1981年4月　　数学研究与评论　　创刊

n-预加法范畴中的拟核*

于永溪

（大连工学院）

本文对具有终对象或始对象的范畴引进拟核并就n-预加法范畴讨论了拟核的一些结构性质，$n\geqslant 2$。其实际背景之一是交换n-群的范畴AG_n。而n-群的范畴的研究新近才开始（见〔4〕，〔5〕）。

文中，大写英文字母恒表示范畴的对象而小写英文字母及希腊字母皆表示态（Morphism）。n-群G中的n-元运算记为$x_1+\cdots+x_n$，$x_i\in G$，$i=1,\cdots,n$，$n\geqslant 2$。$n=2$时为通常的群。

1. 具有始对象或终对象的范畴中的拟零态

终对象和始对象各自在同构意义下是唯一的（见〔1〕），今后以$\mathbf{F}$记范畴$\mathbf{C}$中确指的终对象，而$\mathbf{I}$记确指的始对象。除了明显的例外，今后永远对确指的$\mathbf{F}$和$\mathbf{I}$进行讨论。明显地，$\mathbf{Mor}(\mathbf{F},\mathbf{F})=\{1_F\}$；$\mathbf{Mor}(\mathbf{I},\mathbf{I})=\{1_I\}$。当$\mathbf{Mor}(\mathbf{F},\mathbf{I})\neq\phi$时，$\mathbf{F}$与$\mathbf{I}$同构且$\mathbf{Mor}(\mathbf{F},\mathbf{I})$为一个态之集。

定义1.1. 设$f:A\to\mathbf{F}(\mathbf{I})$，$g:\mathbf{F}(\mathbf{I})\to B$，复合$h=gf:A\to B$称为终（始）拟零态，记$\mathbf{Mor}(A,B)$中一切终（始）拟零态之集为$O^F_{[A,B]}$（$O^I_{[A,B]}$）。

命题1.2. 设范畴$\mathbf{C}$具有终（始）对象，则对$\mathbf{C}$的任两个对象A与B，$O^F_{[A,B]}$（$O^I_{[A,B]}$）与终（始）对象$\mathbf{F}(\mathbf{I})$的选择无关，而为A与B唯一地确定。

定义1.3. 设范畴$\mathbf{C}$同时具有终对象与始对象，$f:A\to\mathbf{I}$，$u:\mathbf{I}\to\mathbf{F}$，$g:\mathbf{F}\to B$，复合$\alpha=guf$称为始-终零态。$\mathbf{Mor}(A,B)$中一切始-终零态之集记为$O^{I-F}_{[A,B]}$。又设$f:A\to\mathbf{F}$，$t:\mathbf{F}\to\mathbf{I}$，$g:\mathbf{I}\to B$，复合$\beta=gtf$称为终-始零态。$\mathbf{Mor}(A,B)$中一切终-始零态之集记为$O^{F-I}_{[A,B]}$。

命题1.4. 当范畴$\mathbf{C}$同时具有始对象和终对象时成立着

(1) $O^{I-F}_{[A,B]}=O^F_{[A,B]}\cap O^I_{[A,B]}$，

(2) 当$\mathbf{Mor}(\mathbf{F},B)\neq\phi$时，成立着$O^{I-F}_{[A,B]}=O^I_{[A,B]}\subset O^F_{[A,B]}$，

(3) 当$\mathbf{Mor}(A,\mathbf{I})\neq\phi$时，成立着$O^{I-F}_{[A,B]}=O^F_{[A,B]}\subset O^I_{[A,B]}$，

(4) $O^{F-I}_{[A,B]}\subset O^F_{[A,B]}\cap O^I_{[A,B]}$，

(5) 当$\mathbf{Mor}(\mathbf{F},\mathbf{I})\neq\phi$时，成立着$O^{F-I}_{[A,B]}=O^F_{[A,B]}=O^I_{[A,B]}(\neq\phi)$。

* 1980年11月26日收到.

证明．(1)—(4)的证明是明显的，今证(5)．因 $\mathbf{Mor}(\mathbf{F},\mathbf{I})\neq\phi$，故 $\mathbf{Mor}(A,\mathbf{I})\neq\phi$ 并且 $\mathbf{Mor}(\mathbf{F},B)\neq\phi$．因而，$O^F_{[A,B]}=O^I_{[A,B]}$．只需证明 $O^F_{[A,B]}\subset O^{F-I}_{[A,B]}$．设 $\mathbf{Mor}(\mathbf{F},\mathbf{I})=\{t\}$，$t$ 为同构态．对任意的态 $\alpha\in O^F_{[A,B]}$，存在 $h:\mathbf{F}\to B$ 及 $f:A\to\mathbf{F}$ 使 $\alpha=hf$．复合 $g=ht^{-1}\in\mathbf{Mor}(\mathbf{I},B)$，有 $\alpha=hf=(ht^{-1})tf\in O^{F-I}_{[A,B]}$．证毕．

推论1.5. 当 $\mathbf{Mor}(\mathbf{F},B)\neq\phi$ 并且 $\mathbf{Mor}(A,\mathbf{I})\neq\phi$ 时，$O^{I-F}_{[A,B]}=O^I_{[A,B]}=O^F_{[A,B]}$．当 $\mathbf{Mor}(\mathbf{F},\mathbf{I})\neq\phi$ 即 $O^{F-I}_{[A,B]}\neq\phi$ 时，$O^{F-I}_{[A,B]}=O^{I-F}_{[A,B]}=O^I_{[A,B]}=O^F_{[A,B]}$．

