论 Gödel 不完备性定理*

徐利治　朱梧槚　　袁相碗　郑毓信

（吉林大学）　　（南京大学）

本文首先借用延伸、穷竭[6][7][8]的概念，界定了数学中的潜无限与实无限[9]，进而讨论了延伸变程的层次概念与穷竭原则的相对性。最后，借此分析了著名的Gödel不完备性定理的证明思想，指出了不完备性定理及其证明的实质性根据是：任何低一层次的无穷过程恒不能列举或判定相应的而又比它高一层次的无穷总体的全体元（这就是所谓“层次不可越原理”）。

本文的基本思想内容曾在大连工学院“数学方法论讲座”中报告过。

§1　数学中的潜无限与实无限

为揭示Gödel不完备性定理的实质并分析其证明思想，让我们明确定义一下数学中的潜无限与实无限概念。

如所知，在哲学上有所谓“假无穷”与“真无穷”、“消极无穷”与“完成无穷”之分。古典哲学家们对那种把无穷单纯地归结为同一物的不断重复的“假无穷”观点提出过各种批评。kant认为这种无限观是可怕的；Spinoza认为这只是一种想象的无限；Haller认为必须摆脱它们，即摆脱量的“无穷进展”这一切；Hegel则称之为“恶的无限性”[6][18]，科学哲学的经典作家恩格斯和列宁都对区分这两种无限的必然性给予肯定的回答[17]。

哲学上的这两种不同的无限性概念在数学中的具体表现就是“潜无限”和“实无限”，哲学上两种无限观的一系列争议在数学中的反映便是潜无限论者与实无限论者的论战史，Bourbabi在所著《集合论》一书中不仅简要地陈述了这一历史背景，还特别提到Gauss，Galois，Kronecder，Borel，Lebesgue，Weyl等皆反对实无限概念，以致实无限观点下的Cantor集论长期得不到承认．二十世纪初期，Hilbert发表了《论无限》这一专门研究数学基础的讲演[20]。Hilbert及其形式主义派是Cantor实无限观点的支持者．往后，潜无限与实无限的名词也就更为经常地出现于近代数理哲学的文章中，在此，我们将利用延伸、穷竭的概念对潜无限与实无限作一描述，借以明确其具体含义．

在参考文献[6][7][8]中引进并陈述了‘可延元素’、‘不变准则’、‘延伸规律’等定义及‘不断延伸’、‘相对穷竭’二原理，今在更一般的意义下重述这两个基本原理如下：

* 1980年11月27日收到．

不断延伸原理 设L是一个适用于某物θ的延伸规律，那么L就能相继而无限制地应用到θ的每个继元（或元列）上，只要当其产生的继元（或元列）恒为L所适用。

相对穷竭原理 设L是一个适用于某物θ的延伸规律，那么L必可应用到θ的一切能为L所适用的继元（或元列）上，从而导出并穷尽了所有能为L所适用的继元，而θ及其一切继元便形成一'穷竭过程'或'无穷总体'.

如此，我们给出：

定义1（潜无限） 凡由延伸原理所确定的那种'继元之不断被导出'的延伸性无限进程称为潜无限.

定义2（实无限） 凡在延伸原理所确定的某一延伸性进程的基础上，通过穷竭原则所界定的无限过程或无穷总体称为实无限.

这样，由于延伸不等于穷竭，潜无限就不等于实无限. 延伸与穷竭可以有不同内容或在不同基础上的延伸和穷竭，单纯着眼于无穷集合则只为其中一种特殊情形，从而潜无限与实无限也有各种不同基础上的潜无限与实无限. 潜无限即延伸性无限或不断扩展式的无限，实无限则是穷竭性无限，是完成了的无穷过程. 如果仅着眼于集合的情形，潜无限便是着眼于元素的渐变序列，实无限才是既经汇集成总体的无穷集合.

例1 在H_c原则[9]和仅由Peano继元公理下的自然数列1，2，3，…，n，…是潜无限，在H_W原则[9]并由Peano继元公理到归纳公理下形成的自然数列1，2，3，…，n，…便是实无限. 为把这两种自然数列区分出来，可把实无限的自然数列表示为

$\{1, 2, 3, \cdots, n, 000\}\equiv\{(1, 2, 3, \cdots n, 000, \omega))/\omega\}$，它表示自然数列的增长确实达到了超限数$\omega$并包括$\omega$在内之后再把$\omega$去掉，这种经过汇集其全体元而完成了的实无限的"全体自然数集"完全不同于仅由自然数的不断延伸而确定的渐变性'自然数列'.

例2 标准分析中关于无限大量的定义方式是大于任意给定的一个$N>0$，因此，它是一个仅由延伸手续所确定的潜无限. 但非标准算术模型$^*N$中的无限大数却由实无限定义方式给出的. 同样，ε—δ方式确定的无穷小量也是潜无限，而非标准域$^*R$中所定义的大于0而小于一切$\frac{1}{n}$的无穷小却是实无限.

§2 延伸变程的层次概念与穷竭原理的相对性

在本节中，我们首先要对'相对穷竭原理'的'相对'二字作出直观性的解释，然后通过具体实例的分析引出延伸变程和无穷总体的层次概念.

