线性偏微分方程一般理论概况评述*

陈庆益

（兰州大学）

自从四十年代末分布理论及其富氏变换建立以后，几年之内，一般常系数偏微分方程的研究已得到相当完善的结果。例如常系数方程及方程组在分布空间的局部可解性，解的亚椭圆性，解的结构与逼近，甚至适定定解问题的抽象存在性，都取得满意的成就。尤其在全局可解性方面，更得到十分深刻的结果：方程 $P(D)u=f$ 在 $D_F'(\Omega)$ 中全局可解的充要条件是 Ω 具 P 凸性，即对每个紧子集 $K\subset\Omega$ 存在紧子集 $K'\subset\Omega$ 使

$$\operatorname{supp}P(-D)\varphi\subset K\Rightarrow\operatorname{supp}\varphi\subset K',\quad\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$$

这里 $\operatorname{supp}\varphi=\underset{\Omega}{closure}\{x:x\in\Omega,\ \varphi(x)\neq0\}$，$D_F'(\Omega)$ 为 Ω 中有限阶分布空间；方程 $Pu=f$ 在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中全局可解的充要条件是 Ω 具 P 强凸性，即除具上述 P 凸性外，还具性质：对每个紧集 $K\subset\Omega$，存在紧集 $K''\subset\Omega$，使

$$\operatorname{singsupp}P(-D)v\subset K\Rightarrow\operatorname{singsupp}v\subset K'',\quad\forall v\in\mathscr{E}'(\Omega)$$

这里 $\operatorname{singsupp}v=\{x:x\in\Omega,\ x$ 不具邻域使 v 为零分布$\}$。关于域 Ω 的 P 凸性，还证得如下的深刻结果：

定理 域 Ω 关于任一常系数算子 $P(D)$ 为 P 凸的充要条件是 Ω 为凸集；算子 P 使任一域 Ω 为 P 凸的充要条件是 $P(D)$ 为椭圆算子。

关于上述，可参看 Hörmander《线性偏微分算子》一书。还可提到，若在 *Sato* 的超函数类中考虑，则 $P(D)u=f$ 的全局可解性对任何域 Ω 都成立，见 R.Harvey, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 55(1966)1042—1046。

至于变系数方程，情况就复杂多了，所得结果也差得多了。尽管如此，由于六十年代中期及末期出现的拟微分算子及 Fourier 积分算子理论，也得到不少可观的成就。这正是本文所要介绍的。下面分三个方面来说。

（一）线性变系数方程的性质有待发掘。

变系数线性偏微分方程不仅比常微分方程复杂得多，也比常系数偏微分方程“奇怪”得多。下面的三种现象足以说明问题。

1. *无解方程的存在*

大家知道：即令是非线性的常微分方程及方程组 $y'=f(x,y)$，当 $f\in C(R^2)$ 时，总局

* 1981年1月30日收到。

部可解；任一常系数偏微分方程 $P(D)u=f$ 当 $f\in\mathscr{D}'$ 时也在 $\mathscr{D}'$ 中局部可解。但 H. Lewy 于1957年第一次公布了在 R^3 的任一开集中对许多 f （无穷可微而非解析）都无古典解(甚至分布解）存在的方程

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}+i\frac{\partial u}{\partial x_2}-2i(x_1+ix_2)\frac{\partial u}{\partial x_3}=f$$

这个例子使变系数线性偏微分方程的研究开辟了多方面的途径，可说是一个重大发现。

另一个重要例子是 Mizohata 举出的：

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}+ix_1^k\frac{\partial u}{\partial x_2}=f$$

当 k 为奇数时，它在 $x_1=0$ 近旁一般无解。见 J. Math. Kyoto Univ. 1(1962)271—302。

2. 离散现象的出现

B. B. Грушин (Мат. сб. 84(1971)111—134) 发现方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\lambda^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\lambda\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

当 λ 为奇数时不具亚椭圆性，而对其它 λ 值则有亚椭圆性。即这个方程的每个分布解实际上是无穷可微的。F. Treves (*Proc. Amer. Math. Soc.* 46(1974)229—223) 也发现类似情况： 初值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\lambda^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\lambda\frac{\partial u}{\partial t}=0,\quad u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x)$$

当 λ 为奇数时解不具唯一性，而对其它 λ 值则有唯一性。这个方面的一般性结果还未见到。注意上面两个方程的特征重数都是变的：当 $x\neq 0$ 时具单特征，而当 $x=0$ 时则变为具二重特征。

