全聚点集与$\aleph_\alpha$-紧性*

陶林实

（扬州市自来水公司）

豪斯道夫曾以邻域 $O_\varepsilon(x)$ 中含有集A的至少一点，无限多点，不可数多点来定义集A的接触点，极限点和凝聚点[1]。

用同样的方法，邦德列雅金在《连续群》一书中又提出完全凝聚点的概念，即我们本文中的全聚点。

在这篇文章中，我们引进了全聚点和$\aleph_\alpha$-紧性的概念，讨论了全聚点集的并、交运算，及它们的基本性质，简单地介绍了全密集、全闭集和全聚集的概念。

本文对全聚点集仅作了一个非常初步的探讨，主要内容是讨论几种$\aleph_\alpha$-紧性之间的关系，以及$\aleph_\alpha$-紧性与一般紧性的关系，得到的主要结果是在距离空间中一般紧性与我们这里的$\aleph_\alpha$-紧性都是等价的。

设集A是距离空间R的子集，$x\in R$，我们规定U $(x,\ \varepsilon)$为空间R中与点x的距离小于ε的点的全体，规定$O_\varepsilon(x)$为集A中与点x的距离小于ε的点的全体，即总有$O_\varepsilon(x)\subseteq A$。若无特殊说明，在本文中所讨论的集都是距离空间R中的无限子集。

（一）全聚点集

一、全聚点

定义1　设集A是距离空间R中的子集，$x\in R$，如果不论$\varepsilon>0$如何小，总有$\mathrm{Card}O_\varepsilon(x)=\mathrm{Card}A$，则称点$x$为集$A$的全聚点，记之为$\delta_-$点，集$A$的全聚点的全体称为集$A$的全聚点集，记之为$A_\delta$。

因为$O_\varepsilon(x)\subseteq A\Rightarrow \mathrm{Card}O_\varepsilon(x)\leqslant \mathrm{Card}A$，因此要断定$x$是集$A$的全聚点，只需要知道$\mathrm{Card}O_\varepsilon(x)\geqslant \mathrm{Card}\ A$，于是我们有：

定理1　对任何$\varepsilon>0$，$\mathrm{Card}O_\varepsilon(x)\geqslant\mathrm{Card}A\Rightarrow x\in A_\delta$。

系　可列列紧集必有全聚点。

证　因为无限列紧集必有一极限点，根据极限点定义，知道对任何$\varepsilon>0$，$\mathrm{Card}O_\varepsilon(x)\geqslant\aleph_0$，由定理1得知$x$是集的全聚点。

定理2　$A_\delta\neq\phi\Rightarrow\mathrm{Card}A=1\vee\mathrm{Card}A\geqslant\aleph_0$。

* 1981年2月10日收到。

证 设 $x\in A_\delta$，对每一正数 ε，若 $\mathrm{Card}O_\varepsilon(x)>1$，则 x 必是 A 的极限点，此时 $\mathrm{Card}A=\mathrm{Card}O_\varepsilon(x)\geqslant\aleph_0$。

如此，多点的有限集没有全聚点。

系 若$\mathrm{Card}A\geqslant\aleph_0$，则 $x\in A_\delta\Rightarrow x\in A'$ 其中A'是 A 的导集。

由于本文中的集都是无限集，所以总有 $A_\delta\subseteq A'$。

定理3 如果集 A 的每一无限子集的全聚点都是在 A 内，则 A 是闭集。

证 记 $\mathrm{Card}\ A=m$，A_i 是 A 的一无限子集，$\mathrm{Card}\ A_i=m_i$，则应有 $\aleph_0\leqslant m_i\leqslant m$。注意到 A_i 的每一全聚点就是这子集的极限点，也就是集 A 本身的极限点；反之，集 A 的极限点 x 只能有 $\aleph_0\leqslant\mathrm{Card}\ O_\varepsilon(x)\leqslant m$，换言之，$x$ 也是势为 m_i 的某一子集的全聚点。用 $\bigcup_{\aleph_0\leqslant m_i\leqslant m}A_{i\delta}$ 表示所有势为 m_i，$\aleph_0\leqslant m_i\leqslant m$ 的子集 A_i 的全聚点集 $A_{i\delta}$ 的并，由上述分析，得到

$$\bigcup_{\aleph_0\leqslant m_i\leqslant m}A_{i\delta}=A'.$$

今 $\bigcup_{\aleph_0\leqslant m_i\leqslant m}A_{i\delta}\subseteq A$，所以$A'\subseteq A$，即 A 是闭集。证毕。

