# 关于带两个位移的广义 Hilbert 问题*

赵 桢

(北京师范大学数学系)

在文章[1]中提出了带位移的广义 Hilbert 问题，并对这一问题建立了 Noether 性条件。在文章[2]中又利用带位移的奇异积分方程理论得到了这一问题可解的充分必要条件以及指数计算公式。显然，这些结果推广了一般 Hilbert 问题的相应结论。本文目的是利用作者在[4]、[5]中建立的理论解决带两个位移的广义 Hilbert 问题，并得到了相应的可解条件和指数计算公式。

**1．问题提法** 假设 $\Gamma$ 是简单的封闭 Ляпунов 曲线，它围出一个有界区域 $D^+$，用 $D^-$ 代表闭区域 $D^+ + \Gamma$ 到全平面的补集。我们提出以下边值问题：寻求在区域 $D^+$ 内解析，在边界 $\Gamma$ 上满足条件 $H_\mu(\Gamma)$ 的函数 $\Phi(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，$z=x+iy$，它在边界上满足条件

$$a_0(t)u(t)+a_1(t)u[\alpha(t)]+a_2(t)u[\beta(t)]+b_0(t)v(t)$$
$$+b_1(t)v[\alpha(t)]+b_2(t)v[\beta(t)]=h(t), \tag{1.1}$$

其中 $a_i(t)$，$b_i(t)$，$i=0,1,2$ 和 $h(t)$ 是满足条件 $H_\mu(\Gamma)$ 的实函数，$\alpha(t)$，$\beta(t)$ 是两个不同的同胚，满足条件 $\alpha[\alpha(t)]=t$，$\beta[\beta(t)]=t$，它们可以是正位移或反位移，假设 $\alpha'(t)$，$\beta'(t)\in H_\mu(\Gamma)$，$\alpha'(t)\cdot\beta'(t)\neq 0$。除此以外，我们还假设 $\alpha[\beta(t)]=\beta[\alpha(t)]$。为了方便，以后记 $r(t)=\alpha[\beta(t)]=\beta[\alpha(t)]$，显然 $r(t)$ 也是满足条件 $r[r(t)]=t$ 的位移。

条件 (1.1) 还可以改写成：

$$\mathrm{Re}\{A(t)\Phi^+(t)+B(t)\Phi^+[\alpha(t)]+C(t)\Phi^+[\beta(t)]\}=h(t) \tag{1.2}$$

其中 $A(t)=[a_0(t)-ib_0(t)]$，$B(t)=[a_1(t)-ib_1(t)]$，$C(t)=[a_2(t)-ib_2(t)]$。

**2．与问题(1、2)(或者说问题(1、1))等价的奇异积分方程．**

利用已知的解析函数积分表示式[3]：

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\mu(\tau)}{\tau-z}d\tau+iC, \tag{2.1}$$

其中 $\mu(t)$ 是实函数，它满足条件 $H_\mu(\Gamma)$，而 $C$ 是实常数．我们取它在边界 $\Gamma$ 上的边界值 $\Phi^+(t)$，$\Phi^+[\alpha(t)]$，$\Phi^+[\beta(t)]$，然后代入边界条件 (1.2)，将得到一个带两个位移的奇异积分方程：

* 1981年3月6日收到．

$$\mathscr{K}_\mu \equiv \mathrm{Re}\Big\{A(t)\mu(t)+B(t)\mu[\alpha(t)]+C(t)\mu[\beta(t)]+$$

$$+\frac{A(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{\nu_1 B(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\alpha'(\tau)\mu[\alpha(\tau)]}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}d\tau$$

$$+\frac{\nu_2 C(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\beta'(\tau)\mu[\beta(\tau)]}{\beta(\tau)-\beta(t)}d\tau\Big\}=g(t), \tag{2.2}$$

其中 $g(t)=2h(t)+2CIm[A(t)+B(t)+C(t)]$，$\nu_1,\nu_2$ 取值1或者 $-1$，这依赖于 $\alpha(t)$，$\beta(t)$是正位移或者反位移．问题（1.2）与方程（2.2）在下述意义下是等价的，即如果问题（1.2）有解则通过(2.1)知道其密度 $\mu(t)$ 必是方程(2.2)的解，反过来，如果方程（2.2）有解 $\mu(t)$，则通过(2.1)得到解析函数 $\Phi(z)$，它必为问题(1.2)的解．根据一般确定相联算子的积分等式[3]：

$$\int_\Gamma \mu(t)\mathscr{K}'\psi dt=\int_\Gamma \psi(t)\mathscr{K}\mu dt, \tag{2.3}$$

可以得到方程(2.2)的相联齐次方程：

$$\mathscr{K}'\psi\equiv[A(t)+\overline{A(t)}]\psi(t)+\nu_1\{B[\alpha(t)]+\overline{B[\alpha(t)]}\}\alpha'(t)\psi[\alpha(t)]$$

$$+\nu_2\{C[\beta(t)]+\overline{C[\beta(t)]}\}\beta'(t)\psi[\beta(t)]-$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\Big[\frac{A(\tau)}{\tau-t}-\overline{\frac{t'^2(s)A(\tau)}{\bar\tau-\bar t}}\Big]\psi(\tau)d\tau-$$

$$-\frac{\nu_1}{\pi i}\int_\Gamma\Big[\frac{B[\alpha(\tau)]}{\tau-t}-\overline{\frac{t'^2(s)B[\alpha(\tau)]}{\bar\tau-\bar t}}\Big]\alpha'(\tau)\psi[\alpha(\tau)]d\tau$$

$$-\frac{\nu_2}{\pi i}\int_\Gamma\Big[\frac{C[\beta(\tau)]}{\tau-t}-\overline{\frac{t'^2(s)C[\beta(\tau)]}{\bar\tau-\bar t}}\Big]\beta'(\tau)\psi[\beta(\tau)]d\tau$$

$$=0. \tag{2.4}$$

我们考虑到以下等式[3]：

$$t'(s)\Big|_{t=\alpha(t)}=\frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}t'(s),$$

$$t'(s)\Big|_{t=\beta(t)}=\frac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|}t'(s);$$