相对穷竭原理的'相对'二字的含义有两点；其一是任何一次穷竭原则的使用都必须是相对于某一具体的延伸性变程而言的，不存在没有延伸变程的穷竭过程. 其二是指在同一层次上的任何一次穷竭原则的使用，恒不能排斥在新的延伸变程基础上形成新的继元的延伸可能性，同时也恒不能排斥在较高层次上构成高一级的延伸变程（关于层次的概念见下文）.

如此，"不变准则"在穷竭原理作用下的"继元可导性的被否定"同样有它的相对性解释. 如所知，在参考文献[7]中是这样来定义"不变准则"这一量性概念的；'如果I是构

成继元之继续被导出的可能性的充分必要条件，则称 I 为不变准则’。例如：‘非空即取’、‘有限即延伸’、‘基数$\leqslant \aleph_0$时即延伸’等等，据不变准则 I 的定义可知“I 成立$\Leftarrow\Rightarrow$继元可导’或‘$\neg$I 成立$\Leftarrow\Rightarrow$继元不可导”。因之，随着不变准则这一思想规定在穷竭原则作用下被否定时，继元之继续被导出的可能性亦随之消失。但是，基于上述穷竭原则的相对性含义，此处所谓‘继元之可导性的消失或被否定’，同样只是相对于该不变准则 I 所从属的那个延伸规律和延伸变程而言的，并不涉及任何其它不同的或较高层次上的继元之继续可导性的肯定与否定。

参考文献[6][7]中曾以$L(I,E)$表示延伸规律，以$\overrightarrow{Proc}\{\theta|L(I)E)\}$和$\overset{\circ}{\overline{Proc}}\{\theta|L(I,E)\}$分别表示延伸变程与穷竭了的无穷总体，其中 I 表示不变准则，E 表刻划延伸规律的语句组。

今以一切小于ω^2的序数按其大小所排成的整序集$P(\omega^2)$为例，对以上的‘相对性’解释作出具体的分析讨论如下（参看下列表示形式）：

$$\underbrace{1,\ 2,\cdots n,\cdots,}_{\omega,}\ \underbrace{\omega,\omega+1,\cdots,\omega+n,\cdots,}_{\omega\cdot 2,}\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,\underbrace{\omega\cdot n,\ \omega\cdot n+1,\cdots,\omega\cdot n+n,}_{\omega\cdot n,}\cdots,\cdots,\ |\omega^2$$

现用$L(I,E)$表示下列有限句逻辑上无矛盾的语句所表达的一个延伸规律：(i)‘1’是开始元素。(ii) 若n是一有限序数，则规定其紧接继元为$n+1$。(iii) 凡延伸出来的每一继元n必为有限序数。

如此，$L(I,E)$亦可简单地表示为$L(n<\infty)$，其中所内含的不变准则 I 为‘有限序数即延伸’。于是$L(n<\infty)$在延伸原理作用下构成延伸变程$\overrightarrow{Proc}\{n|L(n<\infty)\}$，再在穷竭原理作用下形成“既过程化无穷总体”$\overset{\circ}{\overline{Proc}}\{n|L(n<\infty)\}$，即全体自然数序列入。今把以上表示方式相应地简记为：

$$\underbrace{I^{\omega}\left\{\begin{matrix}\text{有限序数}\\ \text{即延伸}\end{matrix}\right\}}_{\text{不变准则}};\ \underbrace{L(n>\infty)}_{\text{延伸规律}};\ \underbrace{\overrightarrow{P}(n|<\infty)}_{\text{延伸变程}};\ \underbrace{\overset{\circ}{\overline{P}}(n<|\infty)}_{\text{无穷总体}};\ \underbrace{\omega}_{\text{序型}}$$

类似地，对本例$P(\omega^2)$中之各个‘无穷总体’作出相应的陈述意义下的符号表达式如下：

$$I^{\omega\cdot 2}\left\{\begin{matrix}\omega\ \text{加}\\ \text{有限序数}\\ \text{即延伸}\end{matrix}\right\};\ L((\omega+n)<(\omega+\omega));\ \overrightarrow{P}(\omega+n|<\omega+\omega);\ \overset{\circ}{\overline{P}}(\omega+n|<\omega+\omega);$$

$$\omega\cdot 2,$$

$$I^{\omega\cdot 3}\left\{\begin{matrix}\omega\cdot 2\text{加}\\ \text{有限序数}\\ \text{即延伸}\end{matrix}\right\};L((\omega\cdot 2+n)<(\omega\cdot 2+\omega));\overrightarrow{P}(\omega\cdot 2+n|<\omega\cdot 2+\omega);\overset{\circ}{\overline{P}}(\omega\cdot 2+n|<\omega\cdot 2+\omega);$$

$$\omega\cdot 3,$$

$$\cdots,\ \cdots,\ \cdots,\ \cdots,$$

$$I^{\omega\cdot(n+1)}\left(\begin{matrix}\omega\cdot n\text{加}\\ \text{有限序数}\\ \text{即延伸}\end{matrix}\right);\ L((\omega\cdot n+n)<(\omega\cdot n+\omega));\ \overrightarrow{P}(\omega\cdot n+n|<\omega\cdot n+\omega);$$

$$\overset{\circ}{\overline{P}}(\omega\cdot n+n|<\omega\cdot n+\omega);\ \omega\cdot(n+1),$$

$$\cdots,\ \cdots,\ \cdots,\ \cdots,$$

综合分析一下上述每一延伸变程，它们的共同特点是其不变准则除了开始元素不同外，皆为“有限序数即延伸”。因此，其每一延伸变程中的任一继元 α 的紧接继元 $\alpha+1$ 的导出并不涉及任何形式的穷竭原则，实际上，$\alpha+1$ 仅由 α 按其延伸规律的延伸步骤延伸一步而导出。因此，给出如下的