3. 边界条件个数的相对性

谷超豪在自然杂志二卷三期（1979）中指出：m 阶方程随低阶项的选择及定解域的不同，边界条件的个数可从 0 到 m，而具相对性。

上述例子足以说明：我们对变系数偏微分方程性质的认识还很不够，还有待发掘。

（二）关于一般理论的研究工具

早在二十年末就已开始的 Hilbert 空间方法及 Banach 空间方法，曾对偏微分方程起过巨大推进作用，并还在有效的应用中。它们还适用于非线性方程，但却局限于定型情形，要求一定的正定性，而不适用于任意的、一般的偏微分方程。分布理论及其 Fourier 变换方法则恰恰相反，适用于一般的非定型的偏微分算子，但却局限于线性方程甚至常系数情形。但六十年代中期及末期建立的拟微分算子及 Fourier 积分算子方法，正好突破了这种局限性，大大地促进了变系数方程的研究并开始应用于非线性方程，见 *Acta Math.* 127(1971)79—183；128(1972)183—269；В. П. Маслов, *Кампл. метод ВКБ в нелин. ур.*, 1977。

Fourier 积分算子 $A:\mathscr{E}'(Y)\to\mathscr{D}'(X)$ 是如下定义的算子：

$$Au(x)=\iint e^{i\varphi(x,y,\theta)}a(x,y,\theta)u(y)dyd\theta,\quad u\in C_0^\infty(Y),x\in X,\theta\in R^N$$

$X\subset R^{n_1}$，$Y\subset R^{n_2}$，都是开集，位相 $\varphi\in C^\infty(X\times Y\times(R^N\setminus 0))$，取实值，对 θ 为正齐一次，即 $\varphi(x,y,t\theta)=t\varphi(x,y,\theta)$，$t\geqslant 0$，对固定的 λ（或 y）无 $\theta\neq 0$ 的驻点 (y,θ)（或 (x,θ)，$\theta\neq 0$）；振幅 $a\in S^m_{\rho,\delta}(X\times Y\times R^N)$，$0\leqslant\rho$，$\delta\leqslant 1$，$m\in R$，即

$|D_\theta^\alpha D_{x,y}^\beta a|\leqslant C_{\alpha,\beta,k}(1+|\theta|)^{m-\rho|\alpha|+|\beta|\delta}, x\in K'$，$y\in K''$，$\theta\in R^N,\forall\alpha,\beta$，其中 $K=K'\times K''$，K' 和 K'' 分别为 X 和 Y 中任意紧集．m 称为算子 A 的阶．特别当 $n_1=n_2=N=n$，$X=Y$，$\varphi=\langle x-y,\theta\rangle$ 时，A 称为拟微分算子，记作 $A\in L^m_{\rho,\delta}(X)$；这时若 $a(x,y,\theta)$ 关于 θ 为多项式，拟微分算子即归为变系数偏微分算子．特别若 $a=a(x,\theta)$，即 a 与 y 无关时，a 称为 A 的符征 (Symbol)．一般，如果 $|a(x,y,\theta)|>c|\xi|^m$，$c>0$，相应的 Fourier 积分算子称为椭圆型算子．可证这种算子总有局部的逆算子．

利用 $1-m$ 阶的椭圆型算子，例如对应于符征 $(1+|\xi|^2)^{\frac{1-m}{2}}$ 的拟微分算子，可化任一 m 阶拟微分算子为一阶算子．类似地可化各种类型的算子为某些标准形．例如对具非对合主符征 p_m 的拟微分算子，即当 A 的符征中齐 m 次的项 p_m 具性质

$$p_m(x,\xi)=0\not\Rightarrow\{R_ep_m,\ I_mp_m\}=0,\quad x\in X,\quad \xi\in R^n\setminus 0$$

时，对任一点 $(x_0,\xi_0)\in R^n\times(R^n\setminus 0)$，存在椭圆型 *Fourier* 积分算子 F 及其局部的逆 F^{-1}，使

$$FAF^{-1}\sim A'\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+ix_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right)A''\quad \mathrm{mod}\,L^{-\infty}$$