如果对方程(2.4)的两端同乘上函数 $t'(s)$将得到：

$$t'(s)\mathscr{K}'\psi\equiv[A(t)+\overline{A(t)}]\psi(t)t'(s)+\nu_1\{B[\alpha(t)]+\overline{B[\alpha(t)]}\}$$

$$|\alpha'(t)|\psi[\alpha(t)]t'(s)|_{t=\alpha(t)}+\nu_2\{C[\beta(t)]+\overline{C[\beta(t)]}\}$$

$$|\beta'(t)|\psi[\beta(t)]t'(s)\Big|_{t=\beta(t)}-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\Big[\frac{t'(s)A(\tau)}{\tau-t}-\frac{\overline{t'(s)}\ \overline{A(\tau)}}{\bar\tau-\bar t}\Big]$$

$$\psi(\tau)\tau'(\sigma)d\sigma-\frac{\nu_1}{\pi i}\iint_{\Gamma}\left[\frac{t'(s)B[\alpha(\tau)]}{\tau-t}-\frac{\overline{t'(s)}\ \overline{B[\alpha(\tau)]}}{\bar{\tau}-\bar{t}}\right]|\alpha'(\tau)|$$

$$\psi[\alpha(\tau)]\tau'(\sigma)\Big|_{\tau=\alpha(\tau)}d\sigma-\frac{\nu_2}{\pi i}\iint_{\Gamma}\left[\frac{t'(s)C[\beta(\tau)]}{\tau-t}-\right.$$

$$\left.-\frac{\overline{t'(s)}\ \overline{C[\beta(\tau)]}}{\bar{\tau}-\bar{t}}\right]|\beta'(\tau)|\psi[\beta(\tau)]\tau'(\sigma)\Big|_{\tau=\beta(\tau)}d\sigma=0$$

不难看出，方程$t'(s)\mathscr{K}'\psi=0$对于新未知函数$\gamma(t)=\psi(t)t'(s)$来说，其核与系数都是实的。这样，我们就可以在实函数类中来求解，也就是说，可以认为$\gamma(t)$是实函数。方程$t'(s)\mathscr{K}'\psi=0$还可以改写成：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\{A(t)\gamma(t)+\nu_1B[\alpha(t)]|\alpha'(t)|\gamma[\alpha(t)]+\nu_2C[\beta(t)]|\beta'(t)|\gamma[\beta(t)]\\&-\frac{t'(s)}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{A(\tau)\gamma(\tau)+\nu_1B[\alpha(\tau)]|\alpha'(\tau)|\gamma[\alpha(\tau)]+\nu_2C[\beta(\tau)]|\beta'|(\tau)|\gamma[\beta(\tau)]}{\tau-t}d\sigma\\&=0,\end{aligned}\tag{2.5}$$

由于$t'(s)\neq0$，所以方程(2.5)与(2.4)显然是等价的，为了方便，以后我们把方程(2.5)也叫做方程(2.2)的相联方程。如果我们用$k$和$k'$分别代表齐次方程(2.2.)和(2.5)线性无关解的个数，那么，根据[4]中的结果知道$Ind\mathscr{K}=k-k'$。另外，对于方程(2.2)来说，其特征部分的系数将是：

$$a_0(t)=\frac{1}{2}(A(t)+\overline{A(t)}),\ a_1(t)=\frac{1}{2}(B(t)+\overline{B(t)}),\ a_2(t)=\frac{1}{2}(C(t)+\overline{C(t)})$$

$$ib_0(t)=\frac{1}{2}(A(t)-\overline{A(t)}),\ i\nu_1b_1(t)=\frac{\nu_1}{2}(B(t)-\overline{B(t)}),\ i\nu_2b_2(t)=\frac{\nu_2}{2}(C(t)-\overline{C(t)}).$$

从而知道，其对应方程组之特征部分的系数矩阵将是：

$$p(f)=\begin{pmatrix}a_0(t)&a_1(t)&a_2(t)&0\\a_1[\alpha(t)]&a_0[\alpha(t)]&0&a_2[\alpha(t)]\\a_2[\beta(t)]&0&a_0[\beta(t)]&a_1[\beta(t)]\\0&a_2[\gamma(t)]&a_1[\gamma(t)]&a_0[\gamma(t)]\end{pmatrix}$$

$$q(f)=\begin{pmatrix}b_0(t)&\nu_1b_1(t)&\nu_2b_2(t)&0\\b_1[\alpha(t)]&\nu_1b_0[\alpha(t)]&0&\nu_1\nu_2b_2[\alpha(t)]\\b_2[\beta(t)]&0&\nu_2b_0[\beta(t)]&\nu_1\nu_2b_1[\beta(t)]\\0&\nu_1b_2[\gamma(t)]&\nu_2b_1[\gamma(t)]&\nu_1\nu_2b_0[\gamma(t)]\end{pmatrix}$$

对于方程(2.2)将有以下结论：[4],[6]

**定理1** (Noether性条件)方程(2.2)是Noether方程的充分必要条件是

$$\det(p(t)+jq(t))\neq0,\ j=1\text{ 或者 }-1.\tag{2.6}$$

**定理2** (指数公式) 当条件(2.6)满足时，奇异积分方程(2.2)的指数公式是

$$Ind\mathscr{K}=k-k'=\frac{1}{8\pi}\left\{arg\frac{det(p(t)-q(t))}{det(p(t)+q(t))}\right\}_\Gamma=\frac{1}{4\pi}\left\{argdet(p(t)-q(t))\right\}_\Gamma \qquad (2.7)$$