定义1.6. 范畴 $\mathbf{C}$ 的终(始)对象 $\mathbf{F}(\mathbf{I})$ 称为拟零的，若对每个对象 $A\in\mathbf{C}$，$\mathbf{Mor}(A,\mathbf{F})$ $(\mathbf{Mor}(\mathbf{I},A))$ 由满(单)态组成．

例1.7. 在 n-群的范畴 G_{r_n} 中终对象显然为拟零的（见〔4〕）．从而，一般地讲，拟零对象未必是零对象．但零对象一定是拟零的终对象也是拟零的始对象．

命题1.8. 若范畴 $\mathbf{C}$ 中有一个拟零终(始)对象，则 $\mathbf{C}$ 中任何终(始)对象都是拟零的．

证明．设终对象 $\mathbf{F}_0$ 为拟零的，$\mathbf{F}$ 为任一终对象．因 $\mathbf{F}_0$ 与 $\mathbf{F}$ 同构，可设 $\tau:\mathbf{F}_0\to\mathbf{F}$ 为同构态，$\tau^{-1}:\mathbf{F}\to\mathbf{F}_0$，$\tau$ 即满且单(见〔1〕)．任 $A\in\mathbf{C}$，设 $\alpha\in\mathbf{Mor}(A,\mathbf{F})$．若 $f\alpha=g\alpha$，则 $f(\tau\tau^{-1})\alpha=g(\tau\tau^{-1})\alpha$．因 $\tau^{-1}\alpha\in\mathbf{Mor}(A,\mathbf{F}_0)$，故 $\tau^{-1}\alpha$ 为满的．从而，$f\tau=g\tau$．又 τ 为满的，故 $f=g$．于是，α 为满的，$\mathbf{F}$ 为拟零的．

命题1.9. 设范畴 $\mathbf{C}$ 中有一终对象 $\mathbf{F}$ 及一始对象 $\mathbf{I}$，令 $\tau:\mathbf{I}\to\mathbf{F}$．则当且仅当 τ 为单态时 $\mathbf{I}$ 为拟零的；当且仅当 τ 为满态时 $\mathbf{F}$ 为拟零的．特别地，当 $\mathbf{Mor}(\mathbf{F},\mathbf{I})\neq\phi$ 时 $\mathbf{I}$ 与 $\mathbf{F}$ 皆为拟零的．

证明．任取对象 $A\in\mathbf{C}$，则存在唯一的 $\sigma:A\to\mathbf{F}$，唯一的 $\delta:\mathbf{I}\to A$．由终对象的定义知 $\sigma\delta=\tau$．故由 τ 的满性知 σ 为满的，由 τ 的单性知 δ 的单性(见〔1〕)．

注意．由 $\mathbf{Mor}(\mathbf{F},\mathbf{I})\neq\phi$ 即 $\mathbf{F}$ 与 $\mathbf{I}$ 同构得知 $\mathbf{F}$ 与 $\mathbf{I}$ 皆为拟零的结果是自然的；当 $\mathbf{F}$ 与 $\mathbf{I}$ 重合时，两者变成一个零对象．

命题1.10. 若对终(始)对象 $\mathbf{F}(\mathbf{I})$ 有一对象 M，使 $\sigma:M\to\mathbf{F}(\sigma:\mathbf{I}\to M)$ 为满(单)的，而 M' 为另一对象使 $\mathbf{Mor}(M,M')\neq\phi(\mathbf{Mor}(M',M)\neq\phi)$，则 $\sigma':M'\to\mathbf{F}(\sigma':\mathbf{I}\to M')$ 亦为满(单)的．

2. 关于拟核

定义2.1. 若交换图

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\sigma} & \mathbf{F}(\mathbf{I}) \\ u\downarrow & & \downarrow h \\ A & \xrightarrow[\alpha]{} & B \end{array}$$

为对 h，α 的曳后图(Pullback)，则说 u 为 α 的具有侧面 $h(\sigma)$ 的终(始)拟核．α 的一切终(始)拟核之族记为 $QK^F(\alpha)$ $(QK^I(\alpha))$，交 $QK^F(\alpha)\cap\mathbf{Mor}(M,A)$ 记为 $QKM^F(\alpha)$ $(QKM^I(\alpha)=QK^I(\alpha)\cap\mathbf{Mor}(M,A))$．以 $L^F(u)$ $(L^I(u))$ 记终(始)拟核 u 的一切侧面之集．

例2.2. 以 Gr_n 记 n-群的范畴（此例取 $n>2$）．一个元素组成的 n-群 $\{g\}$ 为终对象．

设A，B为n-群，$\alpha\in\mathbf{Mor}(A,B)$，$\alpha$为$n$-群同态。若$\mathbf{Mor}(\{g\},B)\neq\phi$，设$h\in\mathbf{Mor}(\{g\},B)$，令$h(g)=b\in B$，则$h(g)=h(\underbrace{g+\cdots+g}_{n})=b+\cdots+b=b$，故$\bar{b}=b$（$\bar{b}$的意义见〔3〕）。反之，若有$b\in B$使$\bar{b}=b$，则$\mathbf{Mor}(\{g\},B)\neq\phi$。又$\alpha$为同态，故对任何$a\in A$有$\alpha(\underbrace{a+\cdots+a}_{n-1}+\bar{a})=\alpha(a)=\underbrace{\alpha(a)+\cdots+\alpha(a)}_{n-1}+\alpha(\bar{a})$。于是，$\alpha(\bar{a})=\overline{\alpha(a)}$。

