Vol. 2, No. 2, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

关于有序域的几则短记*

戴执中

（江西大学）

Dubois 在文［1］中举反例示明，在 Artin 所解决的 Hilbert 第 17 问题中所出现的系数域是个亚基米德有序域这一条件是不能减弱的（见［1］或者［7］）1) 在他所举出的反例中，隐约地使用了一些有关序与赋值相互关系的概念与事实，但都没有明显地提出或证明．这篇短文首先是阐明隐含在［1］中的一些概念和事实；其次指出他的例子还可以用来说明 Lang 在［4］中的一个有关推广 Hilbert 第 17 问题的结果，其条件同样是不能再行减弱的。然后，仿照［1］的例子，我们作出另一个例子来示明 Knebusch 与 Wright 在［5］中一个结果的逆理是不能成立的。最后，我们就 Nagata 在［6］中所得到的结果，指出它可以从实位的理论推导出来．

1° 设 (K,σ) 是个有序域，φ 是 K 的一个（乘法）赋值．对于 K 的元素 a，b，若由

$$0<a<b \qquad (\text{关于}\sigma)$$

可以导出 $\varphi(a)\leqslant\varphi(b)$ 2)，就称 φ 与 σ 是相容的，或者说，φ 是 (K,σ) 的一个保序赋值．

设 A 是 (K,σ) 的一个赋值环．设对于 K 的元素 a，b，有

$$0<a<b \qquad (\text{关于}\sigma)$$

成立．若由 $b\in A$ 可导出 $a\in A$，则称 A 与 σ 是相容的，或者说，A 关于 σ 是个凸集（见［5］）．

今有如下的

引理1 设 φ 是有序域 (K,σ) 的一个赋值，A 是它的赋值环．φ 与 σ 成为相容的，当且仅当 A 与 σ 是相容的．

证明 设 A 与 σ 是相容的．由 $0<a<b$ 得到 $0<ab^{-1}<1$，从而 $ab^{-1}\in A$．因此，$\varphi(ab^{-1})\leqslant 1$，即 $\varphi(a)\leqslant\varphi(b)$．

反之，设 φ 与 σ 是相容的．若 $0<a<b$，则有 $0<ab^{-1}<1$．由此得 $\varphi(ab^{-1})\leqslant\varphi(1)=1$．因此 $ab^{-1}\in A$．若 $b\in A$，则由 $a\in Ab$ 即得 $a\in A$．▌

* 1981 年 5 月 20 日收到．

1) 作者没有见到过［3］的第一版（1965）．但载于该书第二版上的结论（P. 279, Coro. 2）是经过修正的．Dubois 所指责的是载于第一版上的同一结果．

2) 若用加法赋值 v，则应为 $va\geqslant vb$．

Dubois的例子是：对Q(t)取一个序σ，使得在这个序下，未定元t是个正的无限小。作Q(t)关于σ的实闭包R。R的唯一的序仍记作σ。令A是R中对于子域Q为有限（关于σ）的全部元素所成的赋值环。根据现在所有的结果（见[5]，P.315），A与σ是相容的。设v是一个以A为赋值环的加法赋值，按上面的引理，v是(R, σ)的一个保序赋值。从这个事实才可以得到文[1]中的关键部分："由$f(y)<0$可以导至$v(y)=1/3$"。

2° Lang在[4]中曾对Artin所解决的Hilbert第17问题作了如下的推广([4]，定理9)：

定理(Lang) 设F是个实域，K是F上实的函数域，$\xi\in$K。若对于K的每个使ξ取有限值的F上实零维位λ，就λ(K)的每一个序而言，皆有$\lambda(\xi)\geqslant 0$，则ξ是K中的平方和。

