—拓扑基. 于是X是半正则的、全正则的、零维的及正则的分别等价于X中每点x有一个正则开的、补零的、开闭的及闭的邻域基; 前面三个又分别等价于空间X有一个正则开的、补零的及开闭的拓扑基.

2° X是（几乎）正规的$\Longleftrightarrow X$中每个（正则）闭集有一闭邻域基.

1.5定理　1° $X\in N(\mathbf{A},\mathbf{S},\mathbf{T},d)\Longleftrightarrow$对于$\mathbf{A}_X$中每个非空集$A$, $A=\cap\mathbf{N}(A)$.

2° $X\in N(\mathbf{S},\mathbf{B})\Longleftrightarrow$对于$\mathbf{B}$中每个非空集$B$, $B=Adh\mathbf{N}(B)=\cap\{\bar V\,|V\in\mathbf{N}(B)\}$.

证明　只须证2°. 因$x\in Adh\mathbf{N}(B)\Longleftrightarrow\emptyset\bar\in\mathbf{N}(x)\wedge\mathbf{N}(B)$.

故($\forall B\in\mathbf{B}_X,B\neq\emptyset$): $B=Adh\mathbf{N}(B)\Longleftrightarrow$若$\emptyset\neq B\in\mathbf{B}_X$, $\emptyset\bar\in\mathbf{N}(x)\wedge\mathbf{N}(B)$, 则$x\in B$, $\Longleftrightarrow$若 $\emptyset\neq B\in\mathbf{B}_X$, $x\bar\in B$, 则$\emptyset\in\mathbf{N}(x)\wedge\mathbf{N}(B)\Longleftrightarrow X\in N(\mathbf{S},\mathbf{B})$

推论　1° $X\in T_1(R^0)\Longleftrightarrow$: X中每个点(闭集)是其所有邻域之交.

2° $X\in T_2(R,AR)\Longleftrightarrow X$中每个点（闭集、正则闭集）是其所有闭邻域之交.

§2. 子空间，积空间与商空间

本节建立几个一般命题，用以指明分离公理具有遗传性，可积性与商保持性的条件.

2.1定理　设M是空间X之子空间.

1° 若 $\mathbf{A}_M\subset\mathbf{A}_X$, $\mathbf{B}_M\subset M\wedge\mathbf{B}_X$, $\mathbf{U}_M\supset M\wedge\mathbf{U}_X$, $\mathbf{V}_M\supset M\wedge\mathbf{V}_X$, 则 $X\in N(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{U},\mathbf{V},)\Rightarrow M\in N(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{U},\mathbf{V})$, 且当$\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$之一换成 d 时结论亦真.

2° 将1°中条件 $\mathbf{B}_M\subset M\wedge\mathbf{B}_X$改为 $\mathbf{B}_M\subset\mathbf{B}_X$, 其它条件不变, 则$X\in N^*(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{U},\mathbf{V})\Rightarrow M\in N^*(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{U},\mathbf{V})$且当$\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$之一换成 d 时结论亦真.

3° 若$\mathbf{A}_M\subset M\wedge\mathbf{A}_X$, 则$X\in PN(\mathbf{A},\mathbf{A})\Rightarrow M\in PN(\mathbf{A},\mathbf{A})$.

证明　1° 设 $X\in N(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{U},\mathbf{V})$, $A\in\mathbf{A}_M$, $B\in\mathbf{B}_M$, $A\cap B=\emptyset$. 于是 $A\in\mathbf{A}_X$, $B=M\cap B_1$, $B_1\in\mathbf{B}_X$, $\emptyset=A\cap B=A\cap M\cap B_1=A\cap B_1$. 取$U_1\in\mathbf{U}_X$, $V_1\in\mathbf{V}_X$: $U_1\cap V_1=\emptyset$, $A\subset U_1^0$,