**定理3** （可解条件） 如果条件(2.6)满足，则奇异积分方程(2.2)可解的充分必要条件是

$$\int_\Gamma\left\{h(t)+CIm[A(t)+B(t)+C(t)]\right\}\gamma_j(t)ds=0, \qquad (2.8)$$

其中$\{\gamma_j(t)\}$ $j=1,2,\cdots,k'$ 是相联齐次方程(2.5)线性无关解的完备系．

**3．问题(1.2)的相联问题．** 假设$\gamma(t)$是相联方程(2.5)的解，我们做哥西型积分：

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\psi(\tau)}{\tau-z}d\sigma, \qquad (3.1)$$

其中 $\psi(\tau)=A(\tau)\gamma(\tau)+\nu_1B[\alpha(\tau)]|\alpha'(\tau)|\gamma[\alpha(\tau)]+\nu_2C[\beta(\tau)]|\beta'(\tau)|\gamma[\beta(\tau)]$， (3.2)

根据方程(2.5)，我们将有

$$\mathrm{Re}\{t'(s)\Psi^-(t)\}=0, \qquad (3.3)$$

或者

$$t'(s)\Psi^-(t)+\overline{t'(s)\Psi^-(t)}=0. \qquad (3.4)$$

我们将证明当满足条件

$$\mathrm{Im}\left\{\int_\Gamma\psi(\tau)d\sigma\right\}=0 \qquad (3.5)$$

时，一定有函数$\Psi^-(z)\equiv0$，$z\in D^-$．首先，条件(3.5)可以写成：

$$\mathrm{Im}\left\{\int_\Gamma A(\tau)\gamma(\tau)d\sigma+\nu_1\int_\Gamma B[\alpha(\tau)]|\alpha'(\tau)|\gamma[\alpha(\tau)]d\sigma\right.$$
$$\left.+\nu_2\int_\Gamma C[\beta(\tau)]|\beta'(\tau)|\gamma[\beta(\tau)]d\sigma\right\}=0,$$

在上式第二、第三两个积分中分别用$\alpha(\tau)$，$\beta(\tau)$代替$\tau$将得到

$$\mathrm{Im}\left\{\int_\Gamma[A(\tau)+B(\tau)+C(\tau)]\gamma(\tau)d\sigma\right\}=0. \qquad (3.6)$$

现在来证明$\Psi^-(z)\equiv0$的结论．由于$\Psi^-(z)$可以表成一个哥西型积分，于是应该有$\Psi^-(\infty)=0$．这时候，如果我们假设$\Psi^-(z)\not\equiv0$.那么就将得出矛盾．事实上，我们用$N_{D^-}$和$N_\Gamma$分别代表函数$\Psi^-(z)$在区域$D^-$内和在边界$\Gamma$上零点的个数．根据广义幅角原理，将有

$$\frac{1}{2\pi}\left\{arg\Psi^-(t)\right\}_\Gamma=-N_{D^-}-\frac{1}{2}N_\Gamma;$$

考虑到，$\frac{1}{2\pi}\left\{arg\ t'(s)\right\}_\Gamma=1$，所以根据边界条件(3.4)我们得到$2N_{D^-}+N_\Gamma=2$，但是，

我们知道$N_{D^-}\geqslant 1$，因此，有$N_\Gamma=0$，$N_{D^-}=1$，这就是说$\Psi^-(z)$只在$\infty$点具有一阶零点，于是有

$$\int_\Gamma \Psi^-(t)dt=-2\pi i\,Res\Psi^-(z)\Big|_{z=\infty}\neq 0$$

另一方面根据表示式(3.1)我们得到

$$\begin{aligned}&Res\Psi^-(z)\big|_{z=\infty}\\&=\frac{-1}{2\pi i}\int_\Gamma\Big\{A(\tau)\gamma(\tau)+\nu_1B[\alpha(\tau)]|\alpha'(\tau)|\gamma[\alpha(\tau)]+\nu_2C[\beta(\tau)]|\beta'(\tau)|\gamma[\beta(\tau)]\Big\}d\sigma\\&=\frac{-1}{2\pi i}\int_\Gamma[A(\tau)+B(\tau)+C(\tau)]\gamma(\tau)d\sigma\neq 0\end{aligned}\tag{3.7}$$

将边界条件(3.4)沿$\Gamma$关于$\sigma$进行积分，得到

$$\mathrm{Re}\Big\{\int_\Gamma\Psi^-(t)dt\Big\}=0,\tag{3.8}$$

从而有

$$\mathrm{Re}\Big\{\int_\Gamma[A(\tau)+B(\tau)+C(\tau)]\gamma(\tau)d\sigma=0.$$

因此，

$$\mathrm{Im}\Big\{\int_\Gamma[A(\tau)+B(\tau)+C(\tau)]\gamma(\tau)d\sigma\neq 0.$$

这刚好与(3.6)是矛盾的．于是应该有$\Psi^-(z)\equiv 0$，$z\in D^-$．这样一来，由(3.1)得到等式：

$$\begin{aligned}&A(t)\gamma(t)+\nu_1B[\alpha(t)]|\alpha'(t)|\gamma[\alpha(t)]+\nu_2C[\beta(t)]|\beta'(t)|\gamma[\beta(t)]\\&\qquad=t'(s)\Psi^+(t).\end{aligned}\tag{3.9}$$