A' 和 A'' 都是椭圆型 *Fourier* 积分算子，$L^{-\infty}$ 是符征属 $S^{-\infty}_{\rho,\delta}$ 的算子类，$\{f,g\}$ 为 *Poisson* 括号：

$$\{f,g\}\equiv\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial\xi_j}\frac{\partial g}{\partial x_j}-\frac{\partial g}{\partial\xi_j}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

关于具二重特征情形化为标准形的讨论，参看 J. *Diff. Eq.* 31(1979)165—182. 高重特征情形尚待探索．

拌随 *Fourier* 积分算子的全局确定，涉及上同调类、辛几何以及 *Lagrange* 流形的讨论．详见 J. J. Duistermaat, *Fowrier Integral Operators*. 1973；J. Leray, *Solutions asymptotiques et groupe symplectique*, 1975；*Analyse Lagrangienne et mecamique quantique* 1978.

还可提到，由分布理论推进的局部凸空间理论，近年来也得到多方面的应用，包括理论物理方面的应用．见 YMH, 34：4(1979)97—132.

（三）一般理论的几个主要问题

1．解的存在性问题

对于变系数偏微分算子，主型情形即具性质

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial P_m(x,\xi)}{\partial \xi_i}\right|^2 \equiv |grad_\xi P_m|^2 \neq 0,\ x\in\Omega,\ \xi\in R^n\setminus 0$$

的情形已得到彻底解决，这里$P_m(x,D)$为算子$P(x,D)$的主部，即齐m阶的部分。Nirenberg和Treves(Comm. Pure Appl. Math. 23(1970)1—38, 459—509; 24(1971)279—288)在主部具解析系数情形得出局部可解性的充要条件为：($\mathscr{P}$) $B=I_m P(x,\xi)$沿$A=R_e P_m$的零次特征线不变号。这里A的零次特征线是如下常微分方程组

$$\frac{dx_j}{dt}=\frac{\partial A}{\partial \xi_j},\qquad \frac{d\xi_j}{dt}=-\frac{\partial A}{\partial x_j},\ j=1,\cdots,n$$

使$A(x(t),\xi(t))\equiv 0$的积分曲线。随后Beals和Fefferman(Ann. of Math. 97(1973)482—498)去掉了系数的解析性限制。对于主型拟微分算子，仍无最后结果。

关于主型偏微分方程的半全局可解性，有较一般的结果，见Hörmander, Ann. Math. 108(1978)569—609。

关于主型类扩大到$|grad_{x,\xi}P_m|\neq 0$及其局部可解性讨论，见YMH, 29：2(1974)172—189，ДАН, 17 (1976)1194—1197。

对主符征$p_m(x,\xi)$取实值的主型拟微分算子在域Ω上的全局可解性，也要求一种拟凸性，类似于常系数情形，见*Acta Math.* 128(1972)183—269，定理6.3.3：设$P\in L^m_{1,0}(X)$，其符征具适支集(*properly supported*)，且无P的整条次特征线停留于X的任一紧子集上(注意，这个条件是不便检验的)，则下列条件等价：

a) P为盖射(满射)：$\mathscr{D}'(X)\to\mathscr{D}'(X)/C^\infty(X)$

b) 对每个紧集$K\subset X$，存在紧集$K'\subset X$，使

$$\text{singsupp}\,Pu\subset K\Rightarrow \text{singsupp}\,u\subset K',\quad \forall u\in\mathscr{E}'(X)$$

c) 对每个紧集$K\subset X$，存在紧集$K'\subset X$，使任一有二端点在K中的次特征线段整个在K'中。

条件b)即为关于P的拟凸性。

非主型情形则在个别的探索中。见陈庆益，兰州大学学报，2(1964) 1—13(次主型算子)。

Rubinstein, *J. Diff. Eq.* 14(1973)185—194$\left(P=\frac{\partial^2}{\partial t^2}+a(t)\frac{\partial}{\partial x}+ib(t)\frac{\partial}{\partial x}+c(t)\right)$。

Cardoso, Treves, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 24(1974)225—292(二重特征情形；给出必要条件)。

Goldman, *J. Diff. Eq.* 19(1975)176—199(特殊多重特征情形；给出必要条件)。

Uhlmann, *Comm. PDE* 4(1978)739—767(二重特征情形，构造拟基本解)。

Wensten, *J. Diff. Eq.* 22(1976)111—144; 28(1978)369—380; 29(1978)374—387(特殊多重特征情形，分别给出必要条件及充分条件)。

Yamasaki, *Comm. PDE*, 5(1980)209—224(具二重特征的拟微分算子，必要条件)。

关于Lewy方程及其它"边界切向Cauchy-Riemann算子"对何种非齐次项f可解的问题，见*YMH*, 32：3(1977)57—118；*Duke J. Math.* 46(1979)253—300，301—340.