$B_1 \subset V_1^0$，则 $U = M \cap U_1 \in \mathbf{U}_M$，$V = M \cap V_1 \in \mathbf{V}_M$，$A \subset M \cap U_1^0 \subset M \cap (M^C \cup U_1)^\circ = U^{0(M)}$，同理 $B \subset V^{0(M)}$。其次显然 $U \cap V = \varnothing$，于是 $M \in N(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{U}, \mathbf{V})$ 得证。

当 $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ 之一代以 d 时可类似证明。

2° 若 $A \in \mathbf{A}_M \subset \mathbf{A}_X$，$B \in \mathbf{B}_M \subset \mathbf{B}_X$，$A$，$B$ 在 M 中是隔离的，则在 X 中亦然。往下的证明与 1° 相同。

3° $X \in PN(\mathbf{A}, \mathbf{A}) \Rightarrow \mathbf{A}_X \subset \mathbf{Z}_X \Rightarrow \mathbf{A}_M \subset M \wedge \mathbf{A}_X \subset M \wedge \mathbf{Z}_X \subset \mathbf{Z}_M \Rightarrow M \in PN(\mathbf{A}, \mathbf{A})$。

推论　1° 以下性质是遗传的：T_1，弱 T_1，T_2，弱 T_2，全 T_2，完 T_2，$T_{5/2}$，R°，正则性，T_3，全正则性，$T_{3\frac{1}{2}}$，全正规完，完正规性，T_5，T_6，全隔离性，零维性等。

2° 几乎正则性、几乎全正则性、完备弱正规性是开遗传的；弱正则性与正规性、T_4 是闭遗传的；几乎正规性是开闭遗传的。

要从定理 2.1 推出以上结论，只须指明集族的以下性质：

$\mathbf{T}_M = M \wedge \mathbf{T}_X$，$\mathbf{F}_M = M \wedge \mathbf{F}_X$，$\mathbf{CO}_M \supset M \wedge \mathbf{CO}_X$，$\mathbf{Z}_M \supset M \wedge \mathbf{Z}_X$，$M \in \mathbf{F}_X \Rightarrow \mathbf{F}_M \subset \mathbf{F}_X$，$M \in \mathbf{T}_X \Rightarrow \mathbf{F}_M^\tau \subset M \wedge \mathbf{F}_X^\tau$。

2.2 定理　设 $X = \Pi_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ 是积空间，Λ 是任一非空集。P_λ：$X \to X_\lambda$ 是投影。对任何族 $\mathbf{U}$，$\mathbf{U}_{M\lambda}$ 缩写为 $\mathbf{U}_\lambda$。

1° 若 $\mathbf{U} \wedge \mathbf{U} \subset \mathbf{U}$，$\mathbf{V} \vee \mathbf{V} \subset \mathbf{V}$，且对每个 $\lambda \in \Lambda$，$P_\lambda^{-1} \mathbf{U}_\lambda \subset \mathbf{U}_X$，$P_\lambda^{-1} \mathbf{V}_\lambda \subset \mathbf{V}_X$，则

$\forall \lambda \in \Lambda$：$X_\lambda \in N(\mathbf{S}, \mathbf{B}, \mathbf{U}, \mathbf{V}) \Rightarrow X \in N(\mathbf{S}, \mathbf{B}, \mathbf{U}, \mathbf{V})$，其中 $\mathbf{B} = \mathbf{S}$ 或 $\mathbf{F}$。当 $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ 之一代以 d 时结论亦真。

2° 若对任何 $\{U_\lambda\}$：$U_\lambda \in \mathbf{U}_\lambda \Rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathbf{U}_X$，且除至多有限个 λ 外，$X_\lambda \in \mathbf{U}_\lambda$，则

$\forall \lambda \in \Lambda$：$X_\lambda \in N(\mathbf{S}, \mathbf{F}, \mathbf{U}, d) \Rightarrow X \in N(\mathbf{S}, \mathbf{F}, \mathbf{U}, d)$