令$\mathscr{A}=\alpha^{-1}(b)$，其中$b=\bar{b}\in B$。设$\mathscr{A}$非空，现证$\mathscr{A}$满足下列四条关于$a$-理想（$a$-ideal）的公理（见〔3〕），其中$a\in\mathscr{A}$。

(1) $\bar{a}\in\mathscr{A}$。

(2) 若$x,y\in\mathscr{A}$，则$\alpha(x)=\alpha(y)=b$。故

$$\alpha(x+\bar{a}+\underbrace{a+\cdots+a}_{n-3}+y)=\alpha(x)+\overline{\alpha(a)}+\alpha(a)+\cdots+\alpha(a)+\alpha(y)=b+\bar{b}+\underbrace{b+\cdots+b}_{n-3}+b=b.$$

从而，$x+\bar{a}+\underbrace{a+\cdots+a}_{n-3}+y\in\mathscr{A}$。

(3) 若$x,y\in A$且$\alpha(x+\bar{y}+y+\cdots+y+a)=b$，则有$\alpha(x)+\overline{\alpha(y)}+\underbrace{\alpha(y)+\cdots+\alpha(y)}_{n-3}+b=b$，故$\alpha(x)+\overline{\alpha(y)}+\underbrace{\alpha(y)+\cdots+\alpha(y)}_{n-3}+\alpha(y)=\alpha(y)$（见〔3〕中引理1或〔2〕中Ⅰ.2)，从而$\alpha(x)=\alpha(y)$。于是，$\overline{\alpha(x)}=\overline{\alpha(y)}$。这样一来，$\alpha(x+\bar{y}+\underbrace{y+\cdots+y}_{n-3}+a)=\alpha(y+\bar{x}+x+\cdots+x+a)=b$。

于是，$y+\bar{x}+x+\cdots+x+a\in\mathscr{A}$。

(4) 若$x_1,\cdots,x_{n-1}$，$W\in A$且$\alpha(x_1+\cdots+x_{n-1}+a)=b$。此时有$\alpha(x_1)+\cdots+\alpha(x_{n-1})+b=b$，故$(\alpha(x_1),\cdots,\alpha(x_{n-1}))$为$(n-1)$-价单位元（见〔3〕中引1，2，3)。从而，$\alpha(W+x_1+\cdots+x_{n-1})=\alpha(W)+\alpha(x_1)+\cdots+\alpha(x_{n-1})=\alpha(W)$。于是，$\alpha((W+x_1+\cdots+x_{n-1})+\overline{W}+\underbrace{W+\cdots+W}_{n-3}+a)=\alpha(W)+\overline{\alpha(W)}+\underbrace{\alpha(W)+\cdots+\alpha(W)}_{n-3}+b=b$（见〔3〕中引3)。故$(W+x_1+\cdots+x_{n-1})+\overline{W}+W+\cdots+W+a\in\mathscr{A}$。这样一来，我们证明了$\mathscr{A}$为$a$-理想。

若令$u:\mathscr{A}\to A$为包含映射，则$u\in\mathbf{Mor}(\mathscr{A},A)$，易知$u$为$\alpha$的终拟核。

对于具相同变区（codomain或range）的态之任意族T同构关系是一个等价关系。在这里我们说$\alpha:B\to A$与$\beta:C\to A$是同构的，若存在同构态$\tau:B\to C$使$\alpha=\beta\tau$。说T的两个态基本上是相等的，若它们是同构的。T的一个态族称为基本上是一个态，若该族为同构等价类。对具相同定义域（domain）的态之任意族，上诸定义可类似地给出。但下文中言及的两个态同构系指具相同变区者。

对于始拟核，由曳后在同构意义下的唯一性，明显地成立着

定理2.3. 非空的$QK^I(\alpha)$基本上是一个态。

对于终拟核，类似地有

定理2.4. 若u_1，$u_2\in QK^F(\alpha)$并且$L^F(u_1)\cap L^F(u_2)\neq\phi$，则$u_1$与$u_2$同构。反之，若$u'$同构于$u\in QK^F(\alpha)$，则$u'\in QK^F(\alpha)$并且$L^F(u')\cap L^F(u)\neq\phi$。

这样一来，$QKM^F(\alpha)$中一切具有侧面r的态之集为$\mathbf{Mor}(M,A)$中的一个同构等价类，其中$\alpha: A\to B$。于是，$QKM^F(\alpha)$为若干$\mathbf{Mor}(M,A)$中的同构等价类之并。当然，可能一个同构等价类对应不同的侧面。若$\mathbf{F}$为拟零的，则一个同构等价类只对应一个侧面，于是$L(QKM^F(\alpha))$中不同的态将对应不同的同构等价类，其中$L(QKM^F(\alpha))=\bigcup\limits_{u\in QKM^F(\alpha)}L^F(u)$。

关于一个拟核的侧面集有

定理2.5. 若$u\in QKM^F(\alpha)$，u的两个不同侧面是不同构的。当$\mathbf{F}$为拟零时，u的侧面只有一个。

定理2.6. 若$u\in QKM^I(\alpha)$，u的任两个侧面是同构的。当$\mathbf{I}$为拟零时，u的侧面只有一个。

定义2.7. 若交换图

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dd, "u"'] & \mathbf{I}(\mathbf{F}) \arrow[d, "t"] \\
 & \mathbf{F}(\mathbf{I}) \arrow[d, "h"] \\
A \arrow[r, "\alpha"'] & B
\end{tikzcd}$$

为对α，ht的曳后图，则说u为α的始-终(终-始)拟核。称$\{\sigma,h\}(t)$为u的侧面。α的一切始-终(终-始)拟核之族记为$QK^{(I-F)}(\alpha)$ $(QK^{(F-I)}(\alpha))$。

