Vol. 2, No. 2, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

非线性特征值问题的注记*

丁鸿明

(上海交通大学)

设E是Banach空间，对每个复数λ，$M(\lambda)$是E上线性有界算子，即$M(\lambda)\in\mathscr{L}(E)$，$M(\lambda)$关于入Fréchet可微，考察算子方程

$$x=KM(\lambda)x \tag{1}$$

及相应的近似方程

$$x_n=K_nM(\lambda_n)x_n, \tag{2}$$

[1]中在近似特征值λ_n和相应特征元x_n已经收敛的假定下，给出了特征值和特征元的误差估计以及迭代校正后的误差估计。

本文将要指出，特征值和相应特征元的收敛性实际上正是[1]中定理2其它条件下的结果，不必作为预先的假设引入，在方程(1)和(2)的特征值不是简单的一般情况，本文证明了在[1]的定理2的条件下，(1)和(2)的特征值都是单秩的，并给出特征值和特征元的误差估计。

定理1 设E是Banach空间，对每个复数λ，$M(\lambda)\in\mathscr{L}(E)$，关于入可微．$K$和$K_n$在$E$上线性全连续，且

$$\|K_n-K\|\to0,\qquad 当n\to\infty时。 \tag{3}$$

则对方程(1)的孤立特征值λ^*，存在方程(2)的特征值λ_n，使$\lambda_n\to\lambda^*$。反之，方程(2)的特征值λ_n的每个极限点λ^*都是方程(1)的特征值。

证明 设λ^*是方程(1)的孤立特征值，则存在$\delta>0$，使圆$|\lambda-\lambda^*|\leqslant\delta$内不包含方程(1)的与$\lambda^*$不同的特征值．设$\varepsilon$任意小，使$0<\varepsilon\leqslant\delta$．由于$K$全连续，而圆周$\Gamma_\varepsilon$: $|\lambda-\lambda^*|=\varepsilon$上每一点都不是方程(1)的特征值，故$(I-KM(\lambda))^{-1}$对$\lambda\in\Gamma_\varepsilon$都存在．下面证明$\|(I-KM(\lambda))^{-1}\|$在$\Gamma_\varepsilon$上一致有界．如果不然，由于$\Gamma_\varepsilon$是复平面上的有界闭集，故必存在一列$\{\lambda_n\}\subset\Gamma_\varepsilon$，$\lambda_n\to\lambda_0\in\Gamma_\varepsilon$，使$\|(I-KM(\lambda_n))^{-1}\|>n$，于是存在$x_n\in E$，$\|x_n\|=1$，使$\|(I-KM(\lambda_n))x_n\|\leqslant\frac{1}{n}$，由于$M(\lambda)$关于$\lambda$ Fréchet可微，从而连续，可得$\|(I-KM(\lambda_0))x_n\|\to0$．于是$I-$

*1981年6月23日收到．

$KM(\lambda_o)$不存在有界逆，但由于K全连续，λ_o必是方程(1)的特征值，得出矛盾。于是有

$$\|(I-KM(\lambda))^{-1}\|\leqslant C.\ (C\text{是常数，}\lambda\in\Gamma_\varepsilon) \tag{4}$$

由于$M(\lambda)$连续，故$\|M(\lambda)\|$在圆C_ε: $|\lambda-\lambda^*|\leqslant\varepsilon$内有界，再由(3)，可取$n$充分大，使

$$\|(K-K_n)M(\lambda)\|<\frac{1}{2c}\qquad(\lambda\in c_\varepsilon,\ n\geqslant n_o), \tag{5}$$

由于

$$I-K_nM(\lambda)=I-KM(\lambda)+(K-K_n)M(\lambda),$$

故根据[2]引理15.2可得，$I-K_nM(\lambda)$当$\lambda\in\Gamma_\varepsilon$时可逆，且有

$$\|(I-K_nM(\lambda))^{-1}\|\leqslant 2c\qquad(\lambda\in\Gamma_\varepsilon,\ n\geqslant n_0). \tag{6}$$

