佐藤超函数理论介绍*

（单变量精况）

（Ⅰ）

齐民友

（武汉大学）

牛顿和莱布尼兹建立的微积分理论不但在数学上而且在人类对自然界的认识上无疑是一个光辉的里程碑.至此,人们有了系统的方法和理论从数量关系上来刻划自然界. 自然界的规律如此和谐地反映在数学规律中:通过对函数进行微分和积分这些基本运算,就可以找到过去人们不敢梦想的自然界的深刻的规律性. 一个函数既然反映物质世界的运动，当然应该许可微分和积分，几乎没有什么人怀疑这一点. 然而，数学——微积分——在应用中达到的光辉成就只是暂时掩盖了它内在的缺陷. 于是在十九世纪中叶，进入了所谓奠基和批判的时期. 从那时起，微积分——数学分析的基本概念例如无穷小、极限、连续性等等逐步清楚了.发现了许多"奇怪的"、"病态的"东西，例如处处连续而又不可微分的函数等等. 原来人们以为毫无疑问地成立的事情只是在一定条件下才是合法的. 在奠基和批判的潮流中，数学得到了长足的进步. 然而无可讳言，在颇大程度上失去了灵活性.

科学的发展没有停止. 新的推动来自物理学. 英国物理学家 Dirac 在量子力学研究中提出了著名的 δ 函数，即适合以下条件的函数：

$$\delta(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ \infty, & x=0,\end{cases} \tag{0.1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx=1. \tag{0.2}$$

从古典的数学分析来看，$\delta(x)$ 是不可理解的. 因为 $\delta(0)=\infty$ 是没有意义的;而且若(0.1)成立，则 $\delta(x)$ 殆遍为 0，其积分也必然为 0，这与 (0.2) 是矛盾的. 然而 $\delta(x)$ 有许多奇妙的性质，例如

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x)dx=f(0),\ \text{只要}f(x)\ \text{连续}. \tag{0.3}$$

还有许多其他的性质使得 $\delta(x)$ 成为物理学家得心应手的工具，例如可见[11]. "不合法"的步骤与概念带来了意想不到的正确的结果. 放在数学家面前的任务是：如何掌握这些"奇异的"新对象. 这就要求我们在更高的基础上恢复数学分析的灵活性.

* 1981年5月20日收到.

对这个问题第一个光辉的回答是法国数学家 L. Schwartz 建立的广义函数论。它源远流长，可以追溯到如 Hadamard、Соболев、M. Riesz 等人的工作。其基本思想是把广义函数定义为一类函数空间上的线性连续泛函。这种函数空间是所谓线性拓扑空间，因而后者就成了广义函数论的基础。从四十年代末至今的三十多年里，广义函数论已经成了数学家的"常规武器"。有大量出色的入门书，例如我们愿向读者推荐的[5]。

然而，还有另一条出路。大家都会注意到 (0.3) 与 Cauchy 公式十分相近：对解析函数 $f(z)$ 有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = f(z). \tag{0.4}$$

如果取 γ 为图 1 中的闭路，并考虑其极限情况，又令 $z=0$，就有

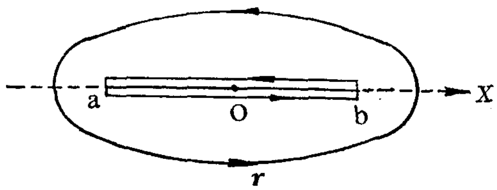

图 1

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\left(\frac{1}{\xi - i0} - \frac{1}{\xi + i0}\right)f(\xi)d\xi = f(0). \tag{0.5}$$

因此，直观地可以认为

$$\delta(x) = \frac{-1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0}\right). \tag{0.6}$$

就是说，$\delta(x)$ 可以看成解析函数 $-\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z}$（但 $z=0$ 处有奇点）在实轴上、下岸的边值的差。其实，Dirac 本人就发现了一个著名的公式

$$f.\,p.\frac{1}{x} = \frac{1}{x+i0} + i\pi\delta(x) = \frac{1}{x-i0} - i\pi\delta(x) \tag{0.7}$$

($f.\,p.\frac{1}{x}$ 将在正文中解释)，也把 $\delta(x)$ 与复变量的解析函数在实轴上的边值相联系。

把"奇异的"对象与复解析函数的边值联系起来并不是新鲜的事。例如在调和分析的复方法中，时常把单位圆上的函数看成解析函数的边值，并且得到了许多深刻的结果。华罗庚[12]曾将广义函数定义为单位圆上的形式 Fourier 级数，也是这种同样的思想。在 Fourier 变换方面，T. Carleman[3] 证明了，若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的可测函数，而且有一常数 k 使 $\int_0^x |f(x)|dx = O(|x|^k)$，则可以用某解析函数"边值"的差来作为其 Fourier 变换。这其实已经是广义函数论最早的工作之一了。

还应该指出，L. Schwartz 把广义函数定义为基本空间（通常是 $C^\infty(\Omega)$ 空间或其某个子空间）上的线性连续泛函，意大利数学家 L. Fantappie 也曾经建立了解析函数空间上的解析泛函的理论。

日本数学家佐藤斡夫（Mikio Sato）总结了以上的成果，创造性地建立了超函数理论。自他的基本论文[23]发表以来，迄今已二十余年，可以说超函数论已经到了“成人”的年令。目前它正在迅速地发展着，对越来越多的数学分支，特别是偏微分方程和数学物理的影响十分深刻。佐藤的学派认为，分析数学的发展有三个时期：即古典分析、以Hilbert空间方法为核心的泛函分析和代数分析。什么是代数分析，自然言人人殊，但有一点是共同的，即是从代数的、形式的角度来研究分析数学，它的基本工具是同调代数。超函数论就是这样。按佐藤本人的认识，用代数的方法研究分析最早可以溯源到欧拉。因此，超函数理论在数学中实在有深远的源头。从上面的介绍可以看到，超函数和广义函数一样，其出现是为了解决数学中的一些基本问题。二者可以说殊途同归、交相辉映。然而人们总是认为超函数是十分神秘的东西。其实，很难说二者之中谁更艰深。问题在于超函数所用的工具是多数人不熟习的，而且缺少一本好的入门书。我们愿向读者推荐一本写得很生动且很少书卷气的书，即金子晃的“超函数入门”。作者此文即在讲授该书后以它为蓝本而成。本文中限于介绍一个变量的超函数，其原因在于不需要很多的同调代数知识即可接受它，反过来却可有助于人们理解为什么在超函数理论中需要这些工具。当然，佐藤真正的贡献在于多变量情况下的超函数理论。

