非线性两点边值问题的一个存在唯一性定理*

朱正佑

（兰州大学）

§1. 引　言

本文讨论如下形式的两点边值问题：

$$\begin{cases} z'(t)-f(t,z)=0, & (1.1a)\\ g(z(a),z(b))=0, & (1.1b)\end{cases}$$

其中 $z(t)$ 是 n 维向量；$f:[a,b]\times R^n\to R^n$，$g:R^n\times R^n\to R^n$ 是充分光滑的非线性函数。当用延拓方法[1,2]对边值问题（1.1a,b）进行数值计算时，往往要假定当 $b-a$ 很小时(1.1a,b)在某一范围内存在唯一解。当 g 是线性函数时，即

$$g(z(a),z(b))=B_0z(a)+B_1z(b)-\xi, \tag{1.2}$$

其中 B_0,B_1 为 $n\times n$ 常数矩阵，ξ 为 n 维常向量，[3.4] 证明了当 B_0+B_1 满秩时只要 b 充分接近 a 就在某范围中存在唯一(1. 1a, b) 的解。本文推广这样的结果到 g 是很一般的非线性函数。我们的方法是把（1.1a, b）的左端看成是某 Banach 空间到另一 Banach 空间的非线性算子，然后利用牛顿迭代过程的康托洛维奇收敛性定理，证明了在一定条件下当 $b-a$ 充分小时在某范围内（1.1a,b）存在唯一解。第二节中我们叙述一些线性问题的准备性结论，然后在等三节中证明我们的存在唯一性定理。

§2. 线性问题的一些结论

本节叙述线性两点边值问题的一些结论。这些结论是很初等的，但他们将在下节的讨论中起重要作用。

设 $A(t,x)$ 是 $a<x\leqslant b$，$a\leqslant t\leqslant x$ 上定义的两变元有界连续的 $n\times n$ 矩阵函数。对任意固定的 x，$a<x\leqslant b$，考虑线性两点边值问题：

* 1980年12月15日收到.
1981年4月8日收到修改稿.

$$\begin{cases} z'(t) - A(t,x)z(t) = w(t), \\ B_0 z(a) + B_1 z(x) = \xi, \end{cases} \quad a \leqslant t \leqslant x, \tag{2.1}$$

其中 $z(t)$ 是 n 维向量，B_0, B_1 是 $n \times n$ 常数矩阵，$w(t)$ 是 $[a,b]$ 上 t 的连续函数向量，$w(t) = (w_1(t), \cdots, w_n(t))^T$，$\xi = (\xi_1, \xi_2 \cdots, \xi_n)^T$ 是 n 维常数向量。显然（2.1）的解是依赖于 x 的，当有必要明确表示 $z(t)$ 对 x 的依赖性时，我们把（2.1）的解记为 $z(t,x)$。于是 $z(t,x)$ 满足

$$\begin{cases} z'(t,x) - A(t,x)z(t,x) = w(t), \\ B_0 z(a,x) + B_1 z(x,x) = \xi, \end{cases} \quad a \leqslant t \leqslant x, \tag{2.2}$$

定理 2.1 对任意连续函数向量 $w(t)$ 和任意的 ξ，(2.2)存在唯一解的充要条件是

$$Q(x) \equiv B_0 + B_1 M(x,x) \tag{2.3}$$

满秩。其中 $M(t,x)$ 是(2.2)的基本解矩阵，他由下述初值问题完全确定

$$\begin{cases} M'(t,x) - A(t,x)M(t,x) = 0, \\ M(a) = I \end{cases} \tag{2.4}$$

I 是 n 阶单位矩阵。

这一定理可在通用的微分方程教科书中找到证明。

定理 2.2 若由(2.3)定义的 $Q(x)$ 满秩，则(2.2)的唯一解 $z(t,x)$ 可表成：

$$z(t,x) = M(t,x)Q^{-1}(x)\xi + M(t,x)\int_a^x M^{-1}(\theta,x)w(\theta)d\theta -$$

$$- M(t,x)Q^{-1}(x)B_1 M(x,x)\int_a^x M^{-1}(\theta,x)w(\theta)d\theta. \tag{2.5}$$