证明　1° $\mathbf{B} = \mathbf{S}$ 的情形较简单，只考虑 $\mathbf{B} = \mathbf{F}_0$ 设 $x = (x_\lambda) \in X$，取 x 的邻域 $W = \bigcap_{i=1}^n P_{\lambda_i}^{-1} W_{\lambda_i}$，其中 $x_{\lambda_i} \in W_{\lambda_i} \in \mathbf{T}_{\lambda_i}$，$\{\lambda_1, \cdots \lambda_n\} \subset \Lambda$。对每个 λ_i，取 $U_{\lambda_i} \in \mathbf{U}_{\lambda_i}$，$x_{\lambda_i} \in U_{\lambda_i}^0$，$V_{\lambda_i} \in \mathbf{U}_{\lambda_i}$：$X_{\lambda_i} - W_{\lambda_i} = W_{\lambda_i}^c \subset V_{\lambda_i}^0$，$U_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_i} = \phi$。于是 $U = \bigcap_{i=1}^n P_{\lambda_i}^{-1} U_{\lambda_i} \in \mathbf{U}_X$，$V = \bigcup_{i=1}^n P_{\lambda_i}^{-1} V_{\lambda_i} \in \mathbf{V}_X$，$U \cap V \subset \bigcup_{i=1}^n P_{\lambda_i}^{-1}(V_{\lambda_i} \cap U_{\lambda_i}) = \phi$，$x \in \bigcap_{i=1}^n P_{\lambda_i}^{-1} U_{\lambda_i}^0 \subset \bigcap_{i=1}^n (P_{\lambda_i}^{-1} U_{\lambda_i})^0 = U^0$，同理可证 $X - W \subset V^0$，于是 $X \in N(\mathbf{S}, \mathbf{F}, \mathbf{U}, \mathbf{V})$ 得证。

2° 设 x 及其开邻域 W 与 1° 中取定的相同。可设使 $X_\lambda \in \mathbf{U}_\lambda$ 不成立的那些 λ 全包含在 $\{\lambda_1 \cdots \lambda_n\}$ 中（否则只须将 W 加以缩小）。对每个 λ_i，取 $U_{\lambda_i} \in \mathbf{U}_{\lambda_i}$，使 $x_{\lambda_i} \in U_{\lambda_i}^0 \subset U_{\lambda_i} \subset W_{\lambda_i}$。于是 $U = \left(\prod_{i=1}^n U_{\lambda_i}\right) \times \prod_{\lambda \neq \lambda_1 \cdots \lambda_n} X_\lambda \in \mathbf{U}_X$，且 $x \in U^0 \subset U \subset W$。此即表明 $X \in N(\mathbf{S}, \mathbf{F}, \mathbf{U}, d)$

推论　1° 以下拓扑性质是可积的：T_1，T_2，$T_{5/2}$，R^0，正则性，T_3，全 T_2，全正则性，$T_{3\frac{1}{2}}$，全隔离性，零维性。

2° 若每个 X_λ 是局部紧的、点紧的、正则且局部紧的、局部连通的、局部路连通的，且除至多有限个 λ 外，X_λ 是紧的、连通的、路连通的，则 $X = \Pi_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ 分别是局部紧的、点紧的、正则且局部紧的、局部连通的、局部路连通的。

要证实以上推论，只须指明：

1° $P_\lambda^{-1}\mathbf{U}_\lambda\subset\mathbf{U}_X$ 对于$\mathbf{U}=\mathbf{T},\mathbf{F},\mathbf{CO},\mathbf{Z}$成立。

2° $\mathbf{T},\mathbf{F},\mathbf{CO},\mathbf{Z}$,是有限可加且有限乘法性的。

3° 紧性、连通性与路连通性是任意可积的。

2.3 定理　设 f 是从 X 到 Y 上的连续闭映射，$f^{-1}\mathbf{A}_Y\subset\mathbf{A}_X$，$f^{-1}\mathbf{B}_Y\subset\mathbf{B}_X$，则