§1. 超函数的定义与性质

还是先看 Cauchy 积分。设 $f(z)$ 在图1的 $[a,b]$ 区间附近解析，则有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z}dz=-\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\left(\frac{1}{x+i0}-\frac{1}{x-i0}\right)f(x)dx=f(o). \tag{1.1}$$

但若 $F(z)$ 在 $[a,b]$ 附近解析，则由 Cauchy 定理

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\left[\frac{1}{z}+F(z)\right]dz=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(x)}{z}dz=f(o). \tag{1.2}$$

前面由（1.1）提出，应该把 $\delta(x)$ 看作解析函数 $-\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z}$ 的边值之差：$\delta(x)=-\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i0}-\frac{1}{x-i0}\right)$。那么，由（1.2）就应把 $\delta(x)$ 定义为 $-\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{z}+F(z)\right)$ 的边值之差：$\delta(x)=-\frac{1}{2\pi i}\left[\left(\frac{1}{x+i0}+F(x+i0)\right)-\left(\frac{1}{x-i0}+F(x-i0)\right)\right]$。因此，一个超函数应该不是对应于一个解析函数，而是对应于解析函数的一个等价类。这样，我们给出以下的定义。

设 $\Omega\subset\mathbf{R}$ 是实轴上的开集，$\mathrm{U}\supset\Omega$ 是 Ω 的复邻域（即 Ω 是 $\mathrm{U}\subset\mathbf{C}$ 的一个闭子集，亦即存在 $\mathbf{C}$ 的一个闭集 K 使 $\Omega=\mathrm{U}\cap K$）。用 $\mathcal{O}(\mathrm{U})$ 和 $\mathcal{O}(\mathrm{U}\setminus\Omega)$ 分别记 U 上与 $\mathrm{U}\setminus\Omega$ 上的解析函数集（它们都是复线性空间），我们给出

定义 1.1　Ω 上的超函数即商空间 $\mathcal{O}(\mathrm{U}\setminus\Omega)/\mathcal{O}(\mathrm{U})$ 的元。记 Ω 上超函数的集合为 $\mathscr{B}(\Omega)$，则

$$\mathscr{B}(\Omega)=\mathcal{O}(\mathrm{U}\setminus\Omega)/\mathcal{O}(\mathrm{U}).$$

如果记$F(z)\in O\ (U\backslash\Omega)$在上述商空间中的等价类为$[F(z)]=f(x)\in\mathscr{B}(\Omega)$，$F(z)$称为超函数$f(x)$的定义函数．我们时常记

$$f(x)=F_+(x+i0)-F_-(x-i0),\qquad(1.3)$$
$$F_+(z)=F(z)\,|_{Im z>0},\quad F_-(z)=F(z)\,|_{Im z<0}.$$

(1.3)式称为超函数$f(x)$的边值表示．但是我们要注意，尽管在许多例子中定义$f(x)\in\mathscr{B}(\Omega)$的$F(z)$确有边值，而且边值之差也有意义，(1.3)式右方的记法一般却只有形式的意义．

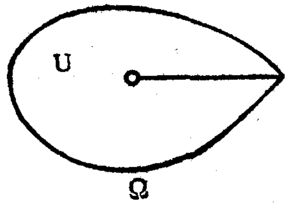

图 2

例1． 取$\Omega=\{0\}$，$U=C$．我们定义$\delta(x)$为

$$\delta(x)=\left[-\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z}\right]=-\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i0}-\frac{1}{x-i0}\right).\qquad(1.4)$$

但是到目前为止，我们并不知道这样定义的$\delta(x)$与L. Schwartz的广义函数$\delta(x)$有什么关系．

例2． Heaviside函数$Y(x)$“相应”于一个超函数$\left[-\frac{1}{2\pi i}ln(-z)\right]$．实际上，任取$ln(-z)$的一枝，例如要求当$z=x<0$时$ln(-z)=ln\,|x|$取实数值．于是从上半平面转到正实轴上岸时有$ln(-x)=ln\,|x|-\pi i$．在负实轴下岸，$ln(-z)=ln\,|x|$，由下半平面转到正实轴下岸有$ln(-x)=ln\,|x|+\pi i$．因此

$$-\frac{1}{2\pi i}\{ln[-(x+i0)]-ln[-(x-i0)]\}=\begin{cases}1 & x>0,\\ 0 & x<0.\end{cases}\qquad(1.5)$$

这就是说，按通常解析函数的边值的定义来计算，$\left[-\frac{1}{2\pi i}ln(-z)\right]$确实就是通常的Heaviside函数．但因(1.3)式只有形式的意义，所以我们还没有确实知道通常的Heaviside函数与作为超函数的Heaviside函数的关系．

例3． 分别取$F_+(z)=z^\lambda$，$F_-(z)=0$与$F_+(z)=0$，$F_-(z)=z^\lambda$，可以定义超函数

$$(x\pm i0)^\lambda=F_+(x+i0)-F_-(x-i0).\qquad(1.6)$$

虽然也可采用解析函数通常意义下的边值来作差，我们这里的定义却是说：令$F(z)=\begin{cases}z^\lambda, & \mathrm{Im}(z)>0,\\ 0, & \mathrm{Im}(z)<0,\end{cases}$则$F(z)\in O(C\backslash\mathbf{R})$，而定义超函数$(x+i0)^\lambda$为等价类$[F(z)]$．