下面分四种不同情形来进行讨论：

（一）$\alpha(t)$，$\beta(t)$都是正位移的情形：这时候，把方程(3.9)中的变量$t$分别换成$\alpha(t)$，$\beta(t)$，$r(t)$再把得到的方程与原来的方程联立，我们得到方程组：

$$\begin{cases}A(t)\gamma(t)+B[\alpha(t)]|\alpha'(t)|\gamma[\alpha(t)]+C[\beta(t)]|\beta'(t)|\gamma[\beta(t)]=t'(s)\Psi^+(t),\\B(t)\gamma(t)+A[\alpha(t)]|\alpha'(t)|\gamma[\alpha(t)]+C[r(t)]|r'(t)|\gamma[r(t)]=t'(s)\alpha'(t)\Psi^+[\alpha(t)],\\C(t)\gamma(t)+A[\beta(t)]|\beta'(t)|\gamma[\beta(t)]+B[r(t)]|r'(t)|\gamma[r(t)]=t'(s)\beta'(t)\Psi^+[\beta(t)],\\C[\alpha(t)]|\alpha'(t)|\gamma[\alpha(t)]+B[\beta(t)]|\beta'(t)|\gamma[\beta[t)]+A[r(t)]|r'(t)|\gamma[r(t)]=\\\qquad=t'(s)r'(t)\Psi^+[r(t)],\end{cases}\tag*{(3.9)$_1$}$$

这个方程组的系数行列式是

$$\Delta_1^*(t)=\begin{vmatrix}A(t)&B[\alpha(t)]|\alpha'(t)|&C[\beta(t)]|\beta'(t)|&0\\B(t)&A[\alpha(t)]|\alpha'(t)|&0&C[r(t)]|r'(t)|\\C(t)&0&A[\beta(t)]|\beta'(t)|&B[r(t)]|r'(t)|\\0&C[\alpha(t)]|\alpha'(t)|&B[\beta(t)]|\beta'(t)|&A[r(t)]|r'(t)|\end{vmatrix}$$

$$=|\alpha'(t)|\cdot|\beta'(t)|\cdot|r'(t)|\cdot\Delta_1(t),$$

其中

$$\Delta_1(t)=\begin{vmatrix} A(t) & B(t) & C(t) & 0 \\ B[\alpha(t)] & A[\alpha(t)] & 0 & C[\alpha(t)] \\ C[\beta(t)] & 0 & A[\beta(t)] & B[\beta(t)] \\ 0 & C[r(t)] & B[r(t)] & A[r(t)] \end{vmatrix}$$

利用 Noether 性条件(2.6)不难知道 $\Delta_1(t)\neq 0$，根据条件 $|\alpha'(t)|\cdot|\beta'(t)|\cdot|r'(t)|\neq 0$，从而，有 $\Delta_1^*(t)\neq 0$，解方程组$(3.9)_1$，可以得到：

$$\gamma(t)=\frac{1}{\Delta_1^*(t)}\begin{vmatrix} t'(s)\Psi^+(t) & B[\alpha(t)]|\alpha'(t)| & C[\beta(t)]|\beta'(t)| & 0 \\ t'(s)\alpha'(t)\Psi^+[\alpha(t)] & A[\alpha(t)]|\alpha'(t)| & 0 & C[r(t)]|r'(t)| \\ t'(s)\beta'(t)\Psi^+[\beta(t)] & 0 & A[\beta(t)]|\beta'(t)| & B[r(t)]|r'(t)| \\ t'(s)r'(t)\Psi^+[r(t)] & C[\alpha(t)]|\alpha'(t)| & B[\beta(t)]|\beta'(t)| & A[r(t)]|r'(t)| \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{\Delta_1(t)}\Big\{t'(s)[A_1^*(t)\Psi^+(t)+B_1^*(t)\Psi^+[\alpha(t)]\alpha'(t)+C_1^*(t)\Psi^+[\beta(t)]\beta'(t)+$$

$$+D_1^*(t)\Psi^+[r(t)]r'(t)\,]\Big\} \tag{3.10}$$

其中

$$A_1^*(t)=A[\alpha(t)]A[\beta(t)]A[r(t)]-A[\alpha(t)]B[\beta(t)]B[r(t)]$$
$$-A[\beta(t)]C[r(t)]C[\alpha(t)],$$
$$B_1^*(t)=B[\alpha(t)]B[\beta(t)]B[r(t)]-B[\alpha(t)]A[\beta(t)]A[r(t)]$$
$$-B[r(t)]C[\alpha(t)]C[\beta(t)],$$
$$C_1^*(t)=C[\alpha(t)]C[\beta(t)]C[r(t)]-C[\beta(t)]A[\alpha(t)]A[r(t)]$$
$$-C[r(t)]B[\alpha(t)]B[\beta(t)],$$
$$D_1^*(t)=A[\alpha(t)]C[\beta(t)]B[r(t)]+A[B(t)]B[\alpha(t)]C[r(t)],$$

考虑到 $\gamma(t)$ 应该是实函数，将(3.10)式右端的分子分母同乘 $\overline{\Delta_1(t)}$ 将得到边值问题：

$$\mathrm{Re}\{i\overline{\Delta_1(t)}t'(s)[A_1^*(t)\Psi^+(t)+B_1^*(t)\alpha'(t)\Psi^+[\alpha(t)]+$$
$$+C_1^*(t)\beta'(t)\Psi^+[\beta(t)]+D_1^*(t)r'(t)\Psi^+[r(t)]\}=0\,. \tag{3.11}$$

问题(3.11)就是当 $\alpha(t)$，$\beta(t)$ 都是正位移时，问题(1.2)的相联问题。

（二）　$\alpha(t)$，$\beta(t)$ 都是反位移的情形．仿照上面情形那样，把方程(3.9)中的变量 $t$ 分别换成 $\alpha(t)$，$\beta(t)$，$r(t)$，再把得到的方程与原来的方程联立，这时候，为了方便，我们还把第二和第三个方程取共轭值，最后得到方程组：

$$A(t)\gamma(t)-B[\alpha(t)]|\alpha'(t)|\gamma[\alpha(t)]-C[\beta(t)]|\beta'(t)|\gamma[\beta(t)]=t'(s)\Psi^+(t),$$

$$-\overline{B(t)}\gamma(t)+\overline{A[\alpha(t)]}|\alpha'(t)|\gamma[\alpha(t)]-\overline{C[r(t)]}|r'(t)|\gamma[r(t)]$$
$$=\overline{t'(s)\alpha'(t)\Psi^+[\alpha(t)]},$$

$$-\overline{C(t)}\gamma(t)+\overline{A[\beta(t)]}|\beta'(t)|\gamma[\beta(t)]-\overline{B[r(t)]}|r'(t)|\gamma[r(t)]$$
$$=\overline{t'(s)\beta'(t)\Psi^+[\beta(t)]},$$

$$-C[\alpha(t)]|\alpha'(t)|\gamma[\alpha(t)]-B[\beta(t)]|\beta'(t)|\gamma[\beta(t)]+A[r(t)]|r'(t)|\gamma[r(t)]$$
$$=t'(s)r'(t)\Psi^+[r(t)], \tag{3.9}$$