因为 $\bigcup_{\aleph_0\leqslant m_i\leqslant m}A_{i\delta}=A'$，如果 $\bigcup_{\aleph_0\leqslant m_i\leqslant m}A_{i\delta}=A$，必 $A'=A$，从而就有：

系 集 A 是完全集当且仅当 A 的无限子集的全聚点的全体就是集 A。

二、全聚点集

定理4 全聚点集 A_δ 是闭集。

证 设 $a\in A'_\delta$，则 $\mathrm{Card}O_{\varepsilon(A_\delta)}(a)\geqslant\aleph_0$。
即不论 ε 如何小，必有 $a_1\in O_{\varepsilon(A_\delta)}(a)\subseteq A_\delta$，取 $\varepsilon_1=min[\varepsilon-\rho(a,a_1),\ \rho(a,a_1)]$，则$\varepsilon_1>0$，而且，$O_{\varepsilon_1 A}(a_1)\subseteq O_{\varepsilon A}(a)$。再由 $a_1\in A_\delta$，我们有

$$\mathrm{Card}A=\mathrm{Card}O_{\varepsilon_1 A}(a_1)\leqslant\mathrm{Card}O_{\varepsilon A}(a)\leqslant\mathrm{Card}A,$$

即$a\in A_\delta$，所以 A_δ 是闭集。

定理5 $\mathrm{Card}A_\delta\leqslant(\mathrm{Card}A)^{\aleph_0}$。

证 因为 $A_\delta\subseteq A'\subseteq A^\circ$，其中 A°是 A 的闭包，所以 A 对A_δ（同样对A'）稠密，由稠密性[1]立即得到所要证的结果。

如果集 A 的势是$\aleph_\alpha^{\aleph_0}$形的，即

$$(\mathrm{Card}A)^{\aleph_0}=\mathrm{Card}A,$$

这时有

系 $(\mathrm{Card}A)^{\aleph_0}=\mathrm{Card}A\Rightarrow\mathrm{Card}A_\delta\leqslant\mathrm{Card}A$

定理6 $A\subset B\ \&\ \mathrm{Card}A=\mathrm{Card}B\Rightarrow A_\delta\subset B_\delta$

证 设 $a\in A_\delta$，则 $\mathrm{Card}O_{\varepsilon A}(a)=\mathrm{Card}A=\mathrm{Card}B$，这里$O_{\varepsilon A}(a)\subset A$。由

$$A\subset B,\ O_{\varepsilon A}(a)\subset O_{\varepsilon B}(a),$$

知道

$$\mathrm{Card}B\geqslant\mathrm{Card}O_{\varepsilon B}(a)\geqslant\mathrm{Card}O_{\varepsilon A}(a)=\mathrm{Card}A=\mathrm{Card}B.$$

从而得到

$$\mathrm{Card}O_{\varepsilon B}(a)=\mathrm{Card}B,$$

即$a\in B_\delta$。证毕

定理7　$(A\cup B)_\delta\subseteq A_\delta\cup B_\delta$

证　设$a\in(A\cup B)_\delta$，那么

$$\mathrm{Card}O_{\varepsilon(A\cup B)}(a)=\mathrm{Card}(A\cup B)=Max(\mathrm{Card}A,\ \mathrm{Card}B),$$

其中$O_{\varepsilon(A\cup B)}(a)\subseteq A\cup B$。又

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(A\cup B)&=\mathrm{Card}O_{\varepsilon(A\cup B)}(a)\\&=\mathrm{Card}(O_{\varepsilon A}(a)\cup O_{\varepsilon B}(a))\ (\text{这里}O_{\varepsilon A}(a)\subset A,\ O_{\varepsilon B}(a)\subset B)\\&=Max(\mathrm{Card}O_{\varepsilon A}(a),\ \mathrm{Card}O_{\varepsilon B}(a)).\end{aligned}$$