易知有

命题2.8. 设范畴$\mathbf{C}$同时具有终对象与始对象，则α的始-终拟核为α的始拟核，当$\mathbf{Mor}(\mathbf{F},\mathbf{I})\neq\phi$时还是$\alpha$的终拟核。$\alpha$的终-始拟核为$\alpha$的终拟核也为始拟核。

这样一来，我们将分别对具终对象的范畴讨论其终拟核对具始对象的范畴讨论其始拟核。

u称为α的终(始)上拟核，若在对偶范畴中u为α的终(始)拟核。

3. n-预加法范畴中的拟核及其若干结构定理(关于n-群的)

本节中所论的范畴皆为n-预加法的，$n\geqslant 2$。但讨论中将略去$n=2$时的平易情形。

定义3.1. 具有终对象或始对象的范畴$\mathbf{C}$称为n-预加法的$(n\geqslant 2)$，若

A1) 对任意对象A，$B\in\mathbf{C}$，$\mathbf{Mor}(A, B)$为交换n-群，

A2) 态的复合是双线性的，即当$\alpha,\alpha_i\in\mathbf{Mor}(B,C)$；$\beta,\beta_i\in\mathbf{Mor}(A,B)$时，$i=1,2,\cdots,n$，有

$$\alpha(\beta_1+\cdots+\beta_n)=\alpha\beta_1+\cdots+\alpha\beta_n,$$
$$(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)\beta=\alpha_1\beta+\cdots+\alpha_n\beta.$$

命题3.2. 交换 n-群的范畴 AG_{r_n} 为 n-预加法的，$n\geqslant 2$.

证明. 设 A_i，A_j 表示交换 n-群，$\mathbf{Mor}(A_i,A_j)$ 为由 A_i 到 A_j 的一切 n-群同态之集. 设 $f_1,\cdots,f_n\in\mathbf{Mor}(A_i,A_j)$，则定义 $f_1+\cdots+f_n$ 为 $(f_1+\cdots+f_n)\ (a_i)=f_1(a_i)+\cdots+f_n(a_i)$，$a_i\in A_i$. 易知 $f_1+\cdots+f_n=f\in\mathbf{Mor}(A_i,A_j)$. 由 A_j 为 n-群知，在 $\mathbf{Mor}(A_i,A_j)$ 中定义的这个 n 元运算是结合的. 任取 $f\in\mathbf{Mor}(A_i,A_j)$，对 $a\in A_i$，存在唯一的 $b\in A_j$ 使 $(f(a),\cdots,f(a),b)$ 为 $(n-1)$-价单位元（见〔3〕）. 记 $b=\bar f(a)$，现证 $\bar f\in\mathbf{Mor}(A_i,A_j)$. 事实上，对任意的 $a_1,\cdots,a_n\in A_i$ 及 $C\in A_j$，有

$$C=(n-2)f(a_1)+\bar f(a_1)+\cdots+(n-2)f(a_n)+\bar f(a_n)+C=(n-2)f(a_1)+\cdots+(n-2)f(a_n)$$
$$+\bar f(a_1)+\cdots+\bar f(a_n)+c=(n-2)f(a_1+\cdots+a_n)+\bar f(a_1)+\cdots+\bar f(a_n)+c.$$

其中符号 $\underbrace{f(a_1)+\cdots+f(a_1)}_{n-2}$ 缩写成 $(n-2)f(a_1)$. 由“ $\bar{\ }$ ”的唯一性，$\bar f(a_1)+\cdots+\bar f(a_n)=\bar f(a_1+\cdots+a_n)$. 从而，$\bar f\in\mathbf{Mor}(A_i,A_j)$. 显然，$(f,\cdots,f,\bar f)$ 为 n-半群 $\mathbf{Mor}(A_i,A_j)$ 中的 $(n-1)$-价单位元，故 $\mathbf{Mor}(A_i,A_j)$ 为交换 n-群. 公理 A2) 是显然满足的，AG_{r_n} 具有终对象，命题得证.

定理3.3. 设范畴 $\mathbf{C}$ 具有终（始）对象，则对任两个对象 A 与 B，$O^F_{[A,B]}$ $(O^I_{[A,B]})$ 为 $\mathbf{Mor}(A,B)$ 的 n-子群.

证明. 只需证明方程

$$f_1+\cdots+f_n=f_{n+1}$$

中任 n 个元属于 $O^F_{[A,B]}$，则第 $n+1$ 个亦然（见〔2〕）.

设 $\{g\}=\mathbf{Mor}(A,\mathbf{F})$，$f_i\in O^F_{[A,B]}$，$i=1,\cdots,n$. 则存在 $h_i\in\mathbf{Mor}(\mathbf{F},B)$ 使 $h_ig=f_i$. 从而，$(h_1+\cdots+h_n)g=f_1+\cdots+f_n=f_{n+1}$. 因 $h_1+\cdots+h_n=h_{n+1}\in\mathbf{Mor}(\mathbf{F},B)$，故 $f_{n+1}\in O^F_{[A,B]}$. 又当 $f_2,\cdots,f_{n+1}\in O^F_{[A,B]}$ 时，存在 $h_i\in\mathbf{Mor}(\mathbf{F},B)$ 使 $f_i=h_ig$，$i=2,\cdots,n+1$. 由 $\mathbf{Mor}(\mathbf{F},B)$ 为 n-群知存在 $h_1\in\mathbf{Mor}(\mathbf{F},B)$ 使 $h_1+h_2+\cdots+h_n=h_{n+1}$，故 $h_1g+h_2g+\cdots+h_ng=h_{n+1}g$. 于是，$h_1g+f_2+\cdots+f_n=f_{n+1}$，而 $f_1=h_1g\in O^F_{[A,B]}$. 证毕.