$\mathscr{B}(\Omega)$显然构成复线性空间．因为若$f(x)$，$g(x)\in\mathscr{B}(\Omega)$，则它们的定义函数$F(z)\in O(U_1\backslash\Omega)$，$G(z)\in O(U_2\backslash\Omega)$，令$U=U_1\cap U_2$，它也是$\Omega$的复邻域．因而对任意复常数$\lambda$、$\mu$，有$\lambda F(z)+\mu G(z)\in O(U\backslash\Omega)$．我们定义

$$\mathscr{B}(\Omega)\ni\lambda f(x)+\mu g(x)=[\lambda F(z)+\mu G(z)].$$

利用复线性运算还可定义下面的超函数．

例如 $f.p.\frac{1}{x}$ （$\frac{1}{x}$的有限部份）定义为

$$f.p.\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+i0}+\frac{1}{x-i0}\right)=\frac{1}{x+i0}+\pi i\delta(x)=\frac{1}{x-i0}-\pi i\delta(x),$$

这就是 Dirac 的公式。

一般说来，若 $F(x)$ 是半纯函数，则定义其有限部份 $f.p.F(x)$ 为超函数

$$f.p.F(x)=\frac{1}{2}\Big[F(x+i0)+F(x-i0)\Big]. \tag{1.7}$$

它的定义函数是

$$F_+(z)=\frac{1}{2}F(z),\quad \mathrm{Im}z>0,$$

$$F_-(z)=-\frac{1}{2}F(z),\quad \mathrm{Im}z<0.$$

下面讨论超函数的初等运算。

1° 乘子运算。设 $\varphi(x)$ 当 $x\in\Omega$ 时是实解析函数*。于是一定存在 Ω 的某个复邻域U使 $\varphi(x)$ 可以解析拓展为 $\varphi(z)\in O(U)$。我们定义，对于超函数 $f(x)=[F(z)]$，$\varphi(x)\cdot f(x)=[\varphi(z)F(z)]$。或用边值表示写为

$$(\varphi F_1)(x+i0)-(\varphi F_2)(x-i0). \tag{1.8}$$

实解析函数成了超函数空间的乘子。以后 Ω 上的实解析函数空间（这也是一个复线性空间）记作 $\mathscr{A}(\Omega)$。

2° 微分运算。设 $f(x)=[F(z)]\in\mathscr{B}(\Omega)$。我们定义

$$\frac{d}{dx}f(x)=\left[\frac{d}{dz}F(z)\right]=F'_+(x+i0)-F'_-(x-i0). \tag{1.9}$$

因此，任意超函数都是可微分的，从而也是任意次可微的。

例如，很容易看到

$$\frac{d}{dx}Y(x)=-\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{d}{dz}ln(-z)\right]=-\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{z}\right]=\delta(x).$$

综合以上，设 $P(x,D)$ 是实解析系数线性微分算子：

$$P(x,D)=a_0(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^m+\cdots+a_m(x),\quad a_j(x)\in\mathscr{A}(\Omega),$$

则对 $f(x)\in\mathscr{B}(\Omega)$，可以定义 $P(x,D)f(x)$ 仍为一个超函数：

$$P(x,D)f(x)=\left[\left\{a_0(z)\left(\frac{d}{dz}\right)^m+\cdots+a_m(z)\right\}F(z)\right]. \tag{1.10}$$

---

* 即实变量的解析函数。$f(x)$ 是 x 在 x_0 附近的实解析函数的定义是：$f(x)$ 在 x_0 附近有收敛的幂级数展开式 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$.

显然超函数不是通常意义下的函数，谈不上超函数$f(x)\in\mathscr{B}(\Omega)$在一点$x_0$处的值，但是它有明显的局部性质。设$\Omega_1\subset\Omega$是一个开集，U是$\Omega$的复邻域，则$U_1=U\backslash(\Omega\backslash\Omega_1)$是$\Omega_1$的复邻域而且$U\backslash\Omega=U_1\backslash\Omega_1$，因此有恒等映射$O(U\backslash\Omega)\to O(U_1\backslash\Omega_1)$。又因为$U_1\subset U$，从而$O(U)$中的元限制在$U_1$上成$O(U_1)$中的元，即有限制映射$O(U)\to O(U_1)$。由此即可诱导出一个映射$O(U\backslash\Omega)/O(U)\to O(U_1\backslash\Omega_1)/O(U_1)$，即$\mathscr{B}(\Omega)\to\mathscr{B}(\Omega_1)$。这个映射称为超函数的限制映射，就是说，$\Omega$上的超函数$f(x)$限制在$\Omega_1$上（记作$f(x)|_{\Omega_1}$）后，成为$\Omega_1$上的超函数。

我们再看什么叫做超函数在Ω上为0。由于$\mathscr{B}(\Omega)=O(U\backslash\Omega)/O(U)$，故$O(U)$之元就是商空间中的零元。因此，若$f(x)\in\mathscr{B}(\Omega)$的定义函数$F(z)\in O(U)$，亦即可以由$Imz>0$及$Imz<0$作解析拓展到实轴上，就说$f(x)=0$于$\Omega$上。

综合上面两个概念，即可提出超函数$f(x)\in\mathscr{B}(\Omega)$在$\Omega$的开子集$\Omega_1$上为0的概念。这就是有$\Omega_1$的一个复邻域$U_1$，使$f(x)|_{\Omega_1}$的某个定义函数$F(z)$在$U_1$上解析：$F(z)\in O(U_1)$。因此又可以谈起使$f(x)|_{\Omega_1}=0$的$\Omega$之最大开子集$\Omega_1$。这样我们有