这只能有如下几种可能：

$\mathrm{Card}O_{\varepsilon A}(a)=\mathrm{Card}A\ \&\ \mathrm{Card}O_{\varepsilon B}(a)=\mathrm{Card}B\Rightarrow a\in A_\delta\cap B_\delta\subseteq A_\delta\cup B_\delta$;

$\mathrm{Card}O_{\varepsilon A}(a)=\mathrm{Card}A\ \&\ \mathrm{Card}O_{\varepsilon B}(a)<\mathrm{Card}B\Rightarrow a\in A_\delta\subseteq A_\delta\cup B_\delta$;

$\mathrm{Card}O_{\varepsilon A}(a)<\mathrm{Card}A\ \&\ \mathrm{Card}O_{\varepsilon B}(a)=\mathrm{Card}B\Rightarrow a\in B_\delta\subseteq A_\delta\cup B_\delta$;

$\mathrm{Card}O_{\varepsilon A}(a)<\mathrm{Card}A\ \&\ \mathrm{Card}O_{\varepsilon B}(a)<\mathrm{Card}B\Rightarrow \mathrm{Card}(A\cup B)<Max(\mathrm{Card}A,\mathrm{Card}B)$.

而第四种情况与$\mathrm{Card}(A\cup B)=Max(\mathrm{Card}A,\mathrm{Card}B)$矛盾。故不会出现，因此只能是$a\in A_\delta\cup B_\delta$，从而获证。

如果反过来，设$a\in A_\delta\cup B_\delta$，则

$$a\in A_\delta\vee a\in B_\delta\Rightarrow \mathrm{Card}O_{\varepsilon A}(a)=\mathrm{Card}A\vee \mathrm{Card}O_{\varepsilon B}(a)=\mathrm{Card}B.$$

于是

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}O_{\varepsilon(A\cup B)}(a)&=\mathrm{Card}(O_{\varepsilon A}(a)\cup O_{\varepsilon B}(a))=\mathrm{Card}O_{\varepsilon A}(a)+\mathrm{Card}O_{\varepsilon B}(a)\\&=\mathrm{Card}A+\mathrm{Card}O_{\varepsilon B}(a),\ \mathrm{Card}O_{\varepsilon B}(a)<\mathrm{Card}B,\end{aligned}$$

（或等于$\mathrm{Card}O_{\varepsilon A}(a)+\mathrm{Card}B$，$\mathrm{Card}O_{\varepsilon A}(a)<\mathrm{Card}A$）

$=\mathrm{Card}A$（或$\mathrm{Card}B$）（这在$\mathrm{Card}A=\mathrm{Card}B$时成立），

$=\mathrm{Card}(A\cup B)$（这在$\mathrm{Card}A=\mathrm{Card}B$时成立）.

这就是$a\in(A\cup B)_\delta$、从而我们证明了：

系　如果$\mathrm{Card}A=\mathrm{Card}B$，则$(A\cup B)_\delta=A_\delta\cup B_\delta$。

定理8　如果$\mathrm{Card}(A\cap B)=\mathrm{Card}A=\mathrm{Card}B$，则$(A\cap B)_\delta\subset A_\delta\cap B_\delta$。

证　因为$A\cap B\subseteq A\ \&\ A\cap B\subseteq B$，根据定理6，有

$$(A\cap B)_\delta\subset A_\delta\ \&\ (A\cap B)_\delta\subset B_\delta.$$

所以，$(A\cap B)_\delta\subset A_\delta\cap B_\delta$·

定理9 设$A\subset B$&$\mathrm{Card}B>\mathrm{Card}A\geqslant\aleph_0$，则$a\in A_\delta\cap B_\delta\Rightarrow a\in\Gamma(A)$，这里$\Gamma(A)$是集$A$的界点集。

证 $\mathrm{Card}O_{\varepsilon B}(a)=\mathrm{Card}B$&$\mathrm{Card}O_{\varepsilon A}(a)=\mathrm{Card}A$&$\mathrm{Card}B>\mathrm{Card}A\geqslant\aleph_0$

$\Rightarrow\mathrm{Card}O_{\varepsilon B}(a)>\mathrm{Card}O_{\varepsilon A}(a)\geqslant\aleph_0$

$\Rightarrow\mathrm{Card}O_{\varepsilon(B/A)}(a)=\mathrm{Card}O_{\varepsilon B}(a)\setminus O_{\varepsilon A}(a)=\mathrm{Card}B>\aleph_0$（基数运算法则根据[6]）

$\Rightarrow a\in(B\setminus A)^\circ$.