关于只具零解的齐次方程的讨论(与局部可解性问题有关)，见Nirenberg, *YMH*, 29：2(1974)241—251；30：4(1975)147—204.

2. 解的光滑性问题

常系数情形的亚椭圆性问题已彻底解决，见《线性偏微分算子》一书第四章。充要条件中最便于应用的一个是：

$$\frac{grad P(\xi)}{P(\xi)} \to 0, \quad |\xi| \to \infty$$

变系数情形关于亚椭圆性及奇性传播方面的论文远比局部可解性方面的论文多，但却没有可与条件($\mathscr{P}$)相比拟的成就。由于算子P的亚椭圆性蕴含伴算子P^*的局部可解性，而非椭圆型的亚椭圆算子主要是非主型的，这当中的困难是可以理解的。我们不想列述这些个别的不完善的结果，只举出一些代表性工作于下：

Hörmander, *Math. Ann.* 217(1975)165—188 (用到辛几何)。

Newberger, Zielezny, *J. Diff. Eq.* 14(1973) 235—244(引进一般的亚椭圆性概念)。

Rothschield, Stein, *Acta Math.* 137(1976) 248—315 (幂零Lie群上偏微分算子的亚椭圆性)。

Егоров, *YMH*, 30：2(1975)57—112，30：3(1975)50—103 (次椭圆性讨论)。

Melrose, Sjöstrand, *Comm. Pure Appl. Math.* 31(1978)593—618 (关于奇性传播)

Rockland, *Trans. Amer. Math. Soc.* 240(1978)1—52(*Heisenberg*群上的亚椭圆性讨论)。

Taylor, *Bull. Amer. Math. Soc.* 84(1978)589—611 (关于奇性传播)。

Maire, *Comm. PDE.* 5(1980)331—380 (关于超定方程组的亚椭圆性讨论)。

3. 适定定解问题

对于变系数情形，这当然是一个更为困难的问题。除具实系数主部的主型偏微分算子局部有抽象的适定定解问题存在外 (见Hörmander, *Acta Math.* 94(1955)161—248)，迄无一般性结果。尽管如此，近年来仍取得一些可观的成就。

对具任意高重特征且重数变化情形的初值问题解的唯一性讨论，Zeman有较完善的结果，见*J. Diff. Eq.* 27(1978)1—18.

关于一般初值问题适定性的研究，见Иврий, Петков, *YMH*, 29：5(1974)3—70 (弱双曲性，广义Levi条件的必要性)。

Hörmander, J. D'Anal. Math. 32(1978)118—196(总结性讨论，用到辛几何)。

Melrose, Uhlmann, *Comm. Pure Appl. Math.* 32(1979)483—520 (证明广义Levi条件的充分性)。

4. 解的逼近与结构

常系数情形有完善结果，见

Ehrenpreis *Fourier Analysis in Several complex Variables,* 1970.

Zeilberger. *J. Diff. Eq.* 31(1979)287—295.

变系数情形显然十分困难，极少讨论.

5. 方程的分类问题

古典的按主部性态分类的作法显然是不完善的，尤其在特征重数变化的情形，如离散等现象所揭示：低阶项对方程的性质（局部可解性、亚椭圆性、边界条件的个数等）有重大影响. 主型和非主型的分类也有此缺陷，并过于松弛. 如何对算子进行整体分类（即考虑到低阶项），看来是有意义的工作. 对常系数情形的一般尝试见 陈庆益 数学学报，15(1965)476—486. 诚然，若局限于个别的定型分类，则更早有 Петровский 关于 p 抛物型及 Gårding 关于双曲型的定义. 最近则有 John 关于变系数双曲组的讨论，见 *Comm. Pure Appl. Math.* 31(1978)89—106,787—794. 还可见 Kashiwara. Schapira. *Acta Math* 142(1979)1—56(微双曲组).

关于一般理论的其它问题，例如解的其它性质（周期性、渐近性态、奇性强度等）、不同类型方程解的渐近转化（辐射条件、极限振幅原则等）以及其它问题，由于较特殊，而且讨论也少，就不再评述了.