定义 1.2 若Ω_1是$f(x)\in\mathscr{B}(\Omega)$在其上为0的$\Omega$之最大开子集，则它在$\Omega$中的余集$\Omega\backslash\Omega_1$称为$f(x)$的支集，记作$\mathrm{supp}f(x)$。$\mathrm{supp}f(x)$显然是$\Omega$的闭子集。

和广义函数有奇支集的概念（粗略地说，即是该广义函数不属于C^∞的点集）相应，在超函数理论中有超函数在实解析函数范畴中的奇支集。为此先要介绍实解析函数怎样可可以看作一个超函数。

若$f(x)\in\mathscr{A}(\Omega)$，则它必可拓展为$\Omega$的某个复邻域U中的复变量解析函数$f(z)$。令

$$\varepsilon(z)=\begin{cases}1, & Imz>0,\\ 0, & Imz<0,\end{cases}$$

则$\varepsilon(z)f(z)$可以定义Ω上的一个超函数。

定义 1.3 $\mathscr{A}(\Omega)\ni f(x)\longmapsto[\varepsilon(z)f(z)]\in\mathscr{B}(\Omega)$称为$f(x)$在超函数集中的嵌入。

当然也可令 $\varepsilon_1(z)=\begin{cases}0, & Imz>0,\\ -1, & Imz<0,\end{cases}$ 而作$\varepsilon_1(z)f(z)$。容易看到$[\varepsilon(z)f(z)]=[\varepsilon_1(z)f(z)]$。

定义1.4 若Ω_1是使$\mathscr{B}(\Omega)\ni f(x)$在其上之限制$f(x)|_{\Omega_1}$为实解析函数的最大开集，其余集称为$f(x)$的奇支集，记作$\mathrm{singsupp}f(x)$。它是$\Omega$的闭子集。

由超函数的定义，$f(x)=0$就表示$F(z)\in O(U)$。因而$F_\pm(z)$可以由上（下）半平面越过实轴解析拓展到对侧而且等于$F_\mp(z)$。所以在普通函数意义下也有$F_+(x+i0)-F_-(x-i0)=0$。反之，若$F_\pm(z)$可解析拓展为$F_\mp(z)$，则$f(x)=0$。$f(x)$为实解析即$F_+(z)=f(z)$，$F_-(z)=0$。从而$f(x)$作为普通的函数也可以用边值表示如下：$f(x)=F_+(x+i0)-F_-(x-i0)$。这时$F_\pm(z)$也可以越过实轴解析拓展，但拓展后不一定等于$F_\mp(z)$。反之，若$f(x)$的定义函数$F_\pm(z)$可以越过实轴作解析拓展，则例如$F_-(z)\in O(U)$，而可以将$f(x)$原来的定义函数改为

$$\begin{cases}F_+(z)-F_-(z), & Imz>0,\\ 0, & Imz<0.\end{cases}\tag{1.11}$$

这时因为$F_+(z)$也可解析拓展到实轴，所以$(F_+-F_-)(x+i0)=(F_+-F_-)(x)$。从而这个超函数是一个实解析函数。

命题1.5 乘以实解析函数和微分运算都不会扩大支集与奇支集。

这个结果是显然的。

例 看一看前面例子中几个超函数的支集和奇支集。

$$\mathrm{supp}\,\delta(x)=\{0\}.$$

因为$F_+(z)=-\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z}\Big|_{Imz>0}$，$F_-(z)=-\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z}\Big|_{Imz<0}$，除$z=0$以外$F_\pm(z)$显然可以越过实轴而解析拓展为$F_\mp(z)$。同样可以知道$\mathrm{singsupp}\,\delta(x)=\{0\}$。

对于Heaviside函数，其定义函数$-\frac{1}{2\pi i}ln(-z)$在负实轴上显然是解析的。但在正实轴之上下岸，$-\frac{1}{2\pi i}ln(-z)$取不同值，从而$F_\pm(z)$虽然可以解析拓展过实轴，却不等于$F_\mp(z)$。所以

$$\mathrm{supp}\,Y(x)=\{x:x\geqslant 0\}，但是\ \mathrm{sing\,supp}\,\mathbf{Y}(\mathrm{x})=\{0\}.$$

读者可以很容易看到

$$\mathrm{supp}(x\pm i0)^\lambda=\mathrm{sing\,supp}(x\pm i0)^\lambda=R.$$

$$\mathrm{supp}(\mathrm{f.\,p.}\frac{1}{x})=\mathbf{R},\ \mathrm{sing\,supp}\left(\mathrm{f.\,p.}\frac{1}{x}\right)=\{0\}.$$

现在讨论超函数的定积分。设$f(x)\in\mathscr{B}(\Omega)$。$\Omega$是闭区间$[a,b]$的某个领域。为了$f(x)$在$[a,b]$上可以积分，应该在$x=a$，$x=b$附近有一定“光滑性”的要求。这里我们要求$f(x)$在$a$，$b$附近是实解析的，因此$f(x)$有一个定义函数$F_\pm(z)$在$a,b$附近都是解析的。在$\Omega$的复邻域中$Imz>0,Imz<0$处取联结$a,b$两点的可求长曲线$\gamma_+,\gamma_-$，则我们给出

定义1.6 $f(x)$在$[a,b]$上的定积分定义为

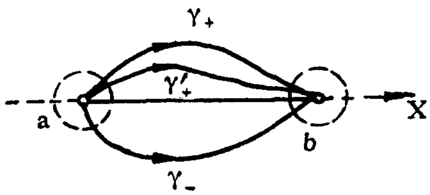

图3

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{\gamma_+}F_+(z)dz-\int_{\gamma_-}F_-(z)dz. \tag{1.12}$$