又$a\in A^\circ$，（由$A_\delta\subset A^\circ$知），所以

$$a\in(B\setminus A)^\circ\cap A^\circ=\Gamma(A).$$

即a是集A的界点。

（二）全闭集和全密集

定义2 若$A_\delta\subseteq A$，则称集A为全闭集，若$A_\delta\supseteq A$，则称集A为全密集，$A_\delta=A$时称集A为全聚集。

根据定义知道，全闭集的全聚点都属于集本身，全密集的每点都是全聚点，而全聚集则既是全闭的又是全密的，再由$A_\delta\subseteq A'$知，全密集和全聚集都是已密集，特别当$A_\delta=A'$时，这几种集分别就是闭集，已密集和完全集。

定理10 (i)$A_{1\delta}\subseteq A_1$&$A_{2\delta}\subseteq A_2\Rightarrow(A_1\cup A_2)_\delta\subseteq A_1\cup A_2$.

(ii)若$\mathrm{Card}(A_1\cap A_2)=\mathrm{Card}A_1=\mathrm{Card}A_2$

则 $A_{1\delta}\subseteq A_1$&$A_{2\delta}\subseteq A_2\Rightarrow(A_1\cap A_2)_\delta\subseteq A_1\cap A_2$.

证 (i)由定理7知$(A_1\cup A_2)_\delta\subseteq A_{1\delta}\cup A_{2\delta}$，今$A_{i\delta}\subseteq A_i$，$i=1$、2，所以

$$(A_1\cup A_2)\subseteq A_{1\delta}\cup A_{2\delta}\subseteq A_1\cup A_2,$$

(ii)根据定理8，模仿(i)立即可证。

定理11 设集A、B是全密集，如果$\mathrm{Card}A=\mathrm{Card}B$，则$A\cup B\subset(A\cup B)_\delta$.

即基数相同的全密集的和仍然是全密集。

证 由于$A\subset A_\delta$，$B\subset B_\delta$，所以再根据定理7的系立即推得

$$A\cup B\subset A_\delta\cup B_\delta=(A\cup B)_\delta.$$

定理12 全密集A的每一极限点都是其全聚点。

证 设a是集A的一极限点，则必有$a_1\in O_\varepsilon(a)\subseteq A$，$a_1\neq a$，取$\varepsilon_1=min[\varepsilon-\rho(a,a_1),\rho(a,a_1)]$，则$\varepsilon_1>0$，而且$O_{\varepsilon_1}(a_1)\subset O_\varepsilon(a)$。注意到$A\subseteq A_\delta$，所以应有$a_1\in A_\delta$，从而

$$\mathrm{Card}A=\mathrm{Card}O_{\varepsilon_1}(a_1)\leqslant\mathrm{Card}O_\varepsilon(a)\leqslant\mathrm{Card}A,$$

即$\mathrm{Card}O_\varepsilon(a)=\mathrm{Card}A$，亦即$a\in A_\delta$。证毕。

我们已经知道，对任何集都有$A_\delta\subseteq A'$，今从定理12可以知道、全密集及全聚集的导集与全聚点集相等，即$A_\delta=A'$，所以全密集和全聚集分别就是已密集和完全集。

（三）子集式$\aleph_0$—紧性

紧性是经典拓扑学中最基本的一个概念，下面我们在距离空间R中把紧性概念推广成$\aleph_0$-紧性，首先，关于全聚点，引进子集式$\aleph_0$-紧集的概念。