假定存在一个子序列$\{n_i\}$，使对于每个n_i，方程$x=K_{n_i}M(\lambda)x$在圆C_ε内没有特征值，则$I-K_{n_i}M(\lambda)$当$\lambda\in C_\varepsilon$时可逆。象(4)的证明一样，可证$\|(I-K_{n_i}M(\lambda))^{-1}\|$关于$\lambda$在圆$C_\varepsilon$内一致有界，再由

$$(I-K_{n_i}M(\lambda))^{-1}-(I-K_{n_i}M(\lambda_o))^{-1}=(I-K_{n_i}M(\lambda))^{-1}K_{n_i}(M(\lambda)-M(\lambda_o))(I-K_{n_i}M(\lambda_o))^{-1}$$

可得，$(I-K_{n_i}M(\lambda))^{-1}$在圆$C_\varepsilon$内连续，并进而是Fréchet可微的。根据[3]第2节中的解释，可将$(I-K_{n_i}M(\lambda))^{-1}$看作定义在圆$C_\varepsilon$内，取值在空间$\mathscr{L}(E)$中的函数，强可微即强解析的。再由[4]V. 3可知，它有通常解析函数的性质，特别地有最大模定理，即在圆C_ε内都成立

$$\|(I-K_{n_i}M(\lambda))^{-1}\|\leqslant 2c\quad(n_i\geqslant n_o),$$

由于(5)对$n_i\geqslant n_o$成立以及

$$I-KM(\lambda)=I-K_{n_i}M(\lambda)+(K_{n_i}-K)M(\lambda),$$

并再一次使用[2]引理15.2即得$I-KM(\lambda)$在C_ε内可逆，这与λ^*是方程(1)的特征值矛盾。故方程(2)从某个$n=n(\varepsilon)$起在圆C_ε内至少有一个特征值。因为ε是任意的，故定理的第一结论成立。

现在设λ_n是方程(2)的特征值，而x_n是其相应的单位特征元，且$\lambda_n\to\lambda^*$。象(4)一样可证$\|M(\lambda_n)\|$有界。由K全连续，必有子列$\{n_i\}$，使

$$KM(\lambda_{n_i})x_{n_i}\to x^*,\ \text{当}\ i\to\infty\text{时}. \tag{8}$$

由(3)以及$x_{n_i}=K_{n_i}M(\lambda_{n_i})x_{n_i}$可得

$$x_{n_i}\to x^*,\ \text{当}\ i\to\infty\text{时}. \tag{9}$$

于是，由(8)，(9)及$M(\lambda)$的连续性得

$$\|x^*-KM(\lambda^*)x^*\|\leqslant\|x^*-KM(\lambda_{n_i})x_{n_i}\|+\|K(M(\lambda_{n_i})-M(\lambda^*))x_{n_i}\|$$
$$+\|KM(\lambda^*)(x_{n_i}-x^*)\|\to 0,\ \text{当}\ i\to\infty\text{时}.$$

故$x^*=KM(\lambda^*)x^*$，即λ^*为(1)的特征值。故定理的第二结论成立。

定理 2 在定理1的条件下，方程(2)的每个与收敛的特征值序列$\{\lambda_n\}$相应的单位特征元序列$\{x_n\}$包含一个收敛子列。反之，如果$\lambda_n\to\lambda^*$，则$\{x_n\}$的任一收敛子列$\{x_{n_i}\}$的极限点x^*是方程(1)的相应于λ^*的特征元。