这里我们要注意。若将γ_+换为γ'_+，则

$$\int_{\gamma'_+-\gamma_+}F_+(z)dz=0.$$

这是因为$F_+(z)$在a,b附近解析而可以应用Cauchy定理。如果取$f(z)$的另一个定义函数是$\tilde{F}_\pm(z)$，则$F_\pm(z)-\tilde{F}_\pm(z)=G(z)$必在$[a,b]$附近解析，从而又由Cauchy定理

$$\int_{\gamma_+} F_+(z)dz-\int_{\gamma_-} F_-(z)dz=\int_{\gamma_+}\widetilde{F}_+(z)dz-\int_{\gamma_-}\widetilde{F}_-(z)dz.$$

现在看一个特例。设$f(x)\in\mathscr{B}(\Omega)$的支集为紧集K。如果$f(x)=F_+(x+i0)-F_-(x-i0)$，则按通常的意义也有：在$K$外$F_+(x+i0)-F_-(x-i0)=0$，当然，$f(x)$在$K$外是实解析的。取$(a,b)$包含$K$，又取$\varphi(x)\in\mathscr{A}(\mathbf{R})$，则$\varphi(x)f(x)$可以在$(a,b)$上积分：$\int_a^b\varphi(x)f(x)dx=-\int_\gamma\varphi(z)F(z)dz$，$\gamma=\gamma_--\gamma_+$。这个积分值实际上不依赖于$(a,b)$的选择，因而可以定义为$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)dx$。

按这个定义，并取$f(x)=\delta(x)$，则$F(z)=-\dfrac{1}{2\pi i}\cdot\dfrac{1}{z}$，代入上式有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(x)dx=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\varphi(z)}{z}dz=\varphi(0). \tag{1.13}$$

这个结果告诉我们，如果$\delta(x)$按超函数理解，则在实解析函数范畴中，(0.3)式得到了完全“合法”的解释。

以上我们从一些特例看出超函数中包含了一些“奇异的”对象。那么，“通常的”函数，例如局部可积函数可否嵌入超函数类中？乃至 Schwartz 广义函数可否嵌入超函数类中？对这个问题我们解决如下。

先考虑$f(x)\in\mathscr{B}(\Omega)$具有紧支集K的情况。任取$(a,b)\supset K$，则$f(x)$在$a,b$附近是解析的，从而如上所述，$\int_a^b f(x)dx$是有意义的。如果换一个区间$(a_1,b_1)\supset K$，又容易看到$\int_{a_1}^{b_1}f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$。因此可取这个公共值为$\int_K f(x)dx$或者$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$。现在再取一点$z$在$K$外，则当$x\in K$时，$\dfrac{1}{x-z}$是$x$的在$K$附近的实解析函数，于是可以用它乘$f(x)$，所得的超函数支集仍在$K$内，从而可以考虑积分$\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{f(x)dx}{x-z}$。这里我们有

命题 1.7 当$f(x)$是具有紧支集K的超函数时，

$$G(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)dx}{x-z} \tag{1.14}$$

是该支集外的解析函数而且是$f(x)$的定义函数：$[G(z)]=f(x)$。$G(z)$称为标准定义函数。

证 设$f(x)=[F(z)]$而$F(z)\in O(U\backslash K)$，U是K的某个复邻域。取$z\in C\backslash K$，γ是沿正向包围K的闭路，并使z在γ之外。由定积分的定义容易看到

$$G(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

因此$G(z)$在$C\backslash K$上解析，从而定义一个支集在K上的超函数$[G(z)]$。今证$[G(z)]=[F(z)]$，即$G(z)-F(z)$在K附近解析。为此再取γ'如图，很容易看到

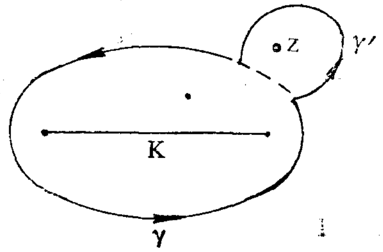

图 4

$$G(z)-F(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma+\gamma'}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

这是一个Cauchy型积分，它定义$\gamma+\gamma'$内的一个解析函数，从而是K附近的解析函数。证毕。

从上面的证明看见，实际上标准定义函数$G(z)$具有两个性质：

1. 它在$P^1\backslash K$ ($P^1=C\cup\{\infty\}$为Riemann球）上解析。

2. 它在∞处为0。

其实，具有这两个性质的定义函数是唯一的，这很容易由Liouville定理得证。

所谓通常的函数——例如$L_{1,loc}(\mathbf{R})$函数——嵌入超函数类的问题，即求一个映射ι: $L_{1,loc}(\mathbf{R})\to\mathscr{B}(\mathbf{R})$，并要求它为单射。因为这时$L_{1,loc}(\mathbf{R})$与$\iota(L_{1,loc}(\mathbf{R}))\subset\mathscr{B}(\mathbf{R})$一一对应，因此可以把一个局部可积函数$f(x)$与它在$\mathscr{B}(\Omega)$中的象$\iota(f)$等同起来，从而视之为超函数。我们已看到，前面的例子中有一些普通的函数如$Y(x)$(理解为通常函数）可以直观地看成$-\frac{1}{2\pi i}\ln(-z)$在实轴上下岸边值的差。而用下面即将定义的ι，也有$\iota\Big(Y(x)\Big)=\Big[-\frac{1}{2\pi i}ln(-z)\Big]$。

先设$f(x)$(通常的函数)具有紧支集K，而且在K上可积。于是$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-z}dx\in O(C\backslash K)$。我们规定$\iota(f(x))=[F(z)]$。对于一般的$f(x)\in L_{1,loc}(\mathbf{R})$，通过单位分解$1=\sum_\lambda\varphi_\lambda(x),\varphi_\lambda(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}),0\leqslant\varphi_\lambda(x)\leqslant1$而且$\{\mathrm{Supp}\varphi_\lambda(x)\}$是局部有限的，将$f(x)$分解如下：$f(x)=\sum_\lambda\varphi_\lambda(x)f(x)=\sum\limits_\lambda f_\lambda(x)$，$f_\lambda(x)$是具有紧支集的而且是可积的。用上法可以作出$G_\lambda(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_\lambda(x)}{x-z}dx$，除$\mathrm{supp}\,f_\lambda(x)$外是解析的：$\iota(f_\lambda)=G_\lambda(z)$。于是我们定义$\iota(f)=\sum\limits_\lambda\iota(f_\lambda)$。这里我们遇到了收敛性的问题。今试以一例说明怎样解决这个问题。