通过直接核验就可证明(2.5)是正确的。

定理 2.3 设 $M(t,x)$ 是由(2.4)确定的基本解矩阵。则对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $a<x\leqslant a+\delta\leqslant b$，$a\leqslant t\leqslant x$ 时有

$$\|I - M(t,x)\|_\infty \leqslant \varepsilon \tag{2.6}$$

这里 $\|\cdot\|_\infty$ 表示 l_∞ 意义下矩阵的范数。

证明 把(2.4)写成等价的积分方程

$$M(t,x) = I + \int_a^t A(\tau,x)M(\tau,x)d\tau. \tag{2.7}$$

利用 $A(t,x)$ 的有界连续性，不难推出 $M(t,x)$ 在 $a<x\leqslant b$，$a\leqslant t\leqslant x$ 中也是有界连续的。设 $\|A(t,x)\|_\infty \leqslant L_1$，$\|M(t,x)\|_\infty = L_2$ 则由(2.7)知

$$\|M(t,x) - I\|_\infty \leqslant L_1 L_2 (t-a).$$

于是对任给 $\varepsilon>0$，只要取 $\delta<\dfrac{\varepsilon}{L_1 L_2}$ 就有(2.6)成立。定理证毕。

定理 2.4 若(2.2)中所述的矩阵 $B_0 B_1$ 满足

$$B \equiv B_0 + B_1 \text{ 满秩,}$$

则必存在一个正数 $\delta>0$，当 $a<x\leqslant a+\delta\leqslant b$ 时，对任意的 $w(t)$ 和 ξ，(2.2) 存在唯一解 $z(t,x)$。此外还存在和 x,t 无关的常数 K_1,K_2,K_3 使得当 $a<x\leqslant a+\delta$，$a\leqslant t\leqslant x$ 时有

$$\|M(t,x)\|_\infty\leqslant K_1,\quad \|M^{-1}(t,x)\|K_2,\qquad \|Q^{-1}(x)\|_\infty\leqslant K_3. \tag{2.8}$$

证明　由定理 2.3 知对任给的 $\varepsilon>0$，必存在 $\delta>0$ 当，$a<x\leqslant a+\delta$，$a\leqslant t\leqslant x$ 时有

$$\|I-M(t,x)\|_\infty\leqslant\varepsilon. \tag{2.9}$$

因而若要求 $\varepsilon<1$，则有

$$\|M(t,x)\|_\infty\leqslant 1+\varepsilon=K_1,$$

$$\|M^{-1}(t,x)\|_\infty\leqslant\frac{1}{1-\varepsilon}=K_2,$$

其中 K_1K_2 与 t,x 无关。另外，由(2.3)得

$$Q(x)=B-B_1(I-M(x,x))=B[I-B^{-1}B_1(I-M(x,x))]. \tag{2.10}$$

若 $B_1=0$，则 $Q(x)\equiv B_0$，命题得证。令设 $B_1\neq 0$。我们取 ε 足够小，例如 $\varepsilon\leqslant(2\|B^{-1}\|_\infty\|B_1\|_\infty)^{-1}$，则

$$\|B^{-1}B_1(I-M)\|(x,x))\|_\infty\leqslant\frac{1}{2}.$$

从而当 $a<x\leqslant a+\delta$ 时由(2.10)知 $Q(x)$ 就有逆，并且

$$\|Q^{-1}(x)\|_\infty\leqslant K_3,$$

其中 K_3 和 $\|B^{-1}\|_\infty$，$\|B_1\|_\infty$，ε 有关而和 x,t 无关。

最后根据定理 2.1，由 $Q(x)$ 当 $a<x\leqslant a+\delta$ 时有逆，所以对任意的 $w(t)$ 和 ξ，(2.2)存在唯一解。定理证毕。