这个方程组的系数行列式是：

$$\Delta_2^*(t)=\begin{vmatrix} A(t) & -B[\alpha(t)]|\alpha'(t)| & -C[\beta(t)]|\beta'(t)| & 0 \\ -\overline{B(t)} & \overline{A[\alpha(t)]}|\alpha'(t)| & 0 & -\overline{C[r(t)]}|r'(t)| \\ -\overline{C(t)} & 0 & \overline{A[\beta(t)]}|\beta'(t)| & -\overline{B[r(t)]}|r'(t)| \\ 0 & -C[\alpha(t)]|\alpha'(t)| & -B[\beta(t)]|\beta'(t)| & A[r(t)]|r'(t)| \end{vmatrix}$$
$$=|\alpha'(t)|\cdot|\beta'(t)|\cdot|r'(t)|\cdot\Delta_2(t),$$

其中

$$\Delta_2(t)=\begin{vmatrix} A(t) & -\overline{B(t)} & -\overline{C(t)} & 0 \\ -B[\alpha(t)] & \overline{A[\alpha(t)]} & 0 & -C[\alpha(t)] \\ -C[\beta(t)] & 0 & \overline{A[\beta(t)]} & -B[\beta(t)] \\ 0 & -\overline{C[r(t)]} & -\overline{B[r(t)]} & A[r(t)] \end{vmatrix}.$$

利用 Noether 性条件(2.6)仿照情形(一)，不难知道 $\Delta_2^*(t)\neq 0$，于是解方程组 $(3.9)_2$ 可以得到

$$\gamma(t)=\frac{1}{\Delta_2^*(t)}\begin{vmatrix} t'(s)\Psi^+(t) & -B[\alpha(t)]|\alpha'(t)| & -C[\beta(t)]|\beta'(t)| & 0 \\ \overline{t'(s)\alpha'(t)\Psi^+[\alpha(t)]} & \overline{A[\alpha(t)]}|\alpha'(t)| & 0 & -\overline{C[r(t)]}|r'(t)| \\ \overline{t'(s)\beta'(t)\Psi^+[\beta(t)]} & 0 & \overline{A[\beta(t)]}|\beta'(t)| & -\overline{B[r(t)]}|r'(t)| \\ t'(s)r'(t)\Psi^+[r(t)] & -C[\alpha(t)]|\alpha'(t)| & -B[\beta(t)]|\beta'(t)| & A[r(t)]|r'(t)| \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{\Delta_2(t)}\Big\{A_2^*(t)t'(s)\Psi^+(t)+B_2^*(t)\overline{t'(s)\alpha'(t)\Psi^+[\alpha(t)]}$$
$$+C_2^*(t)\overline{t'(s)\beta'(t)\Psi^+[\beta(t)]}+D_2^*(t)t'(s)r'(t)\Psi^+[r(t)]\Big\}, \tag{3.12}$$

其中
$$A_2^*(t)=\overline{A[\alpha(t)]}\,\overline{A[\beta(t)]}A[r(t)]-\overline{A[\alpha(t)]}B[\beta(t)]\overline{B[r(t)]}$$
$$-\overline{A[\beta(t)]}\,C[\alpha(t)]\overline{C[r(t)]},$$

$$B_2^*(t)=B[\alpha(t)]\overline{A[\beta(t)]}A[r(t)]+\overline{B[r(t)]}C[\beta(t)]C[\alpha(t)]$$
$$-B[\alpha(t)]B[\beta(t)]\overline{B[r(t)]},$$

$$C_2^*(t) = C[\beta(t)]\overline{A[\alpha(t)]}A[r(t)] + B[\alpha(t)]B[\beta(t)]\overline{C[r(t)]}$$
$$- C[\alpha(t)]C[\beta(t)]\overline{C[r(t)]},$$
$$D_2^*(t) = \overline{A[\alpha(t)]}C[\beta(t)]\overline{B[r(t)]} + \overline{A[\beta(t)]}B[\alpha(t)]\overline{C[r(t)]},$$

考虑到$\gamma(t)$应该是实函数，把(3.12)式右端的分子分母同乘以$\overline{\Delta_2(t)}$，将得到边值问题

$$\mathrm{Re}\Big\{ i\overline{\Delta_2(t)}[A_2^*(t)t'(s)\Psi^+(t) + B_2^*(t)\overline{\alpha'(t)t'(s)\Psi^+[\alpha(t)]}$$
$$+ C_2^*(t)\overline{\beta'(t)t'(s)\Psi^+[\beta(t)]} + D_2^*(t)r'(t)t'(s)\Psi^+[r(t)]]\Big\} = 0, \qquad (3.13)$$

问题(3.13)就是当$\alpha(t)$，$\beta(t)$都是反位移时，问题(1.2)的相联问题.

（三）完全类似地可以得到$\alpha(t)$是正位移，而$\beta(t)$是反位移（或者$\alpha(t)$是反位移，而$\beta(t)$是正位移）情形下，问题(1.2)的相联问题.