证明 定理的第一结论已在定理1证明的后半部分证了．而第二结论的证明是完全类似的，且较简单，故从略，

下面，我们指出一个简单的事实：由于K和K_n是线性全连续的，故方程(1)和(2)的特征值λ^*和λ_n的重复度都是有限的．

现在，我们开始讨论Hilbert空间．

定理3 设H是Hilbert空间．对每个复数$\lambda, M(\lambda)\in\mathscr{L}(H)$，$K$和$K_n$是$H$上的全连续自共轭算子．设$\lambda^*$和$\lambda_n$是方程(1)和(2)的特征值，用$M^*(\lambda)$表示$M(\lambda)$的共轭算子．假定

$$M^*(\lambda^*)=M(\lambda^*),\quad M^*(\lambda_n)=M(\lambda_n). \tag{10}$$

对方程(1)相应于λ^*和方程(2)相应于λ_n的任意特征元x^*和x_n，假定有

$$(x^*, M(\lambda^*)x^*)>0,\quad (x_n, M(\lambda_n)x_n)>0 \tag{11}$$

则方程(1)和(2)的特征值λ^*和λ_n都是单秩的，即所有的广义特征元都是特征元．

证明 设x是方程(1)相应于特征值λ^*的广义特征元，但不是特征元，则必有整数$i>0$，使$(I-KM(\lambda^*))^{i+1}x=0$，而$(I-KM(\lambda^*))^i x\neq 0$．记$x^*=(I-KM(\lambda^*))^i x$，则$(I-KM(\lambda^*))x^*=0$，即$x^*$是方程(1)的相应于$\lambda^*$的特征元．再由$K$和$M(\lambda^*)$的自共轭性得

$$((I-KM(\lambda^*))^i x,\ M(\lambda^*)x^*)=((I-KM(\lambda^*))^{i-1}x, (I-M(\lambda^*)KM(\lambda^*)x^*)=0,$$

即$(x^*, M(\lambda^*)x^*)=0$，与(11)矛盾．矛盾的产生证明了方程(1)的特征值λ^*是单秩的．同理，方程(2)的特征值λ_n也是单秩的．定理证毕．

注 如果对每个$n, M^*(\lambda_n)=M(\lambda_n)$，而$M(\lambda)$连续，且有$\lambda_n\to\lambda^*$，则$M^*(\lambda^*)=M(\lambda^*)$自然成立．故在[1]中，条件(A3)只有$M^*(\lambda_0)=M(\lambda_0)$．至于条件(11)，在[1]所考虑的情况是自然满足的，可见[1]中(10)的说明．

设方程(1)的特征值λ^*的重复度为r，记其相应的特征子空间为H^*，显然H^*是r维的．设λ_n是方程(2)的一个特征值．由定理1,2不妨假设$\lambda_n\to\lambda^*$，相应的特征元有$x_n\to x^*$．下面进行误差估计．

定理4 在定理3的条件下，设有(3)及

$$(M'(\lambda^*)x^*, x^*)\neq 0 \tag{12}$$

则有

$$|\lambda_n-\lambda^*|\leqslant C\|K-K_n\|, \tag{13}$$

$$\rho(x_n, H^*)\leqslant C\|K-K_n\| \tag{14}$$

证明 由$x^*=KM(\lambda^*)x^*$得

$$(I-K_nM(\lambda_n))x^*=K(M(\lambda^*)-M(\lambda_n))x^*+(K-K_n)M(\lambda_n)x^*$$

两边与$M(\lambda_n)x_n$取内积，并由

$$x_n=K_nM(\lambda_n)x_n, \tag{15}$$

$$M(\lambda_n)K_nM(\lambda_n)x_n=M(\lambda_n)x_n,$$

$$(K_nM(\lambda_n))^*=M(\lambda_n)K_n$$

得

$$((I-K_nM(\lambda_n))x^*,\ M(\lambda_n)x_n)=0,$$

$$(K(M(\lambda^*)-M(\lambda_n))x^*,M(\lambda_n)x_n)=((M(\lambda^*)-M(\lambda_n))x^*,KM(\lambda_n)x_n)$$

$$=(\lambda^*-\lambda_n)((M'(\lambda^*)x^*,x^*)+\tau_n),\qquad \tau_n\to 0.$$

由(12)得

$$|\lambda_n-\lambda^*|\leqslant C\|K-K_n\|$$

下面来证(14)。由(15)得

$$(I-KM(\lambda^*))x_n=K_n(M(\lambda_n)-M(\lambda^*))x_n-(K-K_n)M(\lambda^*)x_n. \tag{16}$$