把估计式 (2.8) 用到 (2.5) 中，就可得到 (2.2) 的解 $z(t,x)\equiv(z_1(t,x),z_2(t,x),\cdots,z_n(t,x))^T$ 的估计式。

定理 2.5　设定理 2.4 中条件成立，$\delta>0$ 为定理 2.4 中所确定的那个 δ，则对任意的 $w(t)$ 和 ξ，当 $a<x\leqslant a+\delta$ 时(2.2)的解 $z(t,x)$ 有估计式：

$$\max_i\max_{a\leqslant t\leqslant x}|z_i(t,x)|\leqslant K_1K_3\max_i|\xi_i|+K(x-a)\max_i\max_{a\leqslant t\leqslant a+\delta}|w_i(t)| \tag{2.11}$$

其中 K,K_1K_3 是与 $w(t),\xi,x,t$ 无关的常数。

证明　利用估计式(2.8)，由表达式(2.5)得 $\max_i\max_{a\leqslant t\leqslant x}|z_i(t,x)|\leqslant K_1K_3\max_i|\xi_i|+$

$$+(K_1K_2+K_1K_3\|B_1\|_\infty K_1K_2)(x-a)\max_i\max_{a\leqslant t\leqslant a+\delta}\|w_i(t)|. \tag{2.12}$$

若令 $K=K_1K_2+K_1^2K_2K_3\|B_1\|_\infty$，则 K 确实与 $w(t),\xi$，x，t 无关，而这时 (2.12) 就成为 (2.11)。证毕。

§3. 非线性问题解的存在唯一性

设 $f(t,z):[a,b]\times R^n\to R^n$, $g(\xi,\eta):R^n\times R^n\to R^n$ 是充分光滑的函数。考虑如下两点边值问题:

$$\begin{cases} z'(t)-f(t,z)=0 \\ g(z(a),z(x))=0 \end{cases} \quad a\leqslant t\leqslant x\leqslant b. \tag{3.1}$$

为了把(3.1)的左端看成一个算子，我们所引进一些 Banach 空间。

空间 $C_n[a,x]$表示$[a,x]$上一切连续的 n 维函数向量 $z(t)=(z_1(t),z_2(t),\cdots,z_n(t))^T$全体，在范数

$$\|z(t)\|_{C_n}=\max_i \max_{a\leqslant t\leqslant x}|z_i(t)| \tag{3.2}$$

的定义下所构成的Banach空间。简记为 C_n。

空间 l_∞表示 n 维向量 $\xi=(\xi_1,\cdots\xi_n)^T$ 的全体在范数

$$\|\xi\|_\infty=\max_i|\xi_i| \tag{3.3}$$

定义下所构成的Banach空间。

空间 $C_n[a,x]\times l_\infty$ 表示 $C_n[a,x]$和 l_∞ 的积空间，其元素 u 可表成$u=\begin{pmatrix} z(t) \\ \xi \end{pmatrix}$其中 $z(t)\in C_n[a,x],\xi\in l_\infty$。$u$ 的范数我们定义为

$$\|u\|_{C_n\times l_\infty}=\left\|\begin{pmatrix} z(t) \\ \xi \end{pmatrix}\right\|_{C_n\times l_\infty}=\|z(t)\|_{C_n}+\mu\|\xi\|_\infty, \tag{3.4}$$

其中 μ 为某正数。$C_n[a,x]\times l_\infty$ 为一个 Banach 空间，简记为 $C_n\times l_\infty$。

空间 $C_n^1[a,x]$ 表示 $[a,x]$ 上一切连续可微的 n 维函数向量的全体。当 $z(t)\in C_n^1[a,x]$ 时，其范数定义为

$$\|z(t)\|_{C_n^1}=\|z(t)\|_{C_n}+\lambda\|z'(t)\|_{C_n}. \tag{3.5}$$

其中 λ 为某正常数。显然 $C_n^1[a,x]$也是 Banach 空间，简记为 C_n^1。

现在我们对任一 $z(t)\in C_n^1[a,x]$令其和元素 $F(z)\in C_n[a,x]\times l_\infty$相对应

$$F(z)=\begin{pmatrix} z'(t)-f(t,z(t)) \\ g(z(a),z(x)) \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