为了对于$\alpha(t)$，$\beta(t)$分别是正位移或反位移情形统一我们的记法，还将引入算子：

$$\mathbf{C}_\nu\varphi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & 如果\ \nu = 1, \\ \overline{\varphi(t)}, & 如果\ \nu = -1; \end{cases}$$

如果把方程(3.9)中的变量分别换成$\alpha(t)$，$\beta(t)$，$r(t)$并相应地把得到的方程两端再分别作用算子$\mathbf{C}_{\nu_1}$，$\mathbf{C}_{\nu_2}$，$\mathbf{C}_{\nu_1\nu_2}$以后所得到的方程与原来的方程联立，可以得到方程组：

$$A(t)\gamma(t) + \nu_1 B[\alpha(t)]|\alpha'(t)|\gamma[\alpha(t)] + \nu_2 C[\beta(t)]|\beta'(t)|\gamma[\beta(t)]$$
$$= t'(s)\Psi^+(t),$$
$$\mathbf{C}_{\nu_1}\{\nu_1 B(t)\gamma(t) + A[\alpha(t)]|\alpha'(t)|\gamma[\alpha(t)] + \nu_2 C[r(t)]|r'(t)|\gamma[r(t)]\}$$
$$= \mathbf{C}_{\nu_1}\{t'(s)\alpha'(t)\Psi^+[\alpha(t)]\},$$
$$\mathbf{C}_{\nu_2}\{\nu_2 C(t)\gamma(t) + A[\beta(t)]|\beta'(t)|\gamma[\beta(t)] + \nu_1 B[r(t)]|r'(t)|\gamma[r(t)]\}$$
$$= \mathbf{C}_{\nu_2}\{t'(s)\beta'(t)\Psi^+[\beta(t)]\},$$
$$\mathbf{C}_{\nu_1\nu_2}\{\nu_2 C[\alpha(t)]|\alpha'(t)|\gamma[\alpha(t)] + \nu_1 B[\beta(t)]|\beta'(t)|\gamma[\beta(t)] + A[r(t)]|r'(t)|[r(t)]$$
$$= \mathbf{C}_{\nu_1\nu_2}\{t'(s)r'(t)\Psi^+[r(t)]\}, \qquad (3.9)^*$$

这个方程组的系数行列式是$\Delta^*(t) = |\alpha'(t)|\cdot|\beta'(t)\cdot|r'(t)|\cdot\Delta(t)$，其中

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} A(t) & \nu_1\mathbf{C}_{\nu_1}B(t) & \nu_2\mathbf{C}_{\nu_2}C(t) & 0 \\ \nu_1 B[\alpha(t)] & \mathbf{C}_{\nu_1}A[\alpha(t)] & 0 & \nu_2\mathbf{C}_{\nu_1\nu_2}C[\alpha(t)] \\ \nu_2 C[\beta(t)] & 0 & \mathbf{C}_{\nu_2}A[\beta(t)] & \nu_2\mathbf{C}_{\nu_1\nu_2}B[\beta(t)] \\ 0 & \nu_2\mathbf{C}_{\nu_1}C[r(t)] & \nu_1\mathbf{C}_{\nu_2}B[r(t)] & \mathbf{C}_{\nu_1\nu_2}A[r(t)] \end{vmatrix}$$

利用Noether性条件(2.6)不难知道$\Delta(t)\neq 0$，从而有$\Delta^*(t)\neq 0$，通过解方程组(3.9)*可

以得到

$$\gamma(t)=\frac{1}{\Delta(t)}\begin{vmatrix} t'(s)\Psi^+(t) & \nu_1B[\alpha(t)] & \nu_2C[\beta(t)] & 0\\ \mathbf{C}_{\nu_1}\{t'(s)\alpha'(t)\Psi^+[\alpha(t)]\} & \mathbf{C}_{\nu_1}A[\alpha(t)] & 0 & \nu_2\mathbf{C}_{\nu_1}C[r(t)]\\ \mathbf{C}_{\nu_2}\{t'(s)\beta'(t)\Psi^+[\beta(t)]\} & 0 & \mathbf{C}_{\nu_2}A[\beta(t)] & \nu_1\mathbf{C}_{\nu_2}B[r(t)]\\ \mathbf{C}_{\nu_1\nu_2}\{t'(s)r'(t)\Psi^+[r(t)]\} & \nu_2C_{\nu_1\nu_2}C[\alpha(t)] & \nu_2\mathbf{C}_{\nu_1\nu_2}B[\beta(t)] & \mathbf{C}_{\nu_1\nu_2}A[r(t)]\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{\Delta(t)}\Big\{A^*(t)t'(s)\Psi^+(t)+B^*(t)\mathbf{C}_{\nu_1}[t'(s)\alpha(t)\Psi^+[\alpha(t)]+$$

$$+C^*(t)\mathbf{C}_{\nu_2}[t'(s)\beta'(t)\Psi^+[\beta(t)]]+D^*(t)\mathbf{C}_{\nu_1\nu_2}[t'(s)r'(t)\Psi^+[r(t)]]\Big\}\tag{3.14}$$

其中　$A^*(t)=\mathbf{C}_{\nu_1}A[\alpha(t)\mathbf{C}_{\nu_2}A[\beta(t)]\mathbf{C}_{\nu_1\nu_2}A[r(t)]-\mathbf{C}_{\nu_1}C[r(t)]\mathbf{C}_{\nu_2}A[\beta(t)]$

$\mathbf{C}_{\nu_1\nu_2}C[\alpha(t)]-\mathbf{C}_{\nu_1}A[\alpha(t)]\mathbf{C}_{\nu_2}B[r(t)]\mathbf{C}_{\nu_1\nu_2}B[\beta(t)]$,

$B^*(t)=\nu_1B[\alpha(t)]\mathbf{C}_{\nu_1\nu_2}B[\beta(t)]\mathbf{C}_{\nu_2}B[r(t)]-\nu_1B[\alpha(t)]\mathbf{C}_{\nu_2}A[\beta(t)]$

