椭圆型方程广义解最大值原理未解决的问题*

梁鋆廷

（大港油田测井总站）

设G为n维空间E^n中的有界区域。在G，函数$a^{\alpha\beta}(x)$，$b^\alpha(x)$，$c^\alpha(x)$和$d(x)$等都是可测函数，并分别满足如下的条件：存在常数$\kappa\geqslant1$，$\gamma\in[0,1]$，使

$$\kappa^{-1}|\xi|^2\leqslant a^{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha\xi^\beta\leqslant\kappa|\xi|^2\quad\forall x\in G,\ \xi=(\xi^1,\cdots,\xi^n)\in E^n;$$

$$b^\alpha(x),\ C^\alpha(x)\in L_{2p}(G),\ d(x)\in L_p(G),\ p>\frac{n}{2};$$

$$\int_G\{v_{1\alpha}(\gamma b^\alpha(x)+(1-\gamma)c^\alpha(x)+vd(x)\}dx\geqslant0\quad\forall v\in\mathring{W}_2^1(G),\ v\geqslant0,$$

其中$v_{1\alpha}\equiv\frac{\partial}{\partial x^\alpha}v$。设$u\in W_2^1(G)$满足

$$\int_G\{v_{1\alpha}(a^{\alpha\beta}(x)u_{1\beta}+b^\alpha(x)u)+v(c^\alpha(x)u_{1\alpha}+d(x)u)\}dx\leqslant0\quad\forall v\mathring{W}_2^1(\mathrm{G}),\ v\geqslant0.$$

由于Trudinger的工作(Math. Zeit., Bd 156, 1977, 291—310)，成立如下的结果：

如果$u^+=\max(u,0)\in\mathring{W}_2^1(\mathrm{G})$，那么$u\leqslant0$在$G$。而当$\gamma=1$时，成立更强的结果：如果存在$M>0$，使$u_M^+=\max(u-M,0)\in\mathring{W}_2^1(\mathrm{G})$，那么$u<M$在G。这即是解的最大值原理(强最大值原理的证明见Trudinger和Gilbarg合著的书)。

现在，当$\gamma<1$时，解的最大值原理是否成立，则还是悬而未决的。

* 19 1年7月1日收到。