于是 $F(z)$是整个 C_n^1 上定义的在 $C_n\times l_\infty$中取值的非线性算子。显然算子方程

$$F(z)=0 \tag{3.7}$$

和边值问题(3.1)有相同的解。

定理 3.1 若$f(t,z)$和$g(\xi,\eta)$)关于各自的变元二次连续可导

$$\left|\frac{\partial^2 f_i}{\partial z_j\partial z_k}\right|\leqslant M_2,\quad \left|\frac{\partial^2 g_i}{\partial \xi_l\partial \eta_m}\right|\leqslant M_2', \tag{3.8}$$

则F存在连续的一阶 Frechet 导算子$F'(z)$:

$$F'(z)\tilde{z}=\begin{pmatrix}\tilde{z}'(t)-\dfrac{\partial f}{\partial z}(t,z(t))\tilde{z}(t)\\ \dfrac{\partial g}{\partial \xi}(z(a),z(x))\tilde{z}(a)+\dfrac{\partial g}{\partial \eta}(z(a),z(x))\tilde{z}(x)\end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

并且

$$\|F'(z_1)-F'(z_2)\|\leqslant\gamma\|z_1-z_2\|_{C_n^1} \tag{3.10a}$$

其中

$$\gamma=n^3(M_2+2\mu M_2'). \tag{3.10b}$$

(3.10a)左端的范数是C_n^1到$C_n\times l_\infty$的有界线性算子的范数。下面有界线性算子的范数都用$\|\cdot\|$表示，而不加下标。

定理3.1的证明按导算子的定义直接核算就可得到。

对算子方程(3.7)，我们考虑用牛顿迭代过程求解，即由某初始近似$z_0\in C_n^1$出发，逐次按公式

$$z_{k+1}=z_k-(F'(z_k))^{-1}F(z_k)\qquad k=0,1,2,\cdots \tag{3.11}$$

计算出z_k。若z_0和$F(z)$满足一定的条件，则由(3.11)可确定一切z_k，并且z_k收敛到(3.7)在z_0附近的唯一解z^*。这些条件由康托洛维奇等人[5]给出。为应用方便现复述于下：

定理3.2　设$F(z)$是Banach空间C_n^1到Banach空间$C_n\times l_\infty$的非线性算子且具有连续的Frechet导算子。若在一以$z_0\in C_n^1$为心的球$S_r=\{z\mid\|z-z_0\|_{C_n^1}\leqslant r\}$中满足

i)　　$F'(z_0)^{-1}$存在，且$\|F'(z_0)^{-1}\|\leqslant\beta$。

ii)　　$\|F(z_0)\|_{C_n\times l_\infty}\leqslant\alpha$。

iii) 存在$\gamma>0$使得当$z_1,z_2\in S_r$时有

$$\|F'(z_1)-F'(z_2)\|\leqslant\gamma\|z_1-z_2\|_{C_n^1}$$

iv)

$$\alpha\beta^2\gamma<\frac{1}{2}. \tag{3.12}$$

则当$r\geqslant r_0\equiv(1-\sqrt{1-2\alpha\beta^2\gamma})/\beta\gamma$时，由(3.11)所确定的$z_k$收敛到$F(z)=0$在$S_r$中的根。此外，若

$$r<r_1\equiv(1+\sqrt{1-2\alpha\beta^2\gamma})/\beta\gamma, \tag{3.13}$$

则$F(z)=0$在S_r中只有唯一解。

利用这一定理和第二节的结果，现在我们可以证明如下定理

定理3.3　设$f(t,z)$和$g(\xi,\eta)$二次连续可导，满足(3.8)。若存在$\xi^*=(\xi_1^*,\cdots,\xi_n^*)^T\in l_\infty$使得

$$g(\xi^*,\xi^*)=0, \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi^*,\xi^*)+\frac{\partial g}{\partial \eta}(\xi^*,\xi^*)\text{满秩}, \tag{3.15}$$