1° $X\in N(\mathbf{A},\mathbf{B})\Rightarrow Y\in N(\mathbf{A},\mathbf{B})$

2° $X\in N^*(\mathbf{A},\mathbf{B})\Rightarrow Y\in N^*(\mathbf{A},\mathbf{B})$。

证明　1° 设 $X\in N(\mathbf{A},\mathbf{B})$。任取 $A\in\mathbf{A}_Y$，$B\in\mathbf{B}_Y$，$A\cap B=\varnothing$，则$A_1=f^{-1}A\in\mathbf{A}_X$，$B_1=f^{-1}B\in\mathbf{B}_X$，$A_1\cap B_1=\varnothing$。取 X 中的开集 U_1,V_1 分离 A_1，B_1，令 $fU_1=U$，$fV_1=V$，则

$$A=fA_1\subset U\subset\overline{U}=f\overline{U}_1\subset fV_1^c\subset fB_1^c=ff^{-1}B^C=B^C$$

所以 $B\subset\overline{U}^C$。因 f 是闭映射，存在 A 的开邻域 W：$f^{-1}W\subset U_1$，于是 $A\subset W=ff^{-1}W\subset fU_1=U$，这说明 U 是 A 的邻域。因此 U 与 $\overline{U}^C$ 分离 A，B，$Y\in N(\mathbf{A},\mathbf{B})$ 得证。

2° 若 A，B 在 Y 中是隔离的，则 $f^{-1}A$ 与 $f^{-1}B$ 在 X 中是隔离的。往下的证明与1°相同。

推论　设 f 是从 X 到 Y 上之连续闭映射。

1。 X 是正规的（T_4的，全正规的，T_5 的）$\Rightarrow Y$ 亦是正规的（T_4的．全正规的、T_5的）

2° 若 f 同时又是正则映射（即 $f^{-1}\mathbf{F}_Y^r\subset\mathbf{F}_X^r$）则 X 是弱正规的、几乎正规的 $\Rightarrow Y$ 分别是弱正规的、几乎正规的。

有几个分离性质可以刻划为嵌入到某个幂空间的可能性。设 P 是一个遗传的且可积的分离性质（例如 T_0，T_1，T_2，全 T_2，$T_{5/2}$，R^0，正则性，T_3，全正则性，$T_{3\frac{1}{2}}$，全隔离性，零维性），则当空间 E 满足 P 时，E^α 的所有子空间满足 P，此处 α 是任何非 0 基数。若进而设 $1<wE\leqslant\omega$，（wE 表示空间 E 之拓扑势，下同）$\alpha\geqslant\omega$，则 $w(E^\alpha)=\alpha\cdot wE=\alpha$，因此 E^α 的任何子空间之拓朴势$\leqslant\alpha$。一个相反的问题是：是否每个拓扑势$\leqslant\alpha$ 的 P 空间必是某个 E^α 的子空间？下面给出一个一般命题。

2.4 定理　设集族$\mathbf{U}$有以下性质：存在实数集 Q，$\{0,1\}\subset Q\subset I=[0,1]$，对任何拓扑空间 X 及每个 $U\in\mathbf{U}_X$，有定义在 X 上而取值 Q 中的连续（上半连续）函数 f，使得 $U=Q(f<1)$，则

$$X\in T_0\cap N(\mathbf{S},\mathbf{F},\mathbf{U},d)\Rightarrow X\subset Q^\alpha$$

