Vol. 2, No. 2, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

可分解算子的某些性质*

王声望　　邹承祖　　孙善利

（南京大学）　　（吉林大学）

本文讨论可分解算子的性质．特别，我们比较圆满地解决了可分解算子的对偶定理．这一问题，最近十多年来一直受到人们的关注（[1]、[3]、[5]）．由于[5]中关于这一定理的证明是错误的，因此，过去这一问题一直没有妥善解决．我们在共同研究这一问题时，受到[2]的启发：

设 X 为 Banach 空间．以 $X^{(n)}$ 记X的第 n 次共轭空间，这里 n 为自然数，以 B(X) 表示 X 上有界线性算子的全体．对 $T\in B(X)$，以 $T^{(n)}$ 记 T 的第 n 次共轭算子．令 τ 为 X 到 $X^{(2)}$ 中的自然映射，σ 为 $X^{(1)}$ 到 $X^{(3)}$ 中的自然映射．下面的关系是显然的：

$$\langle x^{(1)},\tau x\rangle=\langle x,x^{(1)}\rangle \qquad (x\in X, x^{(1)}\in X^{(1)}); \tag{1}$$

$$\langle x^{(2)},\sigma x^{(1)}\rangle=\langle x^{(1)},x^{(2)}\rangle \qquad (x^{(1)}\in X^{(1)}, x^{(2)}\in X^{(2)}). \tag{2}$$

用 $T\in SVEP$ 表示 T 具有单值延拓性．对闭子空间 $Y\subset X$、用 $Y\in In(T)$（AI(T) 或 SM(T)）表示 Y 为 T 的不变子空间（解析不变子空间或谱极大子空间）．用 $\mathfrak{N}(T)$ 表示 T 的零空间，用 $\mathcal{R}(T)$ 表示 T 的值域．

对子空间 $Y\subset X$，令

$$Y^{\perp}=\{x^{(1)}\in X^{(1)}\,|\,\langle x,x^{(1)}\rangle=0 \text{ 对一切 } x\in Y\}.$$

对子空间 $Z\in X^{(1)}$，令

$$^{\perp}Z=\{x\in X\,|\,\langle x,x^{(1)}\rangle=0 \text{ 对一切 } x^{(1)}\in Z\}.$$

定理 1　设 $T^{(4)}\in SVEP$，则 $\tau X\in AI\ (T^{(2)})$．

证　分以下两步：

1° 证明 $X^{(3)}=\sigma X^{(1)}\dotplus(\tau X)^{\perp}$．对任一 $x^{(3)}\in X^{(3)}$，由关系式

$$\langle x,x^{(1)}\rangle=\langle \tau x,x^{(3)}\rangle \ (x \text{ 跑遍 } X)$$

定义了 $X^{(1)}$ 中唯一的元 $x^{(1)}$．由

$$\langle x,x^{(1)}\rangle=\langle x^{(1)},\tau x\rangle=\langle \tau x,\sigma x^{(1)}\rangle,$$

* 1981年7月4日收到．

得$\langle \tau x,\sigma x^{(1)}\rangle=\langle \tau x,x^{(3)}\rangle$. 令$\tilde{x}^{(3)}=x^{(3)}-\sigma x^{(1)}$，则$\tilde{x}^{(3)}\in(\tau X)^{\perp}$. 再由显然的关系$\sigma X^{(1)}\cap(\tau X)^{\perp}=\{0\}$，可知$X^{(3)}=\sigma X^{(1)}\dotplus(\tau X)^{\perp}$.

令P为以$\sigma X^{(1)}$为值域以$(\tau X)^{\perp}$为零空间的投影算子.