定义3 如果在某一延伸变程中继元 α 的紧接继元的导出与穷竭原则无关，则称此延伸变程为第一层次的延伸变程。

据定义，任一第一层次的延伸变程的每一延伸步骤都不涉及或隐含穷竭原则的使用。例如上述 $P(\omega^2)$ 中的 $\overrightarrow{P}(n|<\infty)$，$\overrightarrow{P}(\omega+n|<\omega+\omega)$，$\overrightarrow{P}(\omega\cdot 2+n|<\omega\cdot 2+\omega)$，$\cdots$，$\overrightarrow{P}(\omega\cdot n+n|<\omega\cdot n+\omega)$，$\cdots$等等都是第一层次的延伸变程。

现用 $L(\omega\cdot n<\omega\cdot\omega)$ 表示下列有限句逻辑上无矛盾的语句所表达的一个延伸规律：（i）ω 是开始元素。（ii）若 $\omega\cdot n$ 是一序数，则规定其紧接继元为 $\omega\cdot(n+1)$。（iii）凡延伸出来的每一序数 $\omega\cdot n$ 必须小于序数 $\omega\cdot\omega=\omega^2$。

显然，$L(\omega\cdot n<\omega\cdot\omega)$ 内含的不变准则 I 为‘当且仅当 $n<\omega$ 时，$\omega\cdot n$ 即延伸’。如此，$L(\omega\cdot n<\omega\cdot\omega)$ 在延伸、穷竭二原则作用下便可形成延伸变程和无穷竭总体，即 $\overrightarrow{P}(\omega\cdot n|<\omega\cdot\omega)$ 程 $P(\omega\cdot n|<\omega\cdot\omega)$，其具体结构如下：

$$\omega,\ \omega\cdot 2,\ \omega\cdot 3,\cdots,\ \omega\cdot n,\ \cdots,\ |\omega\cdot\omega=\omega^2$$

注意，延伸变程 $\overrightarrow{P}(\omega\cdot n|<\omega\cdot\omega)$ 相应于上述 $P(\omega^2)$ 中的各个 $\overrightarrow{P}(n|<\infty)$，$\overrightarrow{P}(\omega+n|<\omega+\omega)$，$\overrightarrow{P}(\omega\cdot 2+n|<\omega\cdot 2+\omega)$，$\cdots$，$\overrightarrow{P}(\omega\cdot n+n|<\omega\cdot n+\omega)$，$\cdots$来说，它就不可能是一个第一层次的延伸变程了，因为它的任一继元紧接继元的导出都隐含了穷竭原则的使用，例如，由继元 $\omega\cdot n$ 到紧接继元 $\omega\cdot(n+1)$ 的过渡是通过穷竭原则作用于第一层次延伸变程 $\overrightarrow{P}(\omega\cdot n+n|<\omega\cdot n+\omega)$ 而实现的，即如，

$$\omega\cdot n,\ \omega\cdot n+1,\ \omega\cdot n+2,\ \cdots,\ \omega\cdot n+n,\ \cdots,\ |\omega\cdot n+\omega=\omega\cdot(n+1)$$

为此，我们给出：

定义4 如果某一延伸变程中每一继元 α 的紧接继元的导出都隐含了穷竭原则对某一第一层次延伸变程的作用的话，则称此延伸变程为相应于这些第一层次延伸变程的第二层次的延伸变程。简称第二层次延伸变程。

以此类推可定义第三、第四层次等等延伸变程。

由于第一层次的延伸变程可有它各种不同的具体内容，如上所述 $P(\omega^2)$ 中各个第一层次的延伸变程只是序数型的一种，我们也可任意构造如 $\overrightarrow{P}(2n+1|<\omega)$，$\overrightarrow{P}(2n|<\omega)$，

$\overrightarrow{P}(n^2|\omega)$ 等其它内容的第一层次延伸变程。随着第一层次延伸变程的具体内容不同，则相应于它们的第二层次延伸变程的内容也就不同。这叫做"层次相应性"在具体内容上的相对性。

另一方面，如果我们不考虑延伸变程的具体内容和层次关系的相应性，则层次的差别也是相对的，例如，我们可把上述 $P(\omega^2)$ 的一切元（亦即一切小于等于ω^2的序数）按照某种对角线方法重新排列，使之由对应规则φ与自然数序列N之元一一对应。(作法甚易，此处无需细述)。换言之，$P(\omega^2)$ 之每一元（序数$a=\varphi(n)$)可由φ确定地对应于一个自然数n，如此，我们又可把$P(\omega^2)$ 的一切元按自然数增长顺序构成一个第一层次延伸变程 $\overrightarrow{P}(a=\varphi(n)|n<\omega)$。甚至我们可把上述第二层次延伸变程$\overrightarrow{P}(\omega\cdot n|<\omega\cdot\omega)$ 中各个继元$\omega\cdot n(n=1,2,\cdots)$ 中的n干脆地看成是符号ω的一个足标，就象序列

$$\{\xi_n\}: \xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_n\cdots,$$

中每个ξ_n的n那样，从而人为地把$\overrightarrow{P}(\omega\cdot n|<\omega\cdot\omega)$ 规定为第一层次延伸变程。