推论3.4. $O^{F-I}_{[A,B]}$ 及 $O^{I-F}_{[A,B]}$ 皆为 $\mathbf{Mor}(A,B)$ 的 n-子群.

引理3.5. 设 $K\xrightarrow{u}A\xrightarrow{\alpha}B$，则 $\overline{\alpha u}=\alpha\bar u=\bar\alpha u$（注意，$n=2$ 时，$\bar u=-u$）.

证明. 由〔3〕，存在 $\overline{\alpha u}$，$\bar u,\bar\alpha$ 使

$$\underbrace{\alpha u+\cdots+\alpha u}_{n-1}+\overline{\alpha u}=\alpha u, \tag{1}$$

$$u+\cdots+u+\bar u=u, \tag{2}$$

$$\alpha+\cdots+\alpha+\bar\alpha=\alpha. \tag{3}$$

由(2)得 $\alpha u+\cdots+\alpha u+\alpha\bar u=\alpha u$，与(1)比较并利用“ $\bar{\ }$ ”的唯一性知 $\overline{\alpha u}=\alpha\bar u$. 由(3)类似地得出 $\overline{\alpha u}=\bar\alpha u$. 证毕.

定义3.6. n-预加法范畴称为满足条件(E)，若对其任何态u，有$\overline{(\bar{u})}=u$.

显然，2-预加法范畴是满足条件(E)的.

命题3.7. 3-预加法范畴满足条件(E).

定理3.8. 当范畴 $\mathbf{C}$ 满足条件(E)时,$u\in QKM^F(\alpha)$蕴含$\bar{u}\in QKM^F(\alpha)$且$L^F(u)\cap L^F(\bar{u})\neq\phi$.

证明. 设$\sigma: M\to\mathbf{F}$，存在$h:\mathbf{F}\to B$，使$h\sigma=\alpha u$. 其中，$\alpha: A\to B$，$u: M\to A$为α的一个终拟核. 于是，由引理3.5知，$\overline{h\sigma}=h\bar{\sigma}=\overline{h\sigma}=\overline{\alpha u}=\alpha\bar{u}$，但$\sigma=\bar{\sigma}$，故$\alpha\bar{u}=h\sigma$. 于是，存在唯一的$\tau: M\to M$使$\sigma\tau=\sigma$且$u\tau=\bar{u}$.$u\tau=\bar{u}$蕴含$\bar{u}\tau=\overline{(\bar{u})}=u$. 今设$\tau': M\to M$使$\bar{u}\tau'=u$且$\sigma\tau'=\sigma$，则$u\tau'=\bar{u}$且$\sigma\tau'=\sigma$. 故$\tau'=\tau$. 从而,有唯一的$\tau$使$\bar{u}\tau=u$且$\sigma\tau=\sigma$. 现证$\tau$为单的，事实上，若$\tau f=\tau g$，其中$f,g:c\to M$，$c$为某对象,则$\bar{u}\tau f=\bar{u}\tau g$,故$uf=ug$. 由$\mathbf{F}$为终对象知$\sigma f=\sigma g$. 而$\alpha(uf)=(\alpha u)f=(h\sigma)f=h(\sigma f)$，故存在唯一的$r:c\to M$使$ur=uf$且$\sigma r=\sigma f$. 从而，$f=g=r$. 我们已经证明了$\tau$为单的. 今设$\sigma': M'\to\mathbf{F}$，$u': M'\to A$使$h\sigma'=\alpha u'$，则存在唯一的$\zeta: M'\to M$使$\sigma\zeta=\sigma'$且$u\zeta=u'$. 故$\sigma(\tau\zeta)=(\sigma\tau)\zeta=\sigma\zeta=\sigma'$且$\bar{u}(\tau\zeta)=(\bar{u}\tau)\zeta=u\zeta=u'$. 又若有$\delta: M'\to M$使$\sigma\delta=\sigma'$且$\bar{u}\delta=u'$,则$\sigma(\tau\delta)=\sigma\delta=\sigma'$且$u(\tau\delta)=\bar{u}\delta=u'$，故$\tau\delta=\zeta$，同理容易验证$\tau\tau\zeta=\zeta$. 于是，$\tau\tau\zeta=\tau\delta$. 故$\tau\zeta=\delta$. 这就证明了$\bar{u}\in QKM^F(\alpha)$. 显然，$h\in L^F(u)\cap L^F(\bar{u})$. 证毕.

类似地可以证明

定理3.9. 当范畴 $\mathbf{C}$ 满足条件(E)时，$u\in QKM^I(\alpha)$蕴含$\bar{u}\in QKM^I(\alpha)$且$L^I(u)\cap L^I(\bar{u})\neq\phi$.

推论3.10. 若范畴 $\mathbf{C}$ 满足条件(E)，则$u\in QKM^F(\alpha)$或$u\in QKM^I(\alpha)$蕴含$\bar{u}$与u基本相等.

定理3.11. 若范畴 $\mathbf{C}$ 有终(始)对象，则当$\alpha: A\to B$为单态时$QK\mathbf{F}^F(\alpha)=\mathbf{Mor}(\mathbf{F},A)$ ($QK\mathbf{I}^I(\alpha)=\mathbf{Mor}(\mathbf{I},A)$).