其中 $\alpha=wX$. Q 有通常拓扑(对上半连续的情况是上拓扑)，包含号$\subset$在嵌入的意义上理解。

注：实数集 R 中的上拓扑定义为族$\{(-\infty,a)\mid-\infty\leqslant a\leqslant\infty\}$。

证明　由定理条件得出 $\mathbf{U}\subset\mathbf{T}$。设 $X\in T_0\cap N(\mathbf{S},\mathbf{F},\mathbf{U},d)$，于是据定理1.4之推论1°，$X$ 有一个由$\mathbf{U}$—集组成的拓扑基．我们进而可取 $\mathbf{U}_1=\{U_\lambda\}\subset\mathbf{U}_X$，$\mathbf{U}_1$ 是 X 的一个拓扑基，且 $|\mathbf{U}_1|=wX$．对每个$U_\lambda\in\mathbf{U}_1$，取一个定理条件所述的函数f_λ，使得$U_\lambda=Q(f_\lambda<1)$，令 $F=\{f_\lambda\}$，于是 $|F|=wX$。今证 $X\subset Q^F$。设 e：$X\to Q^F$ 是赋值映射，即对每个 $x\in X$，$e(x)=(f_\lambda(x))\in Q^F$。$e$ 是单射：若 x，$y\in X,x\neq y$，由 $X\in T_0$，有 x，y 之一，比如 x 有一个邻域$U_\lambda,y\notin U_\lambda$，因此$f_\lambda(x)<1$，$f_\lambda(y)=1,e(x)\neq e(y)$．因每个 f_λ：$X\to Q$ 连续（f_λ 上半连续相当于依 Q 中的上拓扑连续！），故 e 是连续的．e 的逆（定义在$e(X)$上）亦是连续的：若 X 中的网$(x_\iota)_{\iota\in T}$不收敛于 x，则 (x_ι) 有一共尾子网$(x_{\iota'})$ 整个地在 x 的某个邻域 U_λ 之

外，这样在Q中（按通常拓扑或上拓扑）不能有$f_\lambda(x_t)\to f_\lambda(x)$。于是$X\simeq e(X)\subset Q^F$得证。

分别令$\mathbf{U}=\mathbf{T}$，$\mathbf{CZ}$、$\mathbf{CO}$及$Q=\{0,1\}$（按上拓扑，即Sierpinski空间），I，$\{0,1\}$（按通常拓扑），得到以下推论：

推论. $\{0,1\}^\alpha$，I^α，$\{0,1\}^\alpha$分别是拓扑势$\leqslant\alpha$的T_0空间类、$T_{3\frac{1}{2}}$空间类、零维空间类的万有空间，其中第一个幂空间的底空间$\{0,1\}$有上拓扑，后两个则用通常拓扑。

§3. 与复盖性质的联系

"紧集代点"原理可以概括在以下的一般命题中：

3.1 定理　若集族$\mathbf{U},\mathbf{V}$满足条件：$\mathbf{U}\vee\mathbf{V}\subset\mathbf{U}$，$\mathbf{V}\wedge\mathbf{V}\subset\mathbf{V}$，则

$N(\mathbf{S},\mathbf{B},\mathbf{U},\mathbf{V})=N(\mathbf{C},\mathbf{B},\mathbf{U},\mathbf{V})$

$N^*(\mathbf{S},\mathbf{B},\mathbf{U},\mathbf{V})=N^*(\mathbf{C},\mathbf{B},\mathbf{U},\mathbf{V})$.

当$\mathbf{V}$代以d时，结论亦真。

证明　因$\mathbf{S}\subset\mathbf{C}$，要证者只是$N(\mathbf{S},\mathbf{B},\mathbf{U},\mathbf{V})\subset N(\mathbf{C},\mathbf{B},\mathbf{U},\mathbf{V})$（第二式的证明是类似的）。设$X\in N(\mathbf{S},\mathbf{B},\mathbf{U},\mathbf{V})$，$A\in\mathbf{C}_X$，$B\in\mathbf{B}_X$，$A\cap B=\varnothing$，则对任何$a\in A$，有$U_a\in\mathbf{U}_X$，$V_a\in\mathbf{V}_X$：$a\in U_a^0$，$B\subset V_a^0$，$U_a\cap V_a=\varnothing$。因$\{U_a^0\}_{a\in A}$是紧集$A$之开复盖，故有$A$的有限子集$\{a_1,a_2\cdots a_n\}$，$A\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_{a_i}^0$。令$U=\bigcup_{i=1}^{n}U_{a_i}$，$V=\bigcap_{i=1}^{n}V_{a_i}$，则$U\in\mathbf{U}_X$，$V\in\mathbf{V}_X$，$U\cap V\subset\bigcup_{i=1}^{n}(U_{a_i}\cap V_{a_i})=\varnothing$，$A\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_{a_i}^0\subset\left(\bigcup_{i=1}^{n}U_{a_i}\right)^0=U^0$，$B\subset\bigcap_{i=1}^{n}V_{a_i}^0=V^0$。于是$X\in N(\mathbf{C},\mathbf{B},\mathbf{U},\mathbf{V})$得证。若用$d$代$\mathbf{V}$，上述证明只须稍加修改。