但是，不论怎样的作法，它与给定第一层次延伸变程之后相应地构造出第二层次延伸变程一事无关，因为此时它已不再具有原来从$P(\omega^2)$ 的第一层次延伸变程来构造 $\overrightarrow{P}(\omega\cdot n|<\omega\cdot\omega)$ 的内容和含义了。实际上，这些人为的作法也无非是把某一第二层次延伸变程在人为规定的另一意义上当作第一层次延伸变程而已。因此，基于上述层次概念的'相应性'而言，延伸变程的层次差别是确定的。但在不考虑延伸变程的具体内容和层次关系的相应性前提下，延伸变程的层次差别是没有意义的。因此，我们是立足于层次关系的'相应性'来讨论延伸变程的层次关系的，亦就是说，我们立足于给定怎样的第一层次延伸变程，然后相应于这些第一层次延伸变程来构造相应于它们的第二层次延伸变程，而且第一层次延伸变程一经给定，我们能且只能构造出一个确定的相应于它们的第二层次延伸变程，这与人为地再把这个第二层次延伸变程改变为第一层次延伸变程无关。

为使今后的讨论便于陈述，再给出如下的

定义5　凡由穷竭原则作用于第n层次延伸变程而形成的无穷总体称为第n层次既过程化无穷总体，简称第n层次无穷总体。

如此，当$n=1$时叫做第一层次无穷总体，当$n=2$时叫做第二层次无穷总体。

借助于上例$P(\omega^2)$ 的分析并作推广后易见如下的结论为真。

结论［*］　任一第一层次的无穷总体 $\overline{P}^{\circ}(I)$ 的全体元恒不能穷尽相应于它们的第二层次无穷总体的一切元·亦即当$\overline{P}^{\circ}(\mathrm{II})$ 为相应于$\overline{P}^{\circ}(\mathrm{I})$ 一类第一层次无穷总体的第二层次无穷总体时，则必有 $*p\in\overline{P}^{\circ}(\mathrm{II})$而$*p\notin\overline{P}^{\circ}(\mathrm{I})$

例如上述$\overline{P}^{\circ}(\omega\cdot n|<\omega\cdot\omega)$ 的一切元不能为$\overline{P}^{\circ}(n|<\infty)$，$\overline{P}^{\circ}(\omega+n|<\omega+\omega)$，$\cdots$，$\overrightarrow{P}(\omega\cdot m+n|<\omega\cdot m+\omega)$，…中的任何一个无穷过程（总体）的全体元所能穷尽或列举。

最后，让我们再借助于上例$P(\omega^2)$ 的分析对前述穷竭原则的'相对性'作一具体说明，关于相对性直观解释中所指'不存在没有延伸变程的穷竭过程'这一点是自明的。至于在同

一层上任何一次穷竭原则的使用，恒不能排斥在新的延伸变程基础上形成新的继元的延伸可能性’这一点来说，有如$P(\omega^2)$ 中的$\vec{P}(n|<\omega)$ 使用穷竭原则后，继元n之可导性已经消失，但已引出飞跃继元ω，于是在新的延伸变程$\vec{P}(\omega+n|<\omega+\omega)$ 基础上又形成了新的继元‘$\omega+n$’的延伸可能性，以此类推地关于$P(\omega^2)$ 中之各个第一层次延伸变程的形成均属此列。又关于‘穷竭原则的使用也恒不能排斥在较高层次上构成高一级的延伸变程’这一点而言，有如$P(\omega^2)$ 中第一层次延伸变程一经给出，就不能斥在它们的基础上构造相应于它们的第二层次延伸变程$\vec{P}(\omega\cdot n|<\omega\cdot\omega)$，因此$\vec{P}(\omega\cdot n|<\omega\cdot\omega)$ 又在第二层次上给出于新的继元‘$\omega\cdot n$’的继续可导性。

§3 关于不完备性定理及其证明思想的分析

二十世纪初期的形式主义派（即以Hilbert为首的公理学派）曾希望把全部理论数学都纳入公理化形式的演绎体系中去。他们期望每一数学分支都能够在其相应的公理化形式系统中得到完备的描述，即能够在相应的形式化系统中证明每一条定理。国际数学界受到形式主义派的影响极大，而且在这种思潮的影响下，也确实完成了大量有意义的工作。但在本世纪三十年代初，Gödel 论证了形式数论(算术逻辑)的不完备性定理，这才打破了形式主义派的幻想。不完备性定理的精确叙述是：‘如果L是一个ω无矛盾的而且充足的算术逻辑，则在L内总可找到一个闭型公式A，在L内正命题A与否命题$\neg A$都不能判定’。这就是说，Gödel 证明了这样一个事实，即使把初等数论形式化之后，在这个形式的演绎系统中，也总可找出一个合理的命题来，这个合理的命题在该系统中却无法证明它为真，也无法证明它为假。