例　令$\chi([a,b])(x)$表示区间$[a,b]$的特征函数

$$\chi([a,b])(x)=\begin{cases}1, & x\in[a,b],\\ 0, & x\notin[a,b].\end{cases}$$

于是相应于$\iota(\chi[a,b])(x)$的定义函数是

$$G(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi([a,b)(x)}{x-z}dx=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{dx}{x-z}=\frac{1}{2\pi i}ln\frac{b-z}{a-z},$$

即$\iota[\chi([a,b)]=[G(z)]$。双方微分，有

$$\frac{d}{dx}\iota(\chi)=-\delta(x-b)+\delta(x-a).$$

于是再看Heaviside函数$Y(x)$。我们有

$$Y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\chi([k,k+1])\,(x)\quad(p.p.).$$

而$\iota(Y(x))$应定义为$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\iota(\chi[k,k+1])=\frac{1}{2\pi i}\sum\Big[\ln\frac{k+1-z}{k-z}\Big]$。但$\sum\ln\frac{k+1-z}{k-z}$显然是

发散的，因此我们对每一个$\left[\ln\dfrac{k+1-z}{k-z}\right]$要另取一个代表元。当$k\geqslant 1$时，我们取

$$\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{k+1-z}{k-z}-\frac{1}{2\pi i}\ \frac{1}{k}.$$

因为由Taylor公式$\ln\dfrac{k+1-z}{k-z}-\dfrac{1}{k}=O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$。所以当$z\in C\setminus\bar{R}^+$时，$\dfrac{1}{2\pi i}\ln\dfrac{1-z}{-z}+\dfrac{1}{2\pi i}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\ln\dfrac{k+1-z}{k-z}-\dfrac{1}{k}\right)$收敛，从而代表一个解析函数。我们将它写为

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{N}\ln\frac{k+1-z}{k-z}+\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=N+1}^{\infty}\left(\ln\frac{k+1-z}{k-z}-\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\ln(-z)+\frac{1}{2\pi i}\left\{\ln(N+1-z)-\sum_{k=N+1}^{\infty}\left(\ln\frac{k+1-z}{k-z}-\frac{1}{k}\right)\right\}-\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}.$$

最后一项及中间一项均在$C\setminus(N+1,\infty)$中解析，因此，若我们限于考虑$x\in(-\infty, N+1)$，则$\iota(Y(x))$与$\dfrac{1}{2\pi i}\left[\ln(-z)\right]$一致。或者用明确的计算有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{k+1-z}{k-z}\right]=\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{k+1-z}{k-z}\right]$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{2\pi i}\ln(-z)+\frac{1}{2\pi i}\ln(N+1-z)\right]=\left[-\frac{1}{2\pi i}\ln(-z)\right].$$

实际上，我们的做法是在各个不同的区间上作超函数$\left[-\dfrac{1}{2\pi i}\ln(-z)+\dfrac{1}{2\pi i}\ln(N+1-z)\right]$，而在这些区间上这个超函数又等于$\left[-\dfrac{1}{2\pi i}\ln(-z)\right]$。最后将定义在各个不区同间上的$\left[-\dfrac{1}{2\pi i}\ln(-z)\right]$"粘"起来，即得在$\mathbf{R}$上$\iota(Y(x))=\left[-\dfrac{1}{2\pi i}\ln(-z)\right]$。

定理1.8 存在一个单射$\iota: L_{1,loc}(\Omega)\to\mathscr{B}(\Omega)$。这个单射与前面定义的$\mathscr{A}(\Omega)\subset L_{1,loc}(\Omega)$之嵌入$\mathscr{B}(\Omega)$是一致的。

证 1）ι的作法。如上所述利用单位分解得$L_{1,loc}(\Omega)\ni f(x)=\sum\limits_{\lambda}f_\lambda(x)$，而$\{\mathrm{supp}f_\lambda\}$是$\Omega$的局部有限复盖。因而$\Omega$之任一点$x$的某邻域$\Omega_1$只与有限多个$\mathrm{supp}f_\lambda$相交，设为$\mathrm{supp}f_j$，$j=1,\cdots,N$。于是考虑$\sum\iota(f_\lambda)$，而$\Omega_1$中除$\iota(f_j)$ $j=1,\cdots,N$外，其余$\iota(f_\lambda)\in O(\mathrm{U}_1)$，$\mathrm{U}_1$是$\Omega_1$的某个复邻域。因而作为超函数$\sum\iota(f_\lambda)=\sum\limits_{j=1}^{N}\iota(f_j)$就在$\Omega_1$上定义了$\iota(f)$。把这些局部定义的$\iota(f)$"粘"起来即得$\iota(f)$。

2）上述$\iota(f)$的作法与单位分解的作法无关。事实上，若利用两个不同的单位分解得出$f(x)=\sum f_\lambda(x)=\sum g_\mu(x)$。同上取$\Omega_1$，设它与$\{\mathrm{supp}f_j\}$ $j\in J$和$\{\mathrm{supp}g_k\}$ $k\in K$相交。于是在Ω_1上，$\sum\limits_{\lambda}\iota(f_\lambda)=\sum\limits_{j\in J}\iota(f_j)$，$\sum\limits_{\mu}\iota(g_\mu)=\sum\limits_{k\in K}\iota(g_k)$。但因在$\Omega_1$上$\sum\limits_{j}f_j-\sum\limits_{k}g_k=0$，而且

两项都是具有紧支集的可积函数，所以由前所述，$\sum_k \iota(g_k)-\sum_j \iota(f_j)$ 的标准定义函数 $\in \mathcal{O}(U_1)$，U_1是 Ω_1 的某个复邻域，从而作为超函数应该为 0 . 于是$\sum_\lambda \iota(f_\lambda)=\sum_\mu \iota(g_\mu)$.