定理3.12. 在范畴$\mathbf{C}$中，当$\mathbf{F}(\mathbf{I})$拟零时，对任何对象M，$QKM^F(\alpha)$ ($QKM^I(\alpha)$)为n-子群蕴含$L(QKM^F(\alpha))$ ($L(QKM^I(\alpha))$)为n-子群；当α为单态时，反之亦然.

证明. 设$QKM^F(\alpha)$为n-子群，$\sigma: M\to\mathbf{F}$为满态. 在$L(QKM^F(\alpha))$中考察方程

$$r_1+\cdots+r_n=r_{n+1}. \tag{3.1}$$

譬如，设$r_1,\cdots,r_{n-1}$，$r_{n+1}\in L(QKM^F(\alpha))$,则存在$u_1,\cdots,u_{n-1},u_{n+1}\in QKM^F(\alpha)$使$\alpha u_i=r_i\sigma$，$i=1,\cdots,n-1$，$n+1$. 由于$QKM^F(\alpha)$为$n$-子群，故存在$u_n\in QKM^F(\alpha)$使$u_1+\cdots+u_{n-1}+u_n=u_{n+1}$. 从而，$\alpha u_1+\cdots+\alpha u_{n-1}+\alpha u_n=\alpha u_{n+1}$. 又$\alpha u_n=r_n\sigma$，$r_n\in L(QKM^F(\alpha))$，故$r_1\sigma+\cdots+r_{n-1}\sigma+r_n\sigma=r_{n+1}\sigma$或$(r_1+\cdots+r_{n-1}+r_n)\sigma=r_{n+1}\sigma$. 由$\sigma$的满性得$r_1+\cdots+r_{n-1}+r_n=r_{n+1}$. 于是,方程(3.1)对任$n$个态在$L(QKM^F(\alpha))$中有解. 故$L(QKM^F(\alpha))$为$n$-子群.

反之，设$L(QKM^F(\alpha))$为n-子群，α为单的. 任取$u_1,\cdots,u_{n-1}$，$u_{n+1}\in QKM^F(\alpha)$，设$r_i\in L^F(u_i)$，$i=1,\cdots,n-1$，$n+1$，则存在$r_n\in L(QKM^F(\alpha))$使$r_1+\cdots+r_{n-1}+r_n=r_{n+1}$. r_n相应的$u_n\in QKM^F(\alpha)$，故$\alpha u_n=r_n\sigma$. 从而，$(r_1+\cdots+r_{n-1}+r_n)\sigma=r_{n+1}\sigma$或$\alpha u_{n+1}=\alpha(u_1$

$+\cdots+u_{n-1}+u_n)$。由 α 的单性得 $u_1+\cdots+u_{n-1}+u_n=u_{n+1}$。$QKM^F(\alpha)$ 为 n-子群。证毕。

定义3.13. 态 $\sigma:A\to B$ 称为关于 M 单的，若对任何 $f,g\in\mathbf{Mor}(M,A)$ $\sigma f=\sigma g$ 蕴含 $f=g$。

引理3.14. 若范畴 $\mathbf{C}$ 中有终(始)对象且 $\mathbf{Mor}(M,\mathbf{F})$ $(L(QKM^I(\alpha)))$ 中的态是关于 M 单的，则 $u\in QKM^F(\alpha)$ $(QKM^I(\alpha))$ 蕴含 $u=\bar{u}$。

证明。设 $u\in QKM^F(\alpha)$，$\sigma:M\to\mathbf{F}$，存在 $h\in\mathbf{Mor}(\mathbf{F},B)$ 使 $\alpha u=h\sigma$。其中 $\alpha:A\to B$。于是，$\overline{\alpha u}=\alpha\bar{u}=h\bar{\sigma}=h\sigma$。从而，有唯一的 τ: $M\to M$ 使 $\sigma=\sigma\tau$ 且 $u\tau=\bar{u}$。因 $\sigma 1_M=\sigma=\sigma\tau$，由 σ 的关于 M 单性知 $\tau=1_M$。从而，$\bar{u}=u$。

注意。对于具终对象的场合，σ 的关于 M 单性相当于 $\mathbf{Mor}(M,M)=\{1_M\}$。但，这里的证明对于具始对象的场合也是适用的。

定理3.15. 设 $QKM^F(\alpha)\neq\phi$。当 $\mathbf{F}$ 为拟零时，$QKM^F(\alpha)$ 为 n-半子群的必要条件是对任何 $u_i\in QKM^F(\alpha)$，$i=1,\cdots,n$，M' 使 $r\sigma'=\alpha u'$ 蕴含 $\mathbf{Mor}(M',M)\neq\phi$，其中 $r=r_1+\cdots+r_n$，r_i 为 u_i 的一个侧面，$\sigma':M'\to\mathbf{F}$，$u':M'\to A$，$\alpha:A\to B$；反之，若 M' 使 $r\sigma'=\alpha u'$ 蕴含 $\mathbf{Mor}(M',M)\neq\phi$，则当 α 为单态时 $QKM^F(\alpha)$ 为 n-子群。

证明。设 $QKM^F(\alpha)$ 为 n-半子群，$\mathbf{F}$ 为拟零的，$u_i\in QKM^F(\alpha)$，r_i 为 u_i 的一侧面，$i=1,\cdots,n$。令 $\sigma:M\to\mathbf{F}$，有 $\alpha(\sum_{i=1}^{n}u_i)=(\sum_{i=1}^{n}r_i)\sigma$。令 $u=\sum_{i=1}^{n}u_i$，$r=\sum_{i=1}^{n}r_i$，则 $\alpha u=r\sigma$ 且 $u\in QKM^F(\alpha)$。由 σ 的满性知 r 为 u 的侧面。故对任何 M'，M' 使 $r\sigma'=\alpha u'$ 蕴含 $\mathbf{Mor}(M',M)\neq\phi$。