$\mathbf{C}_{\nu_1\nu_2}A[r(t)]-\nu_1\mathbf{C}_{\nu_2}B[r(t)]C[\beta(t)]\mathbf{C}_{\nu_1\nu_2}C[\alpha(t)]$,

$C^*(t)=\nu_2C[\beta(t)]\mathbf{C}_{\nu_1}C[r(t)]\mathbf{C}_{\nu_1\nu_2}C[\alpha(t)]-\nu_2B[\alpha(t)]\mathbf{C}_{\nu_1}C[r(t)]$

$\mathbf{C}_{\nu_1\nu_2}B[\beta(t)]-\nu_2C[\beta(t)]\mathbf{C}_{\nu_1}A[\alpha(t)]\mathbf{C}_{\nu_1\nu_2}A[r(t)]$,

$D^*(t)=\nu_1\nu_2B[\alpha(t)]\mathbf{C}_{\nu_2}A[\beta(t)]\mathbf{C}_{\nu_1}C[r(t)]+\nu_1\nu_2C[\beta(t)]\mathbf{C}_{\nu_1}A[\alpha(t)]\mathbf{C}_{\nu_2}B[r(t)]$.

考虑到 $\gamma(t)$是实函数，把(3.14)式右端分子分母同乘以$\overline{\Delta(t)}$，我们将得到边值问题

$$Re\Big\{i\overline{\Delta(t)}[A^*(t)t'(s)\Psi^+(t)+B^*(t)\mathbf{C}_{\nu_1}[t'(s)\alpha'(t)\Psi^+[\alpha(t)]]+$$

$$+C^*(t)\mathbf{C}_{\nu_2}[t'(s)\beta(t)\Psi^+[\beta(t)]]+D^*(t)\mathbf{C}_{\nu_1\nu_2}[t'(s)r'(t)\Psi^+[r(t)]]]\Big\}=0\tag{3.15}$$

这就是问题(1.2)的相联问题的统一形式.

为此我们还必须讨论以下两种情形：

1°. 方程(2.5)的任何解都满足条件(3.6)

2°. 方程(2.5)的解中间至少有一个是不满足条件(3.6)的.

根据定理3知道，只要满足条件(2.6)，那么，方程(2.2)可解的充要条件就是(2.8). 这样一来，对于情形1°，即相联方程(2.5)的任何解都满足条件(3.6)，从而，常数 $C$ 可以保持是任意的，而条件(2.8)将可以写成：

$$\int_\Gamma h(t)\gamma_j(t)ds=0,\qquad j=1,2\cdots,k\tag{3.16}$$

但是，对于情形2°，即相联方程(2.5)的线性无关解 $\gamma_1(t),\gamma_2(t),\cdots,\gamma_k(t)$中间至少有一个（无妨假设就是 $\gamma_k(t)$）不满足条件(3.6)，这时候，我们做函数

$$\gamma_j^*(t)=\gamma_j(t)-\beta_j\gamma_{k'}(t),\quad j=1,2,\cdots,k'-1,$$

其中

$$\beta_j=\frac{\operatorname{Im}\left\{\int_\Gamma[A(t)+B(t)+C(t)]\gamma_j(t)ds\right\}}{\operatorname{Im}\left\{\int_\Gamma[A(t)+B(t)+C(t)]\gamma_{k'}(t)ds\right\}},$$

不难验证，这些函数是相联方程(2.5)满足附加条件(3.6)的解，事实上，

$$\operatorname{Im}\int_\Gamma[A(t)+B(t)+C(t)]\gamma_j^*(t)ds=\operatorname{Im}\int_\Gamma[A(t)+B(t)+C(t)]\gamma_j(t)ds$$
$$-\beta_j\operatorname{Im}\int_\Gamma[A(t)+B(t)+C(t)]\gamma_{k'}(t)ds=0.$$

这样一来，对于上述的 $k'-1$ 个解 $\gamma_j^*(t)$来说，可解条件(2.8)仍可以表成(3.16)的形式，而对于 $\gamma_{k'}(t)$可以得到

$$\int_\Gamma h(t)\gamma_{k'}(t)ds=-2C\int_\Gamma\operatorname{Im}[A(t)+B(t)+C(t)]\gamma_{k'}(t)ds. \tag{3.17}$$

由于上式右端的积分部分不等于零，只要适当地选择常数$C$就可以使得(3.17)是满足的。

由于函数 $\gamma_j(t)$和$h(t)$ 都是实的，那么，条件(3.16)还可以写成

$$\operatorname{Re}\left\{\int_\Gamma h(t)\gamma_j(t)\overline{t'(s)}dt\right\}=0. \tag{3.18}$$

从而，有如下定理成立：

**定理 4** 如果 Nother 条件(2.6)成立，那么，广义 Hilbert 问题(1.2)可解的充分必要条件具有以下形式：

$$Re\left\{\int_\Gamma\left[\frac{h(t)A^*(t)}{\Delta(t)}+\nu_1\frac{h[\alpha(t)]\mathbf{C}_{\nu_1}B^*[\alpha(t)]}{\mathbf{C}_{\nu_1}\Delta[\alpha(t)]}+\nu_2\frac{h[\beta(t)]\mathbf{C}_{\nu_2}C^*[\beta(t)]}{\mathbf{C}_{\nu_2}\Delta[\beta(t)]}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\nu_1\nu_2\frac{h[r(t)]\mathbf{C}_{\nu_1\nu_2}D^*[r(t)]}{\mathbf{C}_{\nu_1\nu_2}\Delta[r(t)]}\right]\Psi_j^\dagger(t)dt\right\}=0,$$

其中 $\Psi_j^\dagger(t)$是相联问题(3.15)的线性无关解.