将$\mathbf{B},\mathbf{U},\mathbf{V}$代以各种特殊集族，并注意到在一个紧空间$X$中$\mathbf{F}_X\subset\mathbf{C}_X$，可得出一连串推论。

推论　1° $T_1=N(\mathbf{C},\mathbf{S},\mathbf{T},d)$，$C+T_1\to N(\mathbf{F},\mathbf{S},\mathbf{T},d)=R^0$。$C$表示紧性，下同

2° $WT_1=N^*(\mathbf{C},\mathbf{S},\mathbf{T},d)$，$C+WT_1\to WR^0$

3° $T_2=N(\mathbf{C},\mathbf{C})$，$C+T_2\to N(\mathbf{F},\mathbf{F})+T_2=T_4$

4° $WT_2=N^*(\mathbf{C},\mathbf{C})$　$C+WT_2\to N$（正规）

5° $T_{5/2}=N(\mathbf{C},\mathbf{C},\mathbf{F},\mathbf{F})$.

6°（几乎正则）$AR=N(\mathbf{C},\mathbf{F}')$，$C+AR\to N(\mathbf{F},\mathbf{F}')=AN$（几乎正规）

7°（正则）$R=N(\mathbf{C},\mathbf{F})$，$C+R\to N$

8°（弱正则）$WR=N^*(\mathbf{C},\mathbf{F})$，$C+WR\to N$

9° $N(\mathbf{S},\mathbf{B},\mathbf{Z},\mathbf{Z})=N(\mathbf{C},\mathbf{B},\mathbf{Z},\mathbf{Z})$，即点与"$\mathbf{B}$—集"可函数分离$\Leftarrow\Rightarrow$紧集与$\mathbf{B}$—集可函数分离。特别令$\mathbf{B}=\mathbf{S},\mathbf{F}',\mathbf{F}$，得到：空间$X$是全$T_2$的、几乎全正则的、全正则的分别等价于$X$中的紧集与紧集、紧集与正则闭集、紧集与闭集可函数分离。

10°（全隔离）$TS=N(\mathbf{C},\mathbf{C},\mathbf{CO},\mathbf{CO})$，$C+TS\to N(\mathbf{F},\mathbf{F},\mathbf{CO},\mathbf{CO})$（$\dim X=0$），特别，$C+TS\to N$（正规）.

11°（零维）$Z=N(\mathbf{C},\mathbf{F},\mathbf{CO},\mathbf{CO})$，$C+Z\to N(\mathbf{F},\mathbf{F},\mathbf{CO},\mathbf{CO})$.

12°（局部紧）$LC=N(\mathbf{C},\mathbf{F},\mathbf{C}^*,d)$

13° 任何空间X满足$N(\mathbf{C},\mathbf{F},\mathbf{T},d)$，即若紧集$A$不交于闭集$B$，则必有一含$A$的开集不交于$B$.