2° 证明$\tau X\in AI(T^{(2)})$. 由于$\sigma X^{(1)}$、$(\tau X)^{\perp}$均为$T^{(3)}$的不变子空间，故P与$T^{(3)}$可换，于是P的共轭算子$P^{(1)}$作为$X^{(4)}$中的投影算子与$T^{(2)}$可换.以下的事实都是熟知的(见[10]命题16.6等)：

$$(X^{(2)}/\tau X)^{(1)}=(\tau X)^{\perp}=\mathfrak{N}(P),$$

而$\mathfrak{N}(P)$与$X^{(3)}/\sigma X^{(1)}$拓朴同构且

$$(X^{(3)}/\sigma X^{(1)})^{(1)}=\mathfrak{N}(P^{(1)}),$$

故$(X^{(2)}/\tau X)^{(2)}$与$\mathfrak{N}(P^{(1)})$拓朴同构. 于是

(i) $T^{(2)}$在$X^{(2)}/\tau X$中的诱异算子$\widehat{T^{(2)}}$的共轭算子为$T^{(3)}|\mathfrak{N}(P)$;

(ii) $T^{(3)}|\mathfrak{N}(P)$与$T^{(3)}$在$X^{(3)}/\sigma X^{(1)}$中的诱导算子$\widehat{T^{(3)}}$相似，而$\widehat{T^{(3)}}$的共轭算子为$T^{(3)}|\mathfrak{N}(P^{(1)})$，于是

(iii) $\widehat{T^{(2)}}$的二次共轭算子与$T^{(4)}|\mathfrak{N}(P)$相似.

由假设，$T^{(4)}\in SVEP$，故$T^{(4)}|\mathfrak{N}(P^{(1)})\in SVEP$. 由(iii)，$\widehat{T^{(2)}}\in SVEP$，再由[5]定理2.11，$\tau X\in AI(T^{(2)})$. 证毕.

推论 1 设$T^{(4)}\in SVEP$，则对复平面$\mathbf{C}$的任何子集E，有

$$\tau X_T(E)=X^{(2)}_{T^{(2)}}(E)\cap\tau X.$$

证 因$T^{(4)}\in SVEP$，故$T^{(2)}$、T均属于SVEP，于是可定义$X^{(2)}_{T^{(2)}}(E)$、$X_T(E)$.

"$\subset$"显然成立. 反之，对$x\in X$，若$\tau x\in X^{(2)}_{T^{(2)}}(E)$，则存在$X^{(2)}$-值解析函数$x^{(2)}(\lambda)$使

$$(\lambda-T^{(2)})x^{(2)}(\lambda)=\tau x\qquad(\lambda\notin\sigma_{T^{(2)}}(\tau x)).\tag{3}$$

因$\tau X\in AI(T^{(2)})$，故$x^{(2)}(\lambda)\in\tau X(\lambda\notin\sigma_{T^{(2)}}(\tau x))$. 令$x(\lambda)=\tau^{-1}x^{(2)}(\lambda)$，由(3)，$(\lambda-T)x(\lambda)=x\quad(\lambda\notin\sigma_{T^{(2)}}(\tau x))$. 因$\sigma_{T^{(2)}}(\tau x)\subset E$，故$x\in X_T(E)$，$\tau x\in\tau X_T(E)$. "$\supset$"成立. 证毕.

推论 2 设$T^{(3)}\in SVEP$，则对任何子集$E\subset\mathbf{C}$，

$$\sigma X^{(1)}_{T^{(1)}}(E)=PX^{(3)}_{T^{(3)}}(E).\tag{4}$$

证 任取$x^{(3)}\in X^{(3)}_{T^{(3)}}(E)$，因P与$T^{(3)}$可换，$\sigma_{T^{(3)}}(Px^{(3)})\subset E$，故由推论1，

$$Px^{(3)}\in X^{(3)}_{T^{(3)}}(E)\cap\sigma X^{(1)}=\sigma X^{(1)}_{T^{(1)}}(E),$$

因此$\sigma X^{(1)}_{T^{(1)}}(E)\supset PX^{(3)}_{T^{(3)}}(E)$. "$\subset$"显然，(4)成立. 证毕.

推论 3 设$T^{(2)}$可分解，则对任何闭集$F\subset\mathbf{C}$，$X_T(F)$闭.

证 由$T^{(2)}$可分解，$X^{(2)}_{T^{(2)}}(F)$闭，再由[5]，可知$T^{(3)}$、$T^{(4)}$均可分解，特别，$T^{(4)}\in SVEP$. 由推论1，$\tau X_T(F)$闭，于是$X_T(F)$闭. 证毕.