3）ι 为单射的证明．这只需对于具有紧支集的 $f\in L_{1,loc}$ 证明即可．由 $\iota(f)$ 的作法易见 $\mathrm{supp}\,\iota(f)\subset \mathrm{supp} f$．现在来证 $\mathrm{supp} f\subset \mathrm{supp}\,\iota(f)$．取一个具有紧支集的连续函数 $\varphi(x)$，使 $\mathrm{supp}\varphi\cap \mathrm{supp}\,\iota(f)=\phi$．作

$$\varphi_\varepsilon(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-t)^2/\varepsilon^2}\varphi(t)dt,$$

并令 x 为复变量 z . 于是$\varphi_\varepsilon(x)$ 成为整函数．当 z 在图 5 阴影区域外面

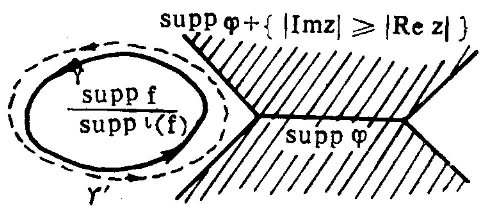

图 5

$\mathbf{C}\backslash[\mathrm{supp}\varphi+\{|Imz|\geqslant|Rez|\}]$ 的任一个紧子集中变动时，必存在常数 $\delta>0$ 使

$$Re[-(z-t)^2/\varepsilon^2]\leqslant-\delta/\varepsilon.$$

所以这时 $\varphi_\varepsilon(z)$ 随 ε 而一致趋于 0 . 取闭路 γ 与 $\mathrm{supp}\,\iota(f)$ 非常接近以致全在上述阴影区域之外，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\iota(f)\varphi_\varepsilon(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}-\int_\gamma G(z)\varphi_\varepsilon(z)dz=0.$$

但若在取极限之前即将 γ 定为包含 $\mathrm{supp} f$ 的 γ'，则

$$-\int_\gamma G(z)\varphi_\varepsilon(z)dz=-\int_{\gamma'} G(z)\varphi_\varepsilon(z)dz=-\int_{\gamma'} dz\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_\varepsilon(z)}{x-z}f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{f(x)}{2\pi i}\int_{\gamma'}\frac{\varphi_\varepsilon(z)}{z-x}dz=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi_\varepsilon(x)dx,$$

所以$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi(x)dx=0$．由 φ 的任意性即知

$$\mathrm{supp} f\subset \mathrm{supp}\,\iota(f).$$

4）最后，设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 附近的实解析函数．定义 1.3 中给出了 $f(x)\in\mathscr{B}(\Omega)$ 的意义，即 $f(x)=[\varepsilon(z)f(z)]$．今证现在定义的 $\iota(f)=[\varepsilon(z)f(z)]$．取$[a,b]$的特征函数 $\chi(x)$．$\chi(x)f(x)\in L_1$，而且 $\iota(\chi f)=[G(z)]$，这里 $G(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{f(x)dx}{x-z}$ 如图 6 作 γ_+，γ_-，则将$[a,b]$变为 r_+有：当 z 在$[a,b]$附近时

$$G(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_+}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_+}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_-}\frac{0d\zeta}{\zeta-z}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_+-\gamma_-}\frac{\varepsilon(\zeta)f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}.$$

证毕。

这一个证明中最主要之点在于：1）中将不同的Ω_i上定义的超函数"粘"成Ω上的超函数；2）中则利用超函数若在各个Ω_i上为0就必在Ω上为0。其实这两点都需要更严格的证明。因为这些性质正是最本质地反映了超函数的特性，我们将在下一节中详细地讨论。

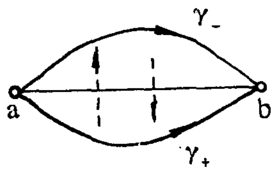

图6

在讲超函数定义时，我们指出，超函数有边值表示$[F]=F_+(x+i0)-F_-(x-i0)$。但当时这只是一个形式的记法。现在问，若$[F]=\iota(f)$，f是"通常的函数"，则是否有在古典意义下的$f(x)=F_+(x+i0)-F_-(x-i0)$？

定理1.9 若$f(x)$连续，$\iota(f)=[F(z)]$，则当$y\to 0$时广义一致地有

$$F(x+iy)-F(x-iy)\to f(x)\qquad(y\downarrow 0).$$

证 不妨设$f(x)$具有紧支集。取

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)dt}{t-z}.$$

于是

$$F(x+iy)-F(x-iy)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left(\frac{1}{t-x-iy}-\frac{1}{t-x+iy}\right)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{y}{(t-x)^2+y^2}dt.$$

定理就是上半平面的Poisson公式。证毕。

定理1.10 设$\varphi\in\mathscr{A}(\Omega)$。

1）当$f(x)\in L_{1,loc}(\Omega)$时$\varphi\cdot\iota(f)=\iota(\varphi f)$。

当$f(x)\in C_1$时，$\frac{d}{dx}\iota(f)=\iota\left(\frac{df}{dx}\right)$。

3）设$[a,b]\subset\Omega$而$f(x)$局部可积且在a,b附近为实解析，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\iota(f)dx.$$

上式左方指局部可积函数的古典意义下的积分，右方指超函数的定积分（证略）。

以上，我们把通常的函数嵌入超函数类。用类似的方法可以证明 *Schwartz* 广义函数也可以嵌入超函数类。实际上，$f(x)=[F(z)]$是一个广义函数的条件是：对Ω之任一紧子集K有

$$\sup_K |F(x+iy)| \leqslant C|y|^N,\ C,N\text{ 是某常数。}$$

其证明可见[20]、[1]。关于广义函数与解析函数的边值之关系，还可参看[2]、[13]。

——§1完，全文未完，待续。（编辑部注）

参　考　文　献*

[1] Bony, J.-M., Hyperfonctions et equations aux dèrivèes partielles, Cours à Orsay, 1976.