今设对对象 M'，M' 使 $r\sigma'=\alpha u'$ 蕴含 $\mathbf{Mor}(M',M)\neq\phi$；$\alpha$ 为单态。首先注意，因 $QKM^F(\alpha)\neq\phi$，由 α 为单的知 σ 为单态，故对任何对象 P，$\mathbf{Mor}(P,M)\neq\phi$ 蕴含 $\mathbf{Mor}(P,M)$ 为一个态组成的集。

取 $u_i\in QKM^F(\alpha)$，r_i 为 u_i 的侧面，$r=\sum_{i=1}^{n}r_i$。若 $\sigma':M'\to\mathbf{F}$，$u':M'\to A$ 使 $r\sigma'=\alpha u'$，则 $\mathbf{Mor}(M',M)=\{\tau\}$。令 $u=\sum_{i=1}^{n}u_i$，则 $\alpha u=r\sigma$。显然 $\sigma\tau=\sigma'$。又 $\alpha u'=r\sigma'=r(\sigma\tau)=(r\sigma)\tau=(\alpha u)\tau=\alpha(u\tau)$，由 α 的单性知 $u'=u\tau$。于是，$u\in QKM^F(\alpha)$。$QKM^F(\alpha)$ 为 n-半子群。再由引理 3.14 知 $QKM^F(\alpha)$ 为 n-子群。证毕。

定理3.16. 设 $QKM^I(\alpha)\neq\phi$。当 $\mathbf{I}$ 为拟零时，$QKM^I(\alpha)$ 为 n-半子群的必要条件是

(1) 任意的 $u_i\in QKM^I(\alpha)$，$i=1,\cdots,n$，$\sum_{i=1}^{n}u_i$ 为单的；

(2) M' 使 $r\sigma'=\alpha u'$ 蕴含 σ' 被每个侧面之和 $\sum_{i=1}^{n}\sigma_i$ 所分解。

其中，$\alpha:A\to B$，$r:\mathbf{I}\to B$，$\sigma':M'\to\mathbf{I}$，$u':M'\to A$，$\sigma_i\in L(QKM^I(\alpha))$。

反之，当 α 为单态时，条件(1)与(2)同时成立蕴含 $QKM^I(\alpha)$ 为 n-子群。

证明。先证条件是必要的。$\mathbf{I}$ 为拟零的故 r 为单的，条件(1)的成立是曳后的一个性质。参看定理 3.12 的证明过程，易知 $L(QKM^I(\alpha))$ 为 n-半子群。任取 $\sigma_i\in L(QKM^I(\alpha))$，则 $\sum_{i=1}^{n}\sigma_i=\sigma\in L(QKM^I(\alpha))$。故当 M' 使 $r\sigma'=\alpha u'$ 时，由曳后的定义知存在 $\tau:M'\to M$ 使 $\sigma\tau=\sigma'$。条件(2)成立。

今设条件 (1) 与 (2) 成立且 α 为单态. 取 $u_i\in QKM^I(\alpha)$, 令 σ_i 为 u_i 的一个侧面, 有 $\alpha(\sum_{i=1}^n u_i)=r(\sum_{i=1}^n\sigma_i)$. 若 M' 使 $r\sigma'=\alpha u'$, 由条件 (2), 存在 $\tau:M'\to M$ 使 $\sigma'=(\sum_{i=1}^n\sigma_i)\tau$. 今有 $\alpha(\sum_{i=1}^n u_i)\tau=r(\sum_{i=1}^n\sigma_i)\tau=r\sigma'=\alpha u'$. 由 α 为单态, $(\sum_{i=1}^n u_i)\tau=u'$. 由条件(1), 存在唯一的 τ 使 $\sigma'=(\sum_{i=1}^n\sigma_i)\tau$ 且 $u'=(\sum_{i=1}^n u_i)\tau$. 故 $\sum_{i=1}^n u_i\in QKM^I(\alpha)$. 于是 $QKM^I(\alpha)$ 为 n-半子群. 再由引理 3.14 知命题得证.

定理3.17. 设 $QKM^I(\alpha)\neq\phi$. 当 $\mathbf{I}$ 为拟零时, $QKM^I(\alpha)$ 为 n-半子群的充要条件是

(1) $\mathbf{Mor}(M,M)$ 中任 n 个同构态之和为单态;

(2) 对任意的 $u_i\in QKM^I(\alpha)$, $i=1,\cdots,n$, M' 使 $r\sigma'=\alpha u'$ 蕴含存在 $\beta:M'\to M$ 使 $(\sum_{i=1}^n u_i)\beta=u'$.

其中, $\alpha:A\to B$, $r:\mathbf{I}\to B$, $\sigma':M'\to\mathbf{I}$, $u':M'\to A$.

证明. 先证必要性. 设 $\tau_1,\cdots,\tau_n$ 为 $\mathbf{Mor}(M,M)$ 中的同构态. 取 $u_1\in QKM^I(\alpha)$, 令 $\nu_i=u_1\tau_i$, $i=1,\cdots,n$, 由定理 2.3, $\nu_i\in QKM^I(\alpha)$. 故 $\sum_{i=1}^n\nu_i\in QKM^I(\alpha)$, $u_1(\sum_{i=1}^n\tau_i)$ 的单性由 $\mathbf{I}$ 为拟零的得知. 从而 $\sum_{i=1}^n\tau_i$ 为单的. 条件(1)得证. 条件(2)是明显的.