借助于Dubois的例子，可以示明，这个定理中的条件同样是不能减弱的。首先，在上面所作的实闭包R中取Q(t)的二次闭包F。此时实域F只有唯一的序。今考虑实的函数域K＝F(X)，又在其中取元素$\xi=(X^3-t)^2-t^3$。如[1]所指出，ξ不能是K中的平方和，可是另一方面，对于K的每个F上有理位λ（要求使ξ取有限值），皆有$\lambda(\xi)\geqslant 0$。今考虑由映象

$$X\longmapsto\sqrt[3]{t}$$

所给出的K的一个F上的实零维位λ。此时显然有$\lambda(\xi)<0$。这就指明了定理中的实零维位不能减弱成为有理位。

可是另一方面，如果F是个实数域(或者，亚基米德有序域)，元素$\xi\in$K＝F(X)在某个实零维位λ取值$\lambda(\xi)<0$，从ξ的连续性可知，ξ在某个有理位也必然取负值。因此，在实数域的前提下，上述定理中的条件自然演化成为在有理位只取非负值了。于是得到

定理(Artin) 设F是个实数域，K＝F(X)。又设$\xi\in$K，若对于K的每个使ξ取有限值的F上有理位λ，皆有$\lambda(\xi)\geqslant 0$，则ξ是K中的平方和。

3° Knebusch与Wright在[5]中证明了以下的结论([5]，定理2.1，2.2)：

设K是个实域，φ是K的一个Hensel赋值。于是φ与K的每个序都是相容的。特别在K为实闭域时，φ成为Hensel赋值与φ与K的唯一的序相容，二者是等价的。

从这个定理我们自然会问：对于一个实域K，如果赋值φ与K的每个序都是相容的，φ是否必然成为Hensel赋值？

仿照Dubois的作法，现在我们作出一个例子，用以示明上面的问题有否定的回答。

设F＝Q($\sqrt[3]{2}$)。作F上的有理函数域F(t)，并且对它规定一个序σ，使得σ在F上的限定是通常实数的序，而t在σ下是个正的无限小。作F(t)关于σ的实闭包R，然后在其中取F(t)的二次闭包K。此时K只有唯一的序，仍记作σ。设A是有序域(K,σ)中关于子域F的正则赋值环（即由所有关于F的有限元素所成的赋值环），φ是一个以A为赋值环的赋值。A上的多项式

$$X^3-(2+t)$$

在K上是不可约的，因为$\sqrt[3]{2+t}\notin$K。但由于$\sqrt[3]{2}$是A中的单元，上面的多项式在剩余域上的象X^3-2是可约的，且有互素的因式。这就示明了A不满足Hensel条件，即φ不

是Hensel赋值。但另一方面，A与K的唯一的序σ是相容的([5],引理1.1)，按引理1，φ与σ是相容的，也即φ与K的所有的序都是相容的。

我们还可以进一步证明，这里所作的赋值环A(从而赋值φ)，它同时也不能是半Hensel的。这个事实可以一般地陈述如下：

引理2　设(K,σ)是个有序域，又设K的赋值环A与σ是相容的。若A不是Hensel赋值环，则A也不是半Hensel赋值环。

证明　设R是(K,σ)的实闭包，假若A是半Hensel的，于是A在R上只有唯一的拓展([2]，定理3.3)。按所设，A与σ是相容的，故有$A=K\cap B$，这里B是R的一个Hensel赋值环([5],定理2.4)。这就示明了A在R上只有唯一的一个拓展B，而且是个Hensel赋值环，从而A本身也是个Hensel赋值环，矛盾 ▮

由此又得到下面这个附带的结论：

推论　设(K,σ)是一个有序域。若赋值环A与σ是相容的，则A不能是半Hensel赋值环。▮

注意　还应当指出，在上面的例子中，K也可以取$F(t)$上任何一个不为实闭域的传袭欧氏域(Hereditarily Euclidian Field)。实闭域本身固然是传袭欧氏域，但在$F(t)$的实闭包R内尚有许多异于R的传袭欧氏域存在(见[8],定理3.5)。上面的例子示明了，实闭域与非实闭的传袭欧氏域，二者是很有差异的。