[2] Bremmermann, H., Distributions, Complex Variables and Fourier Transforms, Addison-Wesley, 1965.

[3] Carleman, T., L'intègrale de Fourier et Questions qui s'y Rattachant, Almqvist and Wiksell, 1944.

[4] Cêrezo, A., Piriou, A., Chazarain, J., Introduction aux hyperfonctions, Colloques hyperfonctions et physique thèorique *Lecture Notes in Math.*, No. 449, Springer, 1975, 1—53.

[5] Гельфанд И. М., Шилов, Г. Е., Обобщенны Функций, Т. 1, Гостехиздат. Москва, 1959.（中译本：林坚冰译，广义函数，I，科学出版社，北京，1965.）

[6] Guillemin, V. W., Kashiwara, M. (ed), Microlocal Analysis, *Annals of Math. Studies*, No. 91, Princton, 1979.

[7] Hilton, P. J. and Wylie, S., Homology, Cambridge Univ. Press, 1960.

[8] Hörmander, L., Fourier integral operators, I, *Acta Math.* 127 (1971), 79—180.

[9] Hörmander L., Spectral analysis of singularities, in "Propagation of Singularities", *Annals of Math. Studies*, No. 89, Princeton, 1979.

[10] 今井功，超函数论（连载），数理科学，Vol. 14（1976）起（日文）.

[11] Иваненко, Д. и Соколов, А., Классическая Теория Поля, Гостехиздат, Москва, 1951.（中译本：伊凡宁柯等，经典场论，科学出版社，北京，1958.）

[12] 华罗庚，广义函数导引，数学进展，第六卷 No.4（1963），391—410.

[13] de Jaeger. E, M., Theory of distributions, in É. Roubine (ed.) "Mathematics Applied to Physics", Springer, 1970.

[14] 金子晃，超函数入门（上），东京大学出版会，1980.（下册即将出版，）（日文）.

[15] Kaneko, A., Thèorie des Hyperfonctions, Cours à Grenoble, Vol. 1—2, 1978.

[16] 小松彦三郎，超函数入门，岩波讲座，基础数学，1978.（日文）

[17] ——，佐藤の超函数と定数系数偏微分方程式，东大セミナリーノート，22（1968）.（日文）

[18] Sato, M., Kashiwara, M., Kawai, T., Microfunctions and pseudo-differential epuations, Part I, *Lecture Notes in Math.*, No. 287, Springer, 1973, 263—529.

[19] 柏原正树、河合隆裕、木村达雄，代数解析学の基础，纪伊国屋书店，1980.（日文）

[20] Köthe, G. Die Randverteilungen Analytischer Funktionen, *Math. Zeit.*, 57 (1952), 13—33.

[21] Маркущевич, А. И., Теория Аналитической Функции, Гостехиздат, МосквА, 1950.（中译本：马库什维奇，解析函数论，高教出版社，1954.）

* 参考文献对全文而言，续篇不再附文献。

[22] 森本光生，佐藤超函数入门，共立出版社，1976.(日文)
[23] Sato, M., Theory of hyperfunctions, I, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Sect. 1, 8 (1959), 139—193; Ⅱ, *ibid* 8 (1960), 387—437.
[24] Schapira, p., Thèorie des hyperforctions, *Lecture Notes in Math.*, No. 126, *Springer*, 1970.

本刊 1981 年创刊号
“在初等分析中发展椭圆函数”一文的勘误

莫 绍 揆

第 90 页从 15 行到 17 行应改叙为：

设有一刚体棒，非常细长，末端缚以一重物，固定于一支点 o 上，当棒静止时它处于垂直位置，如对该棒给以一个初速（设右向），然后听任棒受重力作用而运动。假定支点处的阻力与空气阻力以及棒本身的质量可以忽略不计，这便是单摆运动。

1981年第一期（总第二期）勘误

页	行	误	正
26	末行	半对空间	半对称空间
54	倒 9 行	НаТалсон	Натансон
60	11	经验 Bapes 估计	经验 Bayes 估计
60	14	$g(x)f(x)$	$g(x)/f(x)$
60	15	$g_n(x)/f_*^n(x)$	$g_n(x)/f_n^*(x)$
60	18	$\begin{cases} f_r(x) \\ n^{-1/3} \end{cases}$	$\begin{cases} f_u(x) \\ n^{-1/3} \end{cases}$
63	倒 8 行	$I_{(f_n(X)<n^{-1/3}, fX\geqslant 2n^{-3/1})}$	$I_{(f_n(X)^{-1/3}, f(X)\geqq 2n^{-1/3})}$
64	倒 3 行	$E\{(1+n^{1/3}f_z(x))I_{(f_n(x)<n^{-1/3})}\}$	$E\{(1-n^{1/3}f_n(x))I_{(f_n(x)<n^{-1/3})}\}$
64	倒 2 行	$-n^{-3/2}$	$-n^{-2/3}$
66	倒 5 行	$d_n^2(x)$	$d_H^2(x)$
151	§1下第 5 行	kant	Kant
173	倒 8 行	陈极泰	程极泰
174	第 2 行	opial	Opial

1981年第二期（总第三期）勘误

页	行	误	正
139	6	$C(\theta)^{\theta x}h(x)dx$	$C(\theta)\theta^x h(x)dx$
139	15	先经分布族	先验分布族
139	倒 2	$O\left(\frac{1}{h}\right)$	$O\left(\frac{1}{n}\right)$
140	9	先经分布族	先验分布族
145	倒 9	不敢越电池	不敢越雷池
147	13	主要收获	主要收获