Gödel 不完备性定理原著发表于1931年Monats. Math. Phys.，38卷，p.173—198。后来一些学者又把他的证明几经改进，出现了不同形式的证明。我们认为，M. A. Arbib 所著《Brains, Machines, and Mathematics》一书第5章中所给的证明方法最能表现不完备性定理的内容实质。因此，我们就以此证明方法为基本依据着手分析。限于篇幅，不能重述定理的全部证明，只能请读者参阅该书内容细节。但为要分析对照，又必须把各个基本概念和关键步骤予以介绍，特别须把体现证明思想的一个重要引理和简证中的有关步骤一一写出，借以加深对分析的理解。

基本概念

(i) 一个程序称为“能行的”，如果有一个相应的图灵机存在去实现它的话。(图灵机是一种思想的计算机——穿孔带具有无限延长的自动机，这种无限延长是潜无限式的延长。)

(ii) 一个函数称为“递归的”，如果存在一个“能行程序”去计算它的话。

(iii) 设N为Cantor意义下的自然数集合，我们说S⊂N为“递归集”，如果有一个“能行程序”去判定每个$n\in N$是否为S的元素的话。

(iv) 一数集$M\subseteq N$称为"递归可数集"，如果存在一个能行程序能以产生它的每一元素的话。不失普遍性，可假定M的元素皆相异，因为凡重复出现者总可略去不计。

例如，平方数集

S：1，4，9，16，…，n^2，…

是递归集，因为$S\subset N$。并且任给$m\in N$，只要将m进行质因子分解后即可判定m是否属于S，此处N为自然数集，而任一自然数m的质因子分解手续是一种能在图灵机上实现的能行程序。按基本概念（iii）可知S是一个递归集。

其次，可证S是一个递归可数集，因为任给一个自然数，至多只要有限步便能把它的质因子分解完毕，从而至多只要有限步就能判定它是不是一个平方数，因此，我们从自然数1开始，经有限步判定$1\in S$，亦即经有限步手续产生了S的元1，继之再经有限步判定$2\notin S$、$3\notin S$而$4\in S$，因为有限步手续的有限步仍为有限步手续，因之，S之元4是有限步手续产生的。依此类推地，只须经有限步手续即可产生S的元9，16，25，…等等。而且假定n^2是经过有限步手续产生的，则对其后各自然数n^2+1，n^2+2，…依次进行质因子分解，至有限步后，可发现$n^2+2n+1=(n+1)^2$能分解为质因子平方之积，从而得知经有限步手续可产生S之元$(n+1)^2$，如此，按Cantor的推理原则，即存在一个"能行程序"得以产生平方数集S的每一元素，故S为递归可数集。

今设

S：s_1，s_2，s_3，…，s_n，…，

为任一递归可数集，则按递归可数集的定义，相应地便可引出一个生成诸s_n的延伸规律，记作$L(s_n\in S|n<\omega)$，从而在延伸原理作用下构成延伸变程$\overrightarrow{P}(s_n|n<\omega)$，再由穷竭原则的作用形成$S=\overline{P}^{\circ}(s_n|n<\omega)$。可证下述结论为真：

结论[*，*]　任一递归可数集总是第一层次无穷总体$\overline{P}^{\circ}(I)$。

事实上，生成任一递归可数集的延伸变程$\overrightarrow{P}(s_n|n<\omega)$必为第一层次的延伸变程，因为它的任一继元$s_i$过渡到它的紧接继元$s_{i+1}$并不涉及或隐含"穷竭原则"的使用，否则将与基本概念（iv）中要求至多有限步手续导出s_i的紧接继元s_{i+1}的规定相矛盾，亦即矛盾于存在一个"能行程序"得以产生S的每一元素的规定。

下述引理1和引理2为M. A. Arbib所著一书第一章的定理1.62及1.63。

引理1　一正整数集$S\subset N$为递归集的充要条件是S及其余集$\overline{S}=N\backslash S$皆为递归可数集。

下面的引理2是论证不完备性定理的基本依据，因此给出详细证明，以便对照分析其证明思想。

引理2　存在一个递归可数集Q，它的余集合$\overline{Q}=N\backslash Q$却为非递归可数集。

证明　因为递归可数集的全体为可数多个，设为S_1，S_2，S_3，…，S_n，…，将诸S_k之元排列为无穷矩阵：

$$S_1: n_{11},\ n_{12},\ n_{13},\ \cdots,\ n_{1n},\ \cdots,$$
$$S_2: n_{21},\ n_{22},\ n_{23},\ \cdots,\ n_{2n},\ \cdots,$$
$$S_3: n_{31},\ n_{32},\ n_{33},\ \cdots,\ n_{3n},\ \cdots,$$
$$\vdots\quad \vdots\quad \vdots\quad \vdots\qquad \vdots$$

采用对角线法，可将诸S_k中的元素，整个地排成一列，其中S_y内的第x号元素获得编码$\tau(y,x)$，今定义$Q=\{y|y\in S_y\}$，即当$y\in S_y$时，即从S_y内取出y而投入Q。因S_y是递归可数集，故当$y\in S_y$时，由基本概念(iv)，存在一'能行程序'产生y，故Q的每一元都有'能行程序'产生它，故由（iv）可知Q为递归可数集，从而Q的余集合

$$\overline{Q}=N\backslash Q=\{y|y\notin S_y\}$$

相异于每个S_y，事实上，当$y\in S_y$时，则$y\in Q$，故$y\notin\overline{Q}$，此时$\overline{Q}$异于S_y，又当$y\notin S_y$时，则$y\in\overline{Q}$，故$\overline{Q}$又异于S_y。因此，$\overline{Q}$与每个S_y相异，故$\overline{Q}$为非递归可数集。证毕。