定义3　设R是距离空间，$A\subseteq R$，如果$\forall B'\subseteq A(\mathrm{Card}B'=\aleph_0\leqslant\mathrm{Card}A)$都至少有一全聚点，那么称集$A$为（$R$中的）子集式$\aleph_0$-紧集．若$R$自身是子集式$\aleph_0$-紧的，就称$R$为$\aleph_0$-紧空间。

当A又是闭集时．称集A为子集式$\aleph_0$-自紧集。

显然，可列列紧集是$\aleph_0$-紧集。

定理13　A是子集式$\aleph_0$-列紧集$\Longleftrightarrow$集A是子集式列紧集。

证　因为无限集的全聚点就是这个集的极限点．所以子集式$\aleph_0$-紧集也就是子集式列紧集。

反之，若集A是子集式列紧的，A_1是集A的任一无限子集，我们需证得A_1至少有一全聚点。

首先，A_1也是子集式列紧的，由此A_1有一有限的1—网（这里假设$\phi(A_1)\geqslant1$，否则取$\frac{1}{2}$—网，或更小的$\frac{1}{n}$—网）：$B_1=\{x_{11}, x_{12}\dots x_{1n_1}\}\subset A_1$，使得

$$A_1=\bigcup_{x_{1i}\in B_1}o_1(x_{1i})\quad（这里o_1(x_{1i})\subseteq A_1）。$$

因为B_1是有限集，$\bigcup\limits_{x_{1i}\in B_1}o_1(x_{1i})$为有限个$o_1(x_{1i})$的并集，由基数运算知：

$\exists x_{1i}\in B_1$使得$\mathrm{Card}O_1(x_{1i})=\mathrm{Card}A_1$。

不妨记满足上式的x_{1i}为x_{11}。

依同理，对于集$C_1=O_1(x_{11})$也应该有个$\frac{1}{2}$—网：$B_2=\{x_{21}, x_{22}\cdots x_{2n_2}\}$存在，使得

$C_1=\bigcup\limits_{x_{2i}\in B_2}O_{\frac{1}{2}}(x_{i_2})$（这里$O_{\frac{1}{2}}(x_{i_2})\subseteq C_1$）。还存在一个$x_{i_2}$，不妨记为$x_{21}$，使得$\mathrm{Card}\,O_{\frac{1}{2}}(x_{21})=\mathrm{Card}C_1=\mathrm{Card}A_1$，显然$O_{\frac{1}{2}}(x_{21})\subseteq O_1(x_{11})\subseteq A_1$。

如此继续下去，我们得到一列递减集列：A_1，$O_1(x_{11})$，$O_{\frac{1}{2}}(x_{21})\dots$

取点列$\{y_n\}$，使得$y_n\in O_{\frac{1}{n}}(x_{n1})$，则当$\mu\leqslant n$时

$$\rho(y_n, x_{\mu1})<\frac{1}{\mu}.$$

因此当$\mu\leqslant n$时，

$\rho(y_\mu, y_n)\leqslant\rho(y_\mu, x_{\mu1})+\rho(y_n, x_{\mu1})<\frac{2}{\mu}$．如此，$\{y_n\}$是集$A_1\subseteq A$中的一基本点列，由于子集式列紧集也是序列式列紧集，其中任一基本点列都是收敛的（[2]、[3]），所以$\{y_n\}$是收敛序列。

设$\{y_n\}$收敛于y，那么$\rho(y_n,y)\leqslant\frac{2}{n}$．任取—$O_{\frac{1}{k}}x_{k1}$，$n\leqslant k$，则对每一$x\in O_{\frac{1}{k}}(x_{k1})$有

$$\rho(y,\ x)\leqslant\rho(y,\ y_n)+\rho(y_n,\ x)<\frac{2}{n}+\frac{2}{n}=\frac{4}{n}.$$

即$x\in O_{\frac{4}{n}}(y)$。于是对每一n，有个$k\geqslant n$，使得$O_{\frac{1}{k}}(x_{k_1})\subseteq O_{\frac{4}{n}}(y)\subseteq A_1$，从而由