推论 4 设$T^{(1)}$可分解，则对任何闭集$F\subset\mathbf{C}$，有

$$X_T(F)={}^{\perp}[X^{(1)}_{T^{(1)}}(G)],$$

其中 $G=\mathbf{C}\backslash F$

证　由推论 1 及 $X^{(2)}_{T^{(2)}}(F)=[X^{(1)}_{T^{(1)}}(G)]^{\perp}$(后一等式可参考[5]) 立即可得．证毕．

在[9] 中引进了有限阶可分解算子的概念，对这类算子，有

推论 5　设 $T^{(3)}$为有限阶可分解，则 $T^{(1)}$也是有限阶可分解的．

证　由关系 $X^{(3)}=\sigma X^{(1)}\dotplus(\tau X)^{\perp}$以及推论 2，容易证明 $T^{(3)}|\sigma X^{(1)}$可分解，于是 $T^{(1)}$可分解．再根据有限阶可分解的定义，存在自然数 n 使对任何闭集 $F\subset\mathbf{C}$,

$$X^{(3)}_{T^{(3)}}(F)=\bigcap_{\lambda\in F^c}(\lambda-T^{(3)})^nX^{(3)},$$

于是

$$\sigma X^{(1)}_{T^{(1)}}(F)=PX^{(3)}_{T^{(3)}}(F)=P\bigcap_{\lambda\in F^c}(\lambda-T^{(3)})^nX^{(3)}$$

$$=\bigcap_{\lambda\in F^c}(\lambda-T^{(3)})PX^{(3)}=\bigcap_{\lambda\in F^c}(\lambda-T^{(3)})^n\sigma X^{(1)},$$

故 $T^{(3)}|\sigma X^{(1)}$为有限阶可分解，于是 $T^{(1)}$为有限阶可分解．证毕．

推论 5 还可改成：对 $n\geqslant3$，由 $T^{(n)}$有限阶可分解可导出 $T^{(n-2)}$有限阶可分解．

现在着手讨论可分解算子的对偶定理，先证明下面的命题．命题中所用到的有关 X-拓扑的若干概念可参看[6]．

定理 2　设 $T^{(1)}\in SVEP$，则 $T^{(1)}$的任一谱极大子空间均为 X－闭的．

证　设 $Y\subset X^{(1)}$属于 $SM(T^{(1)})$，S 为 Y 的闭单位球，Z 为 S 的 X－闭包 $\bar{S}^W$ 的线性包 (实际上$Z=\bigcup_{n=1}^{\infty}(n\bar{S}^W)$)．由[6]定理 V.5.7，$Z$ 为 X－闭的，且不难证明 Z 为 Y 的 X－闭包．Z 显然是 $T^{(1)}$的不变子空间．

若能证明 $Z\subset Y$，则命题成立，为此，只须证明 $\sigma(T^{(1)}|Z)\subset\sigma(T^{(1)}|Y)$．设 $\lambda\notin\sigma(T^{(1)}|Y)$．对任何 $x^{(1)}\in Z$，有半序点列$\{x^{(1)}_\alpha\}\subset Y$ 使 $\|x^{(1)}_\alpha\|\leqslant\|x^{(1)}\|$ 且

$$\{x^{(1)}_\alpha\}\to x^{(1)}\ (\text{按 X－拓扑}).$$

令 $y^{(1)}_\alpha=R(\lambda,T^{(1)}|Y)x^{(1)}_\alpha$．由

$\|y^{(1)}_\alpha\|\leqslant\|R(\lambda,T^{(1)}|Y)\|\,\|x^{(1)}_\alpha\|\leqslant\|R(\lambda,T^{(1)}|Y)\|\,\|x^{(1)}\|$，存在$\{y^{(1)}_\alpha\}$的共尾子列$\{y^{(1)}_{\alpha'}\}$(关于共尾子列可参考[7]) 使

$$\{y^{(1)}_{\alpha'}\}\longrightarrow y^{(1)}\in Z\ (\text{按 X-拓扑}).$$

在 $x^{(1)}_{\alpha'}=(\lambda-T^{(1)})y^{(1)}_{\alpha'}$ 中取极限，可得 $x^{(1)}=(\lambda-T^{(1)})y^{(1)}$，故 $\lambda-T^{(1)}|Z$ 是满映射．由假设 $T^{(1)}\in SVEP$，再由[5]可知 $\lambda\notin\sigma(T^{(1)}|Z)$、因此 $\sigma(T^{(1)}|Z)\subset\sigma(T^{(1)}|Y)$．命题证毕．