（v） 凡由公理（即语句的递归集）和有限条推理规则作成的形式系统叫做“递归逻辑”。

(vi) 设L为一递归逻辑，Q为一正整数集，而'th(L)；W_n'表示W_n是L中的一个真定理，如果存在语句的递归可数集$\{W_0,\ W_1,\ W_2,\ \cdots\}$使有

$$Q\equiv\{n|\mathrm{th}(L)\text{：}W_n\}$$

则称L对Q是“半完备的”。

(vii) 如果L对Q及$\overline{Q}=N\backslash Q$同时为半完备的，则称$L$对$Q$是“完备的”。

由引理1及2可得下述推论：

推论1 若L对Q为半完备的，则Q为“递归可数”。

推论2 若Q为递归可数，但不是递归集，则$\overline{Q}$为非递归可数，从而任何L对Q皆不完备。

(Viii) 一个递归逻辑L，当它具备下列四种要素及条件时，即称为一个“算术逻辑”。(a) 合式公式（简记为wff）：凡L中的所有定理皆为wff。(b) 命题联结词$\sim$、$\supset$、$\wedge$、$\vee$、$=$，且当A、B为L中之wff时，则$\sim A$、$A\supset B$、$A\wedge B$、$A\vee B$、$A=B$等亦为L中之wff。(c) Frege氏量词；$(x_1)A$、$(\exists x_1)A$。(d) 整数，（注意数与数词须加区别，因在L中所出现的并非数之本身而是那些数的名字）。

(iX) ω无矛盾性：若在一个算术逻辑L中，不存在语句A致使th(L)：A与th(L)；$\sim A$皆成立，则称L为“无矛盾的”。如果不存在$wff\cdot W$致使诸定理th(L)：$W(m)$，$m=0,1,2,3,\cdots$，与th(L)：$\sim(x_i)W(x_i)$同时成立，则称L为“ω无矛盾的”。

(X) 充足性概念：一个算术逻辑L称之为“充足的”，要是对每一个递归可数集Q，总存在一个在L内完全可表的谓词$R(x,\ y)$，使得

$$Q\equiv\{x|\text{存在一个}y\text{使}R(x,\ y)\text{为真}\}.$$

(Xi) 完备性概念：如果对 L 内每个闭型合式公式 $cwffA$ 而言，'th(L)：A' 与 'th(L)：$\sim A$' 恰有一成立，则称 L 为"完备的"。

以下往证 Gödel 不完备性定理。

定理 每个充足的"ω无矛盾的算术逻辑" L 都是不完备的。

简证 为证本定理，只要指出在 L 内总可找出一个闭型合式公式 $cwffA$ 使得 th(L)：A 与 th(L)：$\sim A$ 两者皆不成立。据引理2，可选取 Q 为一递归可数集而 $\overline{Q}$ 却为非递归可数集。因 L 是充足的，故存在二元谓词 $R(x, y)$ 致使

$$Q \equiv \{x | \text{存在一个}\, y\, \text{使得} R(x, y\text{为真}\},$$

因 $R(x, y)$ 在 L 中完全可表，故在 L 内存在语句 $W(x^*, y^*)$ 致使

$$\text{th}(L):\ W(x^*, y^*) \Longleftrightarrow \text{当} R(x, y)\ \text{为真},$$
$$\text{th}(L):\ \sim W(x^*, y^*) \Longleftrightarrow \text{当} R(x, y\text{为假}.$$

由此，可将 Q 集表示为 $Q = \{x | th(L):\ U(x^*)\}$，其中 $U(x^*) \equiv (\exists x_2) W(x^*, x_2)$（$x_2$ 一般依赖于 x^*），验证时须用及 ω 无矛盾性。

如上可见，今已由条件 'th (L)：$U(x^*)$' 递归地确定了 Q 中之每一 x，今再考虑递归性条件（否定理）'th(L)：$\sim U(x^*)$' 所确定之集合。显见，由 'th(L)：$\sim U(n^*)$' 推出相应的 $n \in \overline{Q}$（否则矛盾）。因此，$\{x | \text{th}(L):\ \sim U(x^*)\} \subset \overline{Q}$ 而 $\{x | \text{th}(L): \sim U(x^*)\} \neq \overline{Q}$（否则 $\overline{Q}$ 亦将递归可数）。故 $\{x | \text{th}(L): \sim U(x^*)\}$ 为 $\overline{Q}$ 的一个真子集，因此，在 $\overline{Q}$ 内尚可找到其它的数 $n_0^* \in \overline{Q}$（而 $n_0^* \notin \{x | \text{th}(L):\ \sim U(x^*)\}$）致使 $\sim U(n_0^*)$ 与 $U(n_0^*)$ 在 L 内皆不能判定其为真。亦即 'th(L)：$\sim U(n_0^*)$' 与 'th(L)：$U(n_0^*)$' 两者皆不成立，由此证实了算术逻辑 L 的不完备性。证毕。