得到 $$\mathrm{Card}A_1=\mathrm{Card}O_{\frac{1}{k}}(x_{k_1}\leqslant\mathrm{Card}O_{\frac{4}{n}}(y)\leqslant\mathrm{Card}A_1,$$

$$\mathrm{Card}O_{\frac{4}{n}}(y)=\mathrm{Card}A_1,$$

即y是集A_1的一全聚点。证毕。

（四）复盖式$\aleph_\alpha$—紧性

定义4 设集$\{B_\alpha\}$是集A在R中的一开复盖且$\mathrm{Card}\{B_\alpha\}=\aleph_\alpha$，我们简称之为复盖$A$的一个$\aleph_\alpha$-开复盖。

设R是距离空间，$A\subseteq R$，若对于任一$\aleph_\alpha\leqslant\mathrm{Card}A$，集$A$的每个$\aleph_\alpha$-开复盖都有一有限的子复盖，则称集$A$是复盖式$\aleph_\alpha$-紧的，特别$A=R$时，称空间$R$是复盖式$\aleph_\alpha$-紧空间。

定理14 集A紧致$\Leftrightarrow$集A复盖式$\aleph_\alpha$紧.

证 必要性是显然的，现在证充分性。

如果集A是复盖式$\aleph_\alpha$-紧的，$\{B_\alpha\}$是复盖A的任一开复盖，若其势$\aleph_\alpha\leqslant\mathrm{Card}A$，由集A的复盖式$\aleph_\alpha$-紧性，$\{B_\alpha\}$应有一有限子复盖。

假如$\aleph_\alpha>\mathrm{Card}A$，由复盖定义知，$\forall x\in A\Rightarrow\exists B_\alpha(x\in B_\alpha)$。在所有包含$x$的$B_\alpha$的集族中，选择$-B_{\alpha x}$。对$A$的所有元。这样的全体组成$\{B_\alpha\}$的一个子集$\{B_{\alpha x}\}$，且$\{B_{\alpha x}\}$复盖A。由$\{B_{\alpha x}\}$的构造知，$\mathrm{Card}\{B_{\alpha x}\}\leqslant\mathrm{Card}A$。再从空间的$\aleph_\alpha$-紧性立即可推知，$\{B_{\alpha x}\}$必有复盖$A$的一个子复盖$\{C_k\}$。又由$\{C_k\}\subseteq\{B_{\alpha x}\}\subseteq\{B_\alpha\}$知道，$\{B_\alpha\}$有一有限子复盖$\{C_k\}$复盖$A$，这正是我们所需要的。

定理15 集A是子集式$\aleph_\alpha$-自紧集$\Leftrightarrow$集A是复盖式$\aleph_\alpha$-紧的。

证 因为在距离空间中，子集式$\aleph_\alpha$-自紧$\Leftrightarrow$子集式自紧$\Leftrightarrow$紧致$\Leftrightarrow$复盖式$\aleph_\alpha$-紧，所以由等价关系的传递性知，子集式$\aleph_\alpha$-自紧$\Leftrightarrow$复盖式$\aleph_\alpha$-紧。

证毕。

（五）序列式$\aleph_\alpha$—紧性

定义5 设$A\subseteq R$，序列$\{x_k|x_k\in A\ \&\ k\in\aleph_\alpha\&\aleph_\alpha\leqslant\mathrm{Card}A\}$称为集$A$的一$\aleph_\alpha$-超限序列，这里$x_k$的指标是前于$x_k$的元的指标的集合。显然$\mathrm{Card}\{x_k|x_\xi\neq x_\eta\&k\in\aleph_\alpha\}=\aleph_\alpha$。

设$\{x_k\}$是集A的$\aleph_\alpha$-超限序列，如果对$x\in R$的每一邻域$\cup(x,\ \varepsilon)$，存在一序数$\mu\in\aleph_\alpha$，使得对所有的$k>\mu$，有$x_k\in\cup(x,\ \varepsilon)$，则点$x$称为超限序列$\{x_k\}$的一极限，或者说这$\aleph_\alpha$-超限序列$\{x_k\}$收敛于$x$。

如果对于集A的每一$\aleph_\alpha$-超限序列都有一收敛$\aleph_\alpha$-超限子序列，那么称集A是(R中的)序列式$\aleph_\alpha$-紧的，若空间R是序列式$\aleph_\alpha$-紧的，则称空间R为序列式$\aleph_\alpha$-紧空间。