在[1]中引进了 ∗－可分解的概念，由定理 2 立即可得

推论　设 $T^{(1)}$可分解，则必 ∗－可分解．

定理 3　设 $T^{(1)}$可分解，则 T 可分解．

证　由定理 2，对任何闭集 $F\subset\mathbf{C}$，$X^{(1)}_{T^{(1)}}(F)$ 是 X－闭的．令 $Y={}^{\perp}[X^{(1)}_{T^{(1)}}(F)]$，则 Y 是 T 的超不变子空间，因而是 T 的 ν-子空间，并且 $Y^{\perp}=X^{(1)}_{T^{(1)}}(F)$．因 $(X/Y)^{(1)}=X^{(1)}_{T^{(1)}}(F)$，T 在 X/Y 中的诱导算子 $\hat{T}$的共轭算子为 $T^{(1)}|X^{(1)}_{T^{(1)}}(F)$，故 $\sigma(\hat{T})=\sigma(T^{(1)}|X^{(1)}_{T^{(1)}}(F))\subset F$．再由 $Y^{(1)}=X^{(1)}/X^{(1)}_{T^{(1)}}(F)$ 以及[4]定理 2，$\sigma(T|Y)\cap F^{\circ}=\sigma((T|Y)^{(1)})$

$\cap F^\circ = \sigma(\widehat{T}^{(1)}) \cap F^\circ = \emptyset$，这里$\widehat{T}^{(1)}$是$T^{(1)}$在$X^{(1)}/X^{(1)}_{T^{(1)}}(F)$中的诱导算子，$F^\circ$为$F$的内点的全体。令$G = \mathbf{C} \backslash F$，则$Y$与$G$满足[5]定理12.15的全部条件，且$Y$为$T$的$\nu$-空间，而该定理的充分性部份在补充了$Y$为$T$的$\nu$-空间这一假定后仍成立，故$T$可分解。证毕。

参考文献

[1] Vasilescu, F.—H., Rev. Roum. Math. pures et Appl., 19 (1974), 1055—1059.

[2] 江泽坚、邹承祖，吉林大学自然科学学报，1964年第1期，65—75.

[3] Frunză, S., Indiana Univ. Math, J. 26 (1977), 473—482.

[4] Jafarian, A. A. and Vasilescu, F.—H., Rev. Roum. Math. pures et Appl., 19 (1974), 769—771.

[5] Erdelyi, I. and Lange, R., Spectral Decompositions on Banach Spaces, Lecture Notes, Springer, 623, 1977.

[6] Dunford, N. and Schwastz, J. T., Linear Operators, Part I, New York, 1957.

[7] 关肇直，拓扑空间概论，科学出版社，1958.

[8] Colojoară, I. and Foiaş, C., Theory of generalized Spectral Operators, New York, 1968.

[9] 刘光裕，$\mathscr{D}_{(M_k)}$型算子与可单位分解算子的若干问题，南京大学研究生毕业论文，1981.

[10] Browu, A. and Pearcy, C., Introduction to Operator I, Springer—Verlag, New York, 1977.

Some Properties of Decomposable Operators

By Wang Shengwang, 王声望 *Zou Chengzu,* 邹承祖 & *Sun Shanli* 孙善利

Abstract

In this paper, we have proved the following theorems:

Theorem 1. If $T^{(4)} \in SVEP$, then τX is an analytic invariant subspace of $T^{(2)}$, where τ is the natural imbedding from X to $X^{(2)}$.

Theorem 2. If $T^{(1)}$ is decomposable, then T is decomposable too.

The authoıs take this opportunity to express their gratitude to the author of[2].