若空间X的一个复盖只含某个$\mathbf{A}$族中的集，则称为$\mathbf{A}$复盖．一个复盖的“$\mathbf{A}$—加细”可类似规定．某些分离公理可以保证空间的复盖有特定性质的加细．

3.2 定理 设$X\in N(\mathbf{A},\mathbf{F},\mathbf{U},d)$，$\mathbf{W}$是$X$的一个开复盖．若$\mathbf{W}$有一个$\mathbf{A}$—加细$\mathbf{A}'$，则$\mathbf{W}$必有一个$\mathbf{U}$—加细$\mathbf{U}'$；且当$\mathbf{A}'$是1—1加细时，可将$\mathbf{U}'$取为1—1加细．

证明 对每个$A_\lambda\in\mathbf{A}'$，取$W_\lambda\in\mathbf{W}$：$A_\lambda\subset W_\lambda$，因$W_\lambda$是$A_\lambda$之开邻域，故有$U_\lambda\in\mathbf{U}$：$A_\lambda\subset U_\lambda^\circ\subset U_\lambda\subset W_\lambda$，于是$\mathbf{U}'=\{U_\lambda\}$是$\mathbf{W}$的一个$\mathbf{U}$—加细．显然当$\mathbf{A}'$是1—1加细时，$\mathbf{U}'$可作成1—1加细．

推论 1° $X\in N(\mathbf{S},\mathbf{F},\mathbf{U},d)\Rightarrow X$的每个开复盖$\mathbf{W}$有一个$\mathbf{U}$—加细．

事实上，$\mathbf{S}_X$显然是$\mathbf{W}$的一个加细．分别令$\mathbf{U}=\mathbf{T}'$，$\mathbf{CZ}$，$\mathbf{C}^*$，$\mathbf{F}$，得到：半正则、全正则、局部紧、正则空间的每个开复盖分别有正则开的、补零的、条件紧的及闭的加细．

2° 正规空间的每个点有限开复盖有1—1的零集加细．

因为正规空间的每个点有限开复盖有1—1闭加细，而$N=N(\mathbf{F},\mathbf{F},\mathbf{Z},d)$，故定理3.2可用．

3.3 定理 若仿紧空间X满足分离公理$N(\mathbf{S},\mathbf{B})$，则$X\in N(\mathbf{F},\mathbf{B})$．$\mathbf{B}$是任何集族．

注．这与$C+N(\mathbf{S},\mathbf{B})\rightarrow N(\mathbf{F},\mathbf{B})$颇相类似．

证明 任取$A\in\mathbf{F}_X$，$B\in\mathbf{B}_X$：$A\cap B=\varnothing$．对每个$a\in A$，有a的开邻域U_a：$\overline{U}_a\subset B^c$．于是$\mathbf{U}=\{U_a\}_{a\in A}\cup\{A^C\}$是$X$的一个开复盖．设$\mathbf{V}$是$\mathbf{U}$的一个局部有限的开加细，则

$$A\subset W=\cup\{V\in\mathbf{V}\mid V\cap A\neq\varnothing\}\subset\overline{\cup\{V\in\mathbf{V}\mid V\cap A\neq\varnothing\}}=\cup\{\overline{V}\mid V\in\mathbf{V},\ \exists a\in A:\ V\subset U_a\}\subset B^C$$

于是W与$\overline{W}^C$是分离A，B之开集．

推论 正则仿紧空间是正规的；几乎正则仿紧空间是几乎正规的．

参考文献

[1] 胡适耕，分离公理的一般形式，华中工学院学报．第八卷第四期（1980）．
[2] Kelley, J. L., General Topology(1955).
[3] 永见启应，拓扑空间论，方嘉琳译（待出版）．
[4] Dugundji, J., Topology 1966.

A Unified Treatment of Separation Axioms in Topology

By Hu Shigeng (胡适耕)

Abstract

Various separation axioms with different separatedness are used in general topology. In This paper we give a general form of separation axioms and set up several theorems to unify various results about separation properties of topological spaces, in particular, in the view of this paper, two sorts of separatedness, separation by neighborhoods and separation by functions, are unified.