现对上述不完备性定理的证明思想作如下的剖析：

1. 由不完备性定理本身的证明过程可看出，其所以能论断 L 不完备，在于存在着不能判定的一对命题 '$\sim U(n_0^*)$' 与 '$U(n_0^*)$'，而此种不能判定的闭型合式公式 $cwff$ 之存在，乃是由于总可找到 $n_0^* \in \overline{Q}$ 所致，因此，归根到底在于非递归可数集 $\overline{Q}$ 的存在。

2. 由上可知论证不完备性定理的关键一步在于能作出非递归可数集 $\overline{Q}$，而 $\overline{Q}$ 的非递归可数性是由引理2保证的，从而引理2成为 Gödel 不完备性定理的中心支柱。

3. 在证明引理2时，曾采用了先构造递归可数集 Q，然后用取余集合的办法作出 $\overline{Q}$，这样一来，就掩盖了生成 $\overline{Q}$ 的真相。现在我们要从正面陈述生成非递归可数集

$$\overline{Q} = \{y | y \notin S_y\}$$

的全过程

如前所述，可将全体递归可数集 $S_1, S_2, \cdots$ 排列如下：

$$\underbrace{n_{11}, n_{12}, \cdots, n_{1n}, \cdots}_{S_1},\ \underbrace{n_{21}, n_{22}, \cdots, n_{2n}, \cdots}_{S_2}, \cdots,\ \underbrace{n_{n1}, n_{n2}, \cdots, n_{nn} \cdots}_{S_n}$$

不妨假设$\overline{Q}$已经作成，并将其一切元由小到大排列如下：

$$\overline{Q}: q_1, q_2, q_3 \cdots, q_n, \cdots,$$

然后再来分析$\overline{Q}$的每一元 q_i 是如何确定的. 其实际手续是首先考察递归可数集

$$S_1: n_{11}, n_{12}, n_{13}, \cdots, n_{1n}, \cdots,$$

从中确定 1 是不是$\overline{Q}$的元，如何确定法，只能在 S_1 的元素序列中由 n_{11} 起一个一个往下检查，如果发现 1 在 S_1 中，即 $1 \in S_1$，则$1 \in Q$，因而可确定$1 \notin \overline{Q}$（这时就丢弃 1，往下考察 S_2）. 但这只是一种可能的情形. 另一种可能的情形就是 $1 \notin S_1$，因而确定$1 \in \overline{Q}$（这时就有 $q_1 = 1$），但要断言 $1 \notin S_1$ 却不是有限步手续所能实现的，势必要把 S_1 的元素序列中之每一元逐一检查完毕之后才能作此断言，故在其中就已暗用了穷竭原则，亦即在不变准则 I 为‘凡 $n_{1n} \neq 1$ 即延伸’的基础上构造延伸规律 $L(n_{1n}|n_{1n(<\omega)} \neq 1)$，相应地得到延伸变程 $\overrightarrow{P}(n_{1n(<\omega)} \neq 1)$，再由穷竭原则作出$\overline{P}^{\circ}(n_{1n(<\omega)} \neq 1)$，如此才能确定 $1 \notin S_1$，即 $q_1 = 1$，$1 \in \overline{Q}$被确定.

类似地逐一讨论 S_2，$S_3, \cdots, S_n, \cdots$，只有这样才能把$\overline{Q}$的一切元逐一确定，所以，$\overline{Q}$的实际生成过程及其结构为

$$\underbrace{\overbrace{n_{q_11}, n_{q_12}, \cdots, n_{q_1n}, \cdots,}^{Sq_1}}_{q_1}, \quad \underbrace{\overbrace{n_{q_21}, n_{q_22}, \cdots, n_{q_2n}, \cdots, \cdots,}^{Sq_2}}_{q_2,} \cdots; \quad \underbrace{\overbrace{n_{q_n1}, n_{q_n2}, \cdots n_{q_n2}, \cdots,}^{Sq_n,}}_{q_n,} \cdots$$

其中 Sq_1，$Sq_2, \cdots$，$Sq_n, \cdots$，均为递归可数集，并且 $q_n \notin Sq_n$，我们在本节中已讨论并指出，任一递归可数集总是第一层次无穷总体（见结论[*,*]），故 $Sq_n = \overline{P}^{\circ}(I)$，相应地，生成它们的延伸变程亦均为第一层次的延伸变程. 但是，$\overline{Q} = \overline{P}^{\circ}(\mathrm{II})$，因为生成$\overline{Q}$的延伸变程 $\overrightarrow{P}(q_n|n<\omega)$ 是第二层次的延伸变程. 事实上，由上面的讨论可知其继元 q_n 过渡到它的紧接继元 q_{n+1} 隐含了穷竭原则对 $\overrightarrow{P}(q_n|n<\omega)$的使用，所以 $\overline{P}^{\circ}(q_n|n<\omega) = \overline{P}^{\circ}(\mathrm{II}) = \overline{Q}$.

4. 由 §2 的讨论已知

结论[*]　任一第一层次的无穷总体$\overline{P}^{\circ}(\mathrm{I})$的全体元恒不能穷尽相应于它们的第二层次无穷总体的一切元.

另一方面，又由 §3 的讨论已知

结论[*,*]　任一递归可数集总是第一层次无穷总体 $\overline{P}^{\circ}(\mathrm{I})$.