定理16　距离空间R中的收敛$\aleph_\alpha$-超限序列只有唯一的极限。

证　如果a_1，a_2是$\aleph_\alpha$—超限序列$\{x_k\}$的两个不同的极限，取$\varepsilon<\frac{1}{2}\rho(a_1,\ a_2)$，则$U(a_1,\ \varepsilon)\cap U(a_2,\ \varepsilon)=\phi$。

但是，根据极限的定义，存在一序数$\mu\in\aleph_\alpha$，使得对所有的$k>\mu$，有$x_k\in U(a_1,\ \varepsilon)$ $\&x_k\in U(a_2,\ \varepsilon)$，如是$U(a_1,\ \varepsilon)\cap U(a_2,\ \varepsilon)\neq\phi$，这是个矛盾，故只能是$a_1=a_2$。

定理17　距离空间R的点x是R的一个子集A的全聚点$\Leftrightarrow A\setminus\{x\}$中存在一个由完全不同的点所组成的超限序列$\{x_k\}$收敛于$x$，这里$k\in\aleph_\alpha=\mathrm{Card}A$。

证　必要性　由于$\aleph_\alpha\geqslant\aleph_0$(本文中的集都为无限集)，由正序定理，总可在$A\setminus\{x\}$中取得一些元素编成$\aleph_\alpha$-超限序列，我们用反证法来证明在$A\setminus\{x\}$中存在一$\aleph_\alpha$-超限序列收敛于$x$。

假如这样的序列不存在，即由$A\setminus\{x\}$中的点组成的每一$\aleph_\alpha$-超限序列$\{x_k\}$，都可找到一确定的正数ε和一序数$\mu\in\aleph_\alpha$，对所有的$k>\mu$，不都有$x_k\in U(x,\varepsilon)$，否则已证实了我们的论断。

如果这样，必存在一足够小的ε和一足够大的序数$\mu\in\aleph_\alpha$，使得对由$A\setminus\{x\}$中的点组成的每一$\aleph_\alpha$-超限序列$\{x_k\}$，当$k>\mu$时不都有$x_k\in U(x,\ \varepsilon)$，否则也已证实了我们的论断。

注意到$x\in A$，那么应有$O_\varepsilon(x)\subseteq U(x,\ \varepsilon)$且$\mathrm{Card}O_\varepsilon(x)=\aleph_\alpha$，根据正序定理，我们可在$O_\varepsilon(x)\setminus\{x\}$中选择一些点作一$\aleph_\alpha$-超限序列$\{x_k\}$，而此$\aleph_\alpha$-超限序列则对所有的$k$，都有$x_k\in U(x,\ \varepsilon)$，而这与$k>\mu$时，不都有$x_k\in U(x,\ \varepsilon)$矛盾，从而证得在$A\setminus\{x\}$中必存在一$\aleph_\alpha$-超限序列$\{x_k\}$收敛于$x$。

显然，$\{x_k\}$中存在一个$\aleph_\alpha$-超限子序列$\{x_{k_\nu}\}$，其中的点彼此不同且收敛于x，不然的话，至少有一个点a在$\{x_k\}$中出现$\aleph_\alpha$次，那么由x_k收敛于x，得到$x=a$，因而有$x_k=x$，这是矛盾。至此，必要性获证。

充分性　假如存在序列$\{x_k|x_k\in A\setminus\{x\}\ \&x_\xi\neq x_\eta\&k\in\aleph_\alpha\}$收敛于$x$，那么对于$x$的每一邻域$U(x,\ \varepsilon)$中包含$\{x_k\}$的一子序列$\{x_{k'}|k'>\mu\&\mu\in\&_\alpha\}$，由基数的定义知，$\mu$不能对等于$\aleph_\alpha$，所以$\mathrm{Card}\{x_k|k\leqslant\mu\}<\aleph_\alpha$，再由基数运算的性质知，$\mathrm{Card}\{x_{k'}|k'>\mu\&k'\in\aleph_\alpha\}=\aleph_\alpha=\mathrm{Card}A$。于是

$$
\begin{aligned}
& x_{k'}\in U(x,\ \varepsilon)\&x_{k'}\in A \\
& \Rightarrow\{x_{k'}\}\subseteq O_\varepsilon(x) \\
& \Rightarrow\mathrm{Card}A=\mathrm{Card}\{x_{k'}\}\leqslant\mathrm{Card}O_\varepsilon(x)\leqslant\mathrm{Card}A \\
& \Rightarrow\mathrm{Card}O_\varepsilon(x)=\mathrm{Card}A
\end{aligned}
$$