则必存在一个$\delta>0$，当$a<x\leqslant a+\delta\leqslant b$时，边值问题(3.1)在$S_r\equiv\{z(t)\,|\,\|z(t)-z_0(t,x)\|_{C_n^1}\leqslant r\}$中存在唯一解。其中$r$为某一正数，

$$z_0(t,x)=\xi^*\quad a<x\leqslant b,\qquad a\leqslant t\leqslant x$$

证明 由算子方程(3.7)和边值问题(3.1)解的等价性，我们只须对算子F和定理中所给的$z_0(t,x)$核验定理3.2中的条件成立就行了。

首先我们来讨论$F'(z_0(t,x))$的有逆性及其逆算子的范数估计。按(3.9)我们有

$$F'(z_0(t,x))\tilde{z}=\begin{pmatrix}\tilde{z}'(t)-\dfrac{\partial f}{\partial z}(t,z_0(t,x))\tilde{z}(t)\\[2ex]\dfrac{\partial g}{\partial\xi}(\xi^*,\xi^*)\tilde{z}(a)+\dfrac{\partial g}{\partial\eta}(\xi^*,\xi^*)\tilde{z}(x)\end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

我们把$\dfrac{\partial f}{\partial z}(t,z_0(t,x))$记为$A(t,x)$。另外令$B_0=\dfrac{\partial g}{\partial\xi}(\xi^*,\xi^*)$，$B_1=\dfrac{\partial g}{\partial\eta}(\xi^*,\xi^*)$则由(3.15)知$B\equiv B_0+B_1$满秩，这样$A(t,x)$和$B_0,B_1$满足定理2.4和定理2.5的条件。根据定理2.4知存在$\delta>0$当$a<x\leqslant a+\delta\leqslant b$时，对任意的$u=\begin{pmatrix}w(t)\\ \xi\end{pmatrix}\in C_n\times l_\infty$都可求得唯一的$\tilde{z}\in C_n^1$，使得

$$F'(z_0)\tilde{z}=u, \tag{3.17}$$

即当$a<x\leqslant a+\delta$时$F'(z_0)$是C_n^1到$C_n\times l_\infty$的一对一的、值域为$C_n\times l_\infty$的有界线性算子。于是由著名的Banach定理知$F'(z_0)^{-1}$存在。下面我们来估计$\|F'(z_0)^{-1}\|$。由定理2.5的(2.11)知

$$\|\tilde{z}(t)\|_{C_n}\leqslant K_1K_3\|\xi\|_\infty+K(x-a)\|w\|_{C_n}. \tag{3.18}$$

另外，由(3.17)知

$$\tilde{z}'(t)=A(t,x)\tilde{z}(t)+w(t). \tag{3.19}$$

所以我们若令

$$\max_{i,j}\max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\frac{\partial f_i(t,\xi^*)}{\partial z_j}\right|=M_1,$$

则由(3.19)得

$$\|\tilde{z}'(t)\|_{C_n}\leqslant nM_1\|z(t)\|_{C_n}+\|w(t)\|_{C_n}. \tag{3.20}$$

这样，当$a<x\leqslant a+\delta$时，我们有

$$\|F'(z_0)^{-1}u\|C_n^1=\|\tilde{z}\|_{C_n}+\lambda\|\tilde{z}'\|_{C_n}\leqslant(1+n\lambda M_1)\|\tilde{z}\|_{C_n}+\lambda\|w\|_{C_n} \tag{3.21}$$

$$\leqslant\left\{(1+n\lambda M_1)\left[\frac{K_1K_3}{\mu}+K(x-a)\right]+\lambda\right\}\|u\|_{C_n\times l\infty},$$