如此，由[*,*]可知任何递归性延伸变程必为第一层次延伸变程. 进而由[*]可知以第一层次的递归性延伸变程为基础作出之“算术逻辑” L（递归性形式算术），当然不能完备地（穷举）判定以第二层次延伸变程为基础作出之非递归可数集$\overline{Q} = \overline{P}^{\circ}(\mathrm{II})$ 中之全体元. 所以，不完备性定理及其证明思想的实际根据不过是：任何低一层次的无穷过程，恒不能穷尽或列举相应的而又比它高一层次的无穷过程所确定的无穷总体的一切元.

5. 因此，不完备性定理的实质是，那种必须由较高层次延伸变程与穷竭过程才能确定其全体元素的数集$\overline{Q}$，其全体元素不可能在仅由较低层次延伸变程与穷竭过程为基础的算术逻辑L内一一获得它的验证方式。详言之，在L内固然可由条件‘$th(L)$：$U(x^*)$’来递归地确定一层次无穷总体$Q=\overline{\overset{\circ}{P}}$（Ⅰ）中之每一元，但递归性条件‘$th(L)$：$\sim U(n^*)$’却至多只能递归地确定$Q$的余集合$\overline{Q}=N\backslash Q$（第二层次无穷总体$\vec{Q}=\overline{\overset{\circ}{P}}$（Ⅱ））中之部份元素（否则$\overline{Q}$亦为递归可数而能由第一层次无穷总体所界定），因之，总可找到$\overline{Q}$中之元$n_0^*\in\overline{Q}$致使‘$th(L)$：$U(n_0^*)$’与‘$th(L)$：$\sim U(n_0^*)$’同时不成立。亦即逻辑算术L是不完备的。

6. 综上所论，可知Gödel不完备性定理不过是如下所述的普遍原则在某种特别装配下的逻辑框架中所表现的一个特殊命题：

对于任意给定的一类“递归性”的第一层次无穷过程而言，恒可构造出相应于它们的第二层次无穷过程，其全体元不可能由那些为它所相应的任一第一层次“递归性”无穷过程一一列举或判定。这个原则可以叫作**“无穷过程的层次不可越原理”**。

参　考　文　献

[1] 莫绍揆，数理逻辑导论，(1965)，上海科学技术出版社.

[2] 莫绍揆，递归函数论，(1965)，上海科学技术出版社.

[3] Arbib, M. A, 《Brains, Machines, and Mathematics》, 1964, U.S.A.

[4] 徐利治，任意贯数极限元素的理论，清华大学理科报告，5(1950) 第四期，428—440页.

[5] 徐利治，关于Cantor超穷数论上几个基本问题的定性分析和连续统假设的‘不可确定性’的研究，东北人民大学自然科学学报，(1956)，第一期，67—103页.

[6] 徐利治、朱梧槚，论超穷过程论中的两个基本原理与Hegel的消极无限批判，东北人民大学自然科学学报，(1956)，第二期，111—121页.

[7] 徐利治、朱梧槚，超穷过程论的基本原理，东北人民大学自然科学学报，(1957)，第一期，41—45页.

[8] 徐利治、朱梧槚，在‘素朴集论’与‘超穷过程论’观点下的Cantor连续统假设的不可确定性，东北人民大学自然科学学报，(1957)，第一期，53—60页.

[9] 朱梧槚，潜尾数论导引，辽宁师院学报自然科学版，1979，第三期，1—9页.

[10] 朱梧槚，论一维空间的超穷分割，辽宁师院学报自然科学版，(1979) 第四期，7—13页.

[11] 朱梧槚、袁相碗、郑毓信，论集合与点集空间，南京大学学报自然科学版，(1980)，第三期，129—136.

[12] 谢邦杰，超穷数与超穷论法，(1979)，吉林人民出版社.

[13] Kleene, S.C., Introduction to Metamathematics, (1952), U.S.A.

[14] Gödel K., Monats, Math. Phys, 38(1631), 173—198.

[15] Poincaré H., Rev. de metaphys., et de mor(1906) 294—317.

[16] Robinson A., Non-Standard analysis, studies in logic and the foundations of mathematics, Amsterdam(1966).

[17] Ленин, B.И. 黑格尔逻辑学一书摘要，解放社，(1950)，曹葆华译.
[18] Hegel, G. W. F. 黑格尔的小逻辑，商务印书馆，(1950)，贺麟译.
[19] Poincaré, H. 科学与假设，商务印书馆，(1962)，叶蕴理译.
[20] 吴咸，怎样认识极限，自然辩证法杂志，(1974)，第3期，35—54页.

On Godel's Imcompleteness Theorem

By Hsu L. C. (徐利治), *Chu W. J.* (朱梧槚),
Yuan S. W. (袁湘碗), *Tseng Y. S.* (郑毓信)

Abstract

The object of this expository paper is to disclose the real essential idea involved in Gödel's imcompleteness theorem through a detailed analysis of the proof presented in Arbib's booklet. In §1 very extensive definitions have been given of the potential infinite and the real infinite, respectively. In §2 the general concept concerning types of infinite extension processes as well as the principle of relatively complete exhaustion have been expounded. In §3 a deeper analysis has been made of the well-known proof for Gödel's imcompleteness theorem, thus leading to the conclusion that Gödel's theorem is actually implied by the most general principle that any infinite process of lower type cannot exhaust and exhibit the whole content of the corresponding process with relatively higher type, where the words "exhaust" and "exhibit" may be given precise meanings in certain special cases including the case for Gödel's arithmetic logic.