亦就是说x是集A的一全聚点。

由定理17不难得到：

定理18　若距离空间R中的一$\aleph_\alpha$-超限序列$\{x_k\}$由完全不同点所组成，而且无穷子集$A=\bigcup_{k\in\aleph_0}\{x_k\}$以$x\in R$为一全聚点，则$\{x_k\}$必有一$\aleph_\alpha$-超限子序列$\{x_{k'}\}$收敛于$x$。

定理19 设A是距离空间R中的子集，集A是子集式$\aleph_a$-紧集$\Leftrightarrow$集A是序列式$\aleph_a$-紧集。

证 必要性 考虑A中的任一$\aleph_a$-超限序列$\{x_\xi\}$，它只能有下面两种可能，它有或者没有由完全相同的点组成的一子序列，在前一种情况，这子序列当然收敛，在后一种情况下，$\{x_\xi\}$有由完全不同的点组成的一$\aleph_a$-超限子序列$\{y_\xi\}$，由假设$B=\bigcup_{\xi<\aleph_a}\{y_\xi\}$（显然$\mathrm{Card}B=\aleph_a$）有一全聚点，再由定理18知，$\{x_\xi\}$有一$\aleph_a$-超限子序列收敛于$x$。

充分性 设$B\subseteq A\&\mathrm{Card}B=\aleph_a$，由正序定理，可在$B$中取得一些点编成一$\aleph_a$-超限序列$\{x_\xi|x_\xi\in B\&x_\xi\neq x_\eta\}$，由假定$\{x_\xi\}$有一$\aleph_a$-超限子序列$\{x_{\xi_i}\}$收敛于$x$，由于$x_\xi\neq x_\eta$，我们有$\{x_{\xi_i}\}\subseteq B\backslash\{x\}$，再根据定理17知，$x$是集B的全聚点。

在距离空间中，我们已知道有三种紧性，1°子集式自紧2°序列式自紧3°复盖式列紧4°紧致性，现在我们又有5°子集式$\aleph_a$-自紧6°复盖式$\aleph_a$-紧7°序列式$\aleph_a$-自紧。综合上述的讨论，我们有：

定理20 在距离空间中，1°$\Leftrightarrow$2°$\Leftrightarrow$3°$\Leftrightarrow$4°$\Leftrightarrow$5°$\Leftrightarrow$6°$\Leftrightarrow$7°

参 考 文 献

[1] 豪斯道夫，集论。

[2] П. С. 亚力山大罗夫，集与函数的汎论初阶.

[3] 夏道行等，实变数函数论与泛函分析概要.

[4] 江泽涵，拓扑学引论.

[5] П. С. 邦德列雅金，连续群.

[6] Herbert, B. Endertor, Element of Set Theory.

THE Set of Complete Cluster Point and $\aleph_a$-Compactness

By Tao Linshi (陶林实)

Abstract

In this paper we introduce the concept for the set of complete cluster point and $\aleph_a$-cormpactness in the metric space. We have proved several primitive properties relatedto the complete cluster point and set of complete cluster point. We have discussed the relationship among some kinds of $\aleph_a$-compactness; and analysed the relationship among the $\aleph_a$-compactness and the general compactness. We have found that the $\aleph_a$-compactness and the general compactness are eqivalent to each other in the metric space.

In this paper the following major results are obtained:

Thecrem: Set A is a compact set$\Leftrightarrow$A is a subset formal $\aleph_a$—compact set$\Leftrightarrow$ A is covering formal $\aleph_a$-compact set $\Leftrightarrow$A is a sequence formal $\aleph_a$-compact set.