即当 $a<x\leqslant a+\delta$ 时，我们有

$$\|F'(z_0)^{-1}\|\leqslant\beta, \tag{3.22a}$$

$$\beta=\frac{\overline{K}_1}{\mu}+\overline{K}_2(x-a)+\lambda\left[1+\frac{\overline{K}_3}{\mu}+\overline{K}_4(x-a)\right] \tag{3.22b}$$

其中 $\overline{K}_1$，$\overline{K}_2$，$\overline{K}_3$，$\overline{K}_4$ 为和 x,μ,λ 无关的正常数。

另外由(3.10a,b)知，对任意 $z_1,z_2\in C_n^1$ 有

$$\|F'(z_1)-F'(z_2)\|\leqslant\gamma\|z_1-z_2\|_{C_n^1}, \tag{3.23a}$$

其中

$$\gamma=n^3(M_2+2\mu M_2'). \tag{3.23b}$$

最后我们若令

$$\alpha=\max_i\max_{a\leqslant t\leqslant b}|f_i(t,\xi^*)|,$$

则 α 与 x,t,λ,μ 无关。由 $F(z_0(t,x))=\begin{pmatrix}f(t,z_0(t,x))\\0\end{pmatrix}$，

所以得

$$\|F(z_0)\|_{C_n}\times l_\infty=\|f(t,z_0(t,x))\|_{C_n}\leqslant\alpha. \tag{3.24}$$

由(3.22)(3.23)(3.24)，得到

$$\alpha\beta^2\gamma=\frac{an^3(M_2+2\mu M_2')}{\mu^2}\{\overline{K}_1+\mu\overline{K}_2(x-a)+\lambda[\mu+\overline{K}_3+\overline{K}_4\mu(x-a)]\}^2 \tag{3.25}$$

现在我们取 $\lambda=\frac{1}{\mu}$，$\overline{\delta}=\frac{1}{\mu}$，并令 μ 充分大使 $\overline{\delta}\leqslant\delta$。于是当 $a<x\leqslant a+\overline{\delta}$ 时，由(3.25)得

$$\alpha\beta^2\gamma\leqslant\frac{an^3(M_2+2\mu M_2')}{\mu^2}\{\overline{K}_1+\overline{K}_2+1+\frac{1}{\mu}(\overline{K}_3+\overline{K}_4)\}^2. \tag{3.26}$$

当 $\mu\to+\infty$ 时，(3.26)右端趋于零，于是可取一适当的 μ_0 使得(3.26)的右边小于 $\frac{1}{2}$。这时我们有

$$\alpha\beta^2\gamma<\frac{1}{2}.$$

若我们取 r 为 r_0 和 r_1 之间的任一数，例如取 $r=\frac{1}{\beta\gamma}$，则当 $a<x\leqslant a+\overline{}$ 时对(3.6)所定义的非线性算子 $F(z)$ 及 $z_0(t,x)$，定理 3.2 的条件全部成立。利用定理 3.2，定理 3.3 证毕。

参考文献

[1] Roberts, S.M., Shipman, J.S., Ellis, W.J., SIAM Numer. Anal., Vol. 6, 1969; pp. 347—358.

[2] Keller, H.B., J. Math. Anal. Appl., Vol. 36, 1971, pp. 611—621.

[3] Roberts, S.M., Shipman, J.S., Two-point Boundary Value Problems: Shooting Methods, 1972, Amer. Elsvier., New York.

[4] Keller, H.B., Numerical Methods for Two-Point Boundary Value Problems, Blaisdell. Waltham, Mass., 1968.

[5] Kantorovich, L.V., Functional Analysis and Applied Mathematics, YMH(b)3, 1948, pp.89—185.

摘要. 本文利用康托洛维奇定理证明了非线性两点边值问题的一个存在唯一性定理。

An Existence and Uniqueness Theorem for Non-lenear Two-Point Boundary Value Problems

By Zhu Zhengyou (朱正佑)

Abstract

In this paper an existence and uniqueness theorem for non-linear two-point boundary value problem is proved by means of Kantorovich's theorem.