4°　在[6]中，Nagata证明如下的主要结果([6],定理2)：

设域K有赋值环A。又设A关于其极大理想M的剩余域A/M可以单一映象于实数域**R**内。于是存在K的一个序σ，使得A成为(K,σ)中关于某个子域F的正则赋值环。

文[6]的证明是纯属赋值理论的，作者使用了极大完全域。但这个结果可以很自然地从实位理论推导出来。为此，我们先来引进一个称谓：

设P是个实域。$\lambda: K\to P\cup\{\infty\}$是有序域$(K,\sigma)$的一个P-值位。又设$\tau$是P的某个序。若对于K中每个元素$a>0$(关于$\sigma$)，总有$\lambda(a)=\infty$或者$\lambda(a)\geqslant 0$(关于P的序$\tau$)，则称$\lambda$与$\sigma$是$\tau$-相容的。特别在对于P的每个序$\tau$都是$\tau$-相容时，迳称$\lambda$与$\sigma$是相容的。

首先有

引理3　设(K,σ)，(P,τ)，与λ的意义如上；又设A是位λ的赋值环。若λ与σ是τ-相容的，则A与σ也是相容的。

证明　设K的元素a，b适合

$$0<a<b\qquad(\text{关于}\sigma)$$

又设$b\in A$。此时有$\lambda(b)\neq\infty$。按所设λ与σ是τ-相容的，故由$ba^{-1}>1$可得出

$$\lambda(ba^{-1})=\infty\quad\text{或者}\lambda(ba^{-1})\geqslant 1\quad(\text{关于}\tau)。$$

假若$\lambda(a)=\infty$，则由上面的二种可能都会导至

$$\lambda(b)=\lambda(a)\lambda(ba^{-1})=\infty$$

而与所设矛盾。因此$\lambda(a)\neq\infty$，从而$a\in A$，即A与σ是相容的。▮

根据Nagata定理的前设，自然存在一个以A为其赋值环的实位λ：$K \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. 故由[4]的定理6，或者[5]的定理3.4，存在K的一个序σ，使得λ与σ是相容的（因为**R**只有唯一的序）. 再按以上的引理，A与σ是相容的. 若F是包含在A中的极大子域. 则A就是关于F的正则赋值环([5],定理1.3).

参 考 文 献

[1] Dubois, D.W.: Note on Artin's solution of Hilbert's 17-th Problem. *Bull. A.M.S.* Vol. 73(1967), pp. 540-541.

[2] Engler, A.: Fields with two incomparable Henselian valuation rings. *Manuscripta Mathematica*, Vol. 23(1978), 373-385.

[3] Lang, S.: Algebra, 2-nd Ed., 1971.

[4] ---,: The Theory of real Places. *Ann. of Math.* Vol. 57(1953), pp. 378-391.

[5] Knebusch. M.: Wright, M.: Bewertungen mit reeller Henselisierung. *Jour. für. Math.* Vol. 286/287(1976), 341-321.

[6] Nagata, M.: Some Remarks on ordered Fields. *Jap. Jour. Math.* Vol. 1(1975). pp. 1-5.

[7] Pfister, A.: Hilbert's 17-th Problem and related Problems on definite Forms. *Proc. Sym. Pure Math.* Vol. 28(1976).

[8] Prestel, A., Ziegler, M.: Erblich Euklidische Körper, *Jour. für Math.* 274—275 (1975), pp. 196-205.

Some Remarks on Ordered Fields

By Dai Zhi-Zhong (戴执中)

Abstract

In this note, Dubois' counter-example to Lang's formulation of Hilbert's 17-th problem is re-examined, besides, a field admitting only one ordering is constructed which has a non-henselian valuation ring compatible with its ordering. Let $F = Q(\sqrt[3]{2})$, let t be an indeterminate, let $F(t)$ be ordered so that t is positive and infinitesimal, and let K be the quadratic closure of $F(t)$ with respect to the given ordering. The canonical valuation ring A of K is of course compatible with the unique ordering of K. However, it is shown that A is not henselian.