充分性. 任取 $u_i\in QKM^I(\alpha), i=1,\cdots,n$. 令 σ_i 为 u_i 的一个侧面. 由曳后在同构意义下的唯一性, 存在同构态 $\tau_j:M\to M, j=2,\cdots,n$, 使 $u_1=u_1 1_M$; $u_j=u_1\tau_j$ 且 $\sigma_1=\sigma_1 1_M$; $\sigma_j=\sigma_1\tau_j$. 由条件(1), $\tau=1_M+\tau_2+\cdots+\tau_n$ 为单的. 今设 M' 使 $r\sigma'=\alpha u'$, 由条件(2) 存在 $\beta:M'\to M$ 使 $(\sum_{i=1}^n u_i)\beta=u'$. 又 $r(\sigma_1\tau\beta)=(r\sigma_1)\tau\beta=(\alpha u_1)\tau\beta=\alpha(u_1\tau)\beta=\alpha(\sum_{i=1}^n u_i)\beta=\alpha u'=r\sigma'$, 由 r 的单性知 $\sigma'=\sigma_1\tau\beta=(\sum_{i=1}^n\sigma_i)\beta$. 因 τ 与 u_1 皆为单的, $\sum_{i=1}^n u_i=u_1\tau$ 亦为单的, 从而使 $\sigma'=(\sum_{i=1}^n\sigma_i)\beta$ 且 $u'=(\sum_{i=1}^n u_i)\beta$ 的 β 是唯一的. 又明显地有 $\alpha(\sum_{i=1}^n u_i)=r(\sum_{i=1}^n\sigma_i)$, 故 $\sum_{i=1}^n u_i\in QKM^I(\alpha)$. 证毕.

推论3.18. 若范畴 $\mathbf{C}$ 满足条件(E), $\mathbf{I}$ 为拟零的, 则当定理 3.17 中条件(1)与 (2) 成立时其 $QKM^I(\alpha)$ 为 n-子群.

特别地, 在 3-预加法范畴中若 $\mathbf{I}$ 为拟零的且定理 3.17 中条件 (1) 与 (2) 成立则其 $QKM^I(\alpha)$ 为 3-子群.

参看定理 2.4, 记 $QKM^F(\alpha)$ 中一切具有侧面 r 的态之集为 $QKM^F_r(\alpha)$, 则 $QKM^F_r(\alpha)$ 为 $\mathbf{Mor}(M,A)$ 中的一个同构等价类且 $QKM^F(\alpha)=\bigcup_{r\in L(QKM^F(\alpha))}QKM^F_r(\alpha)$.

参考定理 3.17 的证明有

定理3.19. 设 $QKM^F_r(\alpha)\neq\phi$, 则 $QKM^F_r(\alpha)$ 为 n-半子群的充要条件为

(1) $\mathbf{Mor}(M,M)$ 中任 n 个同构态之和为单的;

(2) 对任何 $u_i\in QKM^F_r(\alpha)$, $i=1,\cdots,n$, M' 使 $r\sigma'=\alpha u'$ 蕴含存在 $\beta:M'\to M$ 使 $(\sum_{i=1}^n u_i)\beta=u'$.

其中，$\alpha:A\to B$，$r:\mathbf{F}\to B$，$\sigma':M'\to\mathbf{F}$，$u':M'\to A$。

推论3.20. 若范畴 **C** 满足条件(E)，当定理3.19中的条件(1)与(2)成立时其$QKM^{F}_{r}(\alpha)$为n-子群。

特别地，在3(2)-预加法范畴中，若定理3.19中的条件(1)与(2)成立则其$QKM^{F}_{r}(\alpha)$为3(2)-子群。

借此机会向周伯壎教授与莫绍揆教授表示衷心的感谢，感谢莫、周两位老师长年来在指导我的学习和工作中所赋予的辛勤劳动。

附注。本文用到的概念及事实如下：

1) 范畴论方面见〔1〕的第一章；

2) n-群方面见〔2〕的第一章或〔3〕。

参　考　文　献

〔1〕 Mitchell, B. Theory of categories, New. York, 1965.

〔2〕 Post, E. Polyadic groups, Trans. Amer. Math. Soc., 48(1940), pp. 208—350.

〔3〕 Monk, J. Sioson F., On the general theory of m-groups, Fund. Math., 72(1971), pp. 233—244.

〔4〕 Michalski, J. On some functors from the category of n-groups, Bull. Acad. Pol. Sci., Vol. XXVII, №6(1979), pp. 437—441.

〔5〕 —, Inductive and Projective Limits of n—groups, ibid., pp. 443—446.

The Quasi-Kernels in an n-Preadditive Category

By Yu Yonghsi (于永溪)

Abstract

In this paper, we have defined the quasi-kernels for a category which possesses initial objects or final objects and have obtained several structure theorems of the quasi kernels in an n-preadditive category.

A category **C** which possesses initial objects or final objects is called an n-preadditive category, provided it satisfies the following axioms:

A1) for each pair A, B of objects of **C**, **Mor** (A, B) is an Abelian n-group,

A2) the Composition functions. **Mor**(B, C) $\times$ **Mor**(A, B) $\to$ **Mor**(A, C) are bilinear, that is, if $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\alpha\in$ **Mor** (A, B) and $\beta_1,\ldots,\beta_n,\beta\in$ **Mor** (B, C) then $\beta(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)=\beta\alpha_1+\cdots+\beta\alpha_n$ and $(\beta_1+\cdots+\beta_n)\alpha=\beta_1\alpha+\cdots+\beta_n\alpha$, where $\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ is the n-ary operation in **Mor** (A,B);