**证明** 只要把相联方程(2.5)的解 $\gamma_j(t)$ 利用表示式(3.14)代入(3.18)就可以得到

$$\operatorname{Re}\left\{\int_\Gamma h(t)\frac{1}{\Delta(t)}\Big[A^*(t)t'(t)\Psi_j^\dagger(t)+B^*(t)\mathbf{C}_{\nu_1}[t'(s)\alpha'(t)\Psi_j^\dagger[\alpha(t)]]+\right.$$
$$\left.+C^*(t)\mathbf{C}_{\nu_2}[t'(s)\beta'(t)\Psi_j^\dagger[\beta((t)]]+D^*(t)\mathbf{C}_{\nu_1\nu_2}[t'(s)r'(t)\Psi_j[r(t)]\Big]ds\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\int_\Gamma h(t)\left[\frac{1}{\Delta(t)}A^*(t)t'(s)\Psi_j^+(t)+\frac{C_{\nu_1}B^*(t)}{C_{\nu_1}\Delta(t)}t'(s)\alpha'(t)\Psi_j^+[\alpha(t)]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{C_{\nu_2}C^*(t)}{C_{\nu_2}\Delta(t)}t'(s)\beta'(t)\Psi_j^+[\beta(t)]+\frac{C_{\nu_1\nu_2}D^*(t)}{C_{\nu_1\nu_2}\Delta(t)}t'(s)r'(t)\Psi_j^+[r(t)]\,ds\right]\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\int_\Gamma\left[\frac{h(t)}{\Delta(t)}A^*(t)+\nu_1\frac{C_{\nu_1}B^*[\alpha(t)]}{C_{\nu_1}\Delta[\alpha(t)]}h[\alpha(t)+\nu_2\frac{C_{\nu_2}C^*[\beta(t)]}{C_{\nu_2}\Delta[\beta(t)]}h[\beta(t)]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\nu_1\nu_2\frac{C_{\nu_1\nu_2}D^*[r(t)]}{C_{\nu_1\nu_2}\Delta[r(t)]}h[r(t)]\right]\Psi_j^+(t)dt\right\}=0.$$

**4. 广义 Hilbert 问题(1.2)的 Noether 性条件与指数公式.**

**定义**　如果齐次问题(1.2)与相联问题(3.15)的线性无关解的个数 $l$ 和 $l'$ 都是有限的，而且满足定理4中的可解条件，我们就把问题(1.2.)叫做是Noether问题，这样一来，我们得到

**定理5**　如果 Noether 条件(2.6)满足，那么，广义 Hilbert 问题(1.2)就是 Noether 问题.

除此以外，关于广义 Hilbert 问题的指数，将有以下定理成立.

**定理6**　如果 Noether 条件(2.6)满足，那么，广义 Hilbert 问题(1.2)的指数公式是：

$$æ = l - l' = \frac{1}{4\pi}\left\{\arg\det(p(t)-q(t))\right\}_\Gamma + 1, \tag{4.1}$$

其中 $p(t)$，$q(t)$是在第2段中提到的系数矩阵.

**证明**　1° 如果相联齐次方程(2.5)的解都满足条件(3.6)，那么，相联齐次方程(2.5)的每一个解都对应着相联问题(3.15)的一个解. 从而有 $l'=k'$. 而方程(2.2)右端中的常数$C$保持是任意的，于是应该有 $l=k+1$，最后，得到

$$æ = l - l' = k - k' + 1 = \frac{1}{4\pi}\left\{\arg\det(p(t)-q(t))\right\}_\Gamma + 1,$$

2° 如果相联齐次方程(2.5)的解中间只要有一个是不满足条件(3.6)的. 这时候，方程(2.5)满足条件(3.6)的解刚好应该有 $k'-1$ 个，从而，有 $l'=k'-1$，但是，这时候，方程(2.5)右端中的常数$C$是由公式(3.17)唯一确定的. 于是应该有 $l=k$，最后我们仍将得到

$$æ = l - l' = k - k' + 1 = \frac{1}{4\pi}\left\{\arg\det(p(t)-q(t))\right\}_\Gamma + 1,$$

## 参 考 文 献

[1] Литвинчук, Г. С. и Хасаъов, Э. Г., О Краевой задаче Гильбёрта со сдвигом, *ДАН СССР* 142 2 (1962), 274-277.

[2] Литвинчук, Г. С. и Хасабов, Є. Г., Один Класс сингулярных интегральных уравнений и обобщенная краевая задача типа задачи карлемана, Сибирс. мат. ж. 5, 4(1964), 858-880.

[3] Литвинчук, Г. С., Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом 1977.

[4] 赵桢，带两个 Carleman 位移的奇异积分方程的可解性问题，北京师大学报（自然科学版），1980年第二期，第 1—18 页。

[5] 赵桢，带两个 Carleman 位移的奇异积分方程 Noether 可解的充分必要条件，《数学年刊》，1981 年 No. 1，第 91—100 页。


# On the Generalized Hilbert Problem with two Carleman's Shifts

*By Zhao Zhen* (赵 桢)


## Abstract

In this paper, the generalized Hilbert problem with two Carleman's shifts is considered for analytic functions under the boundary value condition:

$$\operatorname{Re}\{A(t)\Phi^+(t)+B(t)\Phi^+[\alpha(t)]+C(t)\Phi^+[\beta(t)]\}=h(t), \tag{1}$$

where $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $h(t)$ are given H-contineous functions and $\alpha(t)$, $\beta(t)$ are two different homeomorphisms of boundary $\Gamma$ onto itself. $\Gamma$ is simple closed Ljapunov's curve.

Using the integral representation of analytic functions we establish the equivalent singular integral equation

$$(\mathscr{K}\mu)(t)=g(t). \tag{2}$$

Bisides the transposed equation

$$(\mathscr{K}'\psi)(t)=0 \tag{3}$$

is also obtained.

In order to discuss solvability of problem (1) we establish also the adjoint boundary value problem and obtain the necessary and sufficient conditions for solution of problem (1). Finally we obtain the formula of index.