由(11)，用类似于 Gram-Schmidt 正交化方法，找到 H^* 的一组基 $x_1^*,x_2^*,\cdots,x_r^*$，使

$$(x_i^*,M(\lambda^*)x_j^*)=\delta_{ij}\quad (1\leqslant i,j\leqslant r). \tag{17}$$

定义辅助算子 Q^* 为下：

$$Q^*x=x-\sum_{i=1}^{r}(x,M(\lambda^*)x_i^*)x_i^*.$$

由 Q^* 的定义，(17)及 $x_i^*=KM(\lambda^*)x_i^*$ 可知

$$(Q^*)^2=Q^*,\ Q^*KM(\lambda^*)=KM(\lambda^*)Q^*. \tag{18}$$

用 Q^* 作用(16)的两边，并由(18)得

$$(I-Q^*KM(\lambda^*))Q^*x_n=Q^*K_n(M(\lambda_n)-M(\lambda^*))x_n-Q^*(K_n-K)M(\lambda^*)x_n. \tag{19}$$

下面证 $(I-Q^*KM(\lambda^*))^{-1}$ 作为一个有界算子的存在性。

由于 $Q^*KM(\lambda^*)$ 全连续，只须证"$w=Q^*KM(\lambda^*)w\Rightarrow w=0$"即可。由(18)，$w=Q^*KM(\lambda^*)w$ 隐含着

$$Q^*w=(Q^*)^2KM(\lambda^*)w=KM(\lambda^*)Q^*w,$$

故 $Q^*w\in H^*$。易知凡 $x\in H^*$ 有 $Q^*x=0$，故

$$Q^*w=(Q^*)^2w=Q^*(Q^*w)=0$$

这就证明了 $(I-Q^*KM(\lambda^*))^{-1}$ 是有界算子。由(19)(13)得

$$\|Q^*x_n\|\leqslant C\|K-K_n\|$$

注意到 $\rho(x_n,H^*)\leqslant\|Q^*x_n\|$，即推得(14)。证毕。

参 考 文 献

[1] Lin Qun, Iterative Corrections for Nonlinear Operator Equations, Systems Science and Mathematical Science, 2(1981).

[2] Krasnoselskii M. A. *et al.*, Approximate Solution of Operator Equations, 1972.

[3] Anselone, P. M., Rall, L. B., The Solution of Characteristic Value-Vector Problems by Newton's Method, Numer. Math. 11(1968), 38-45.

[4] Kosaku Yosida, Functional Analysis, 1964.

Notes on the Problem of Nonlinear Eigenvalue

By *Ding Hongming* (丁鸿明)

Abstract

Theorem 1. Let E be a Banach space. Let $M(\lambda) \in \mathscr{L}(E)$ for each complex λ and $M(\lambda)$ be Fréchet differenciable for λ. Let K and K_n be compact linear operators on E. Assume that

$$\|K_n - K\| \to 0, \text{ as } n \to \infty. \tag{1}$$

Then for every isolated eigenvalue λ^* of equation

$$x = KM(\lambda)x \tag{2}$$

there is a sequence λ_n of eigenvalue of equations

$$x = K_n M(\lambda)x \tag{3}$$

such that $\lambda_n \to \lambda^*$ as $n \to \infty$. Conversely, every limit point of any sequence λ_n of eigenvalues of equations (3) is an eigenvalue of equation (2).

Theorem 2. Assume that the conditions of theorem 1 are satisfied. Then every sequence x_n of normalized eigenelements of equations (3) associated with eigenvalues $\lambda_n \to \lambda^*$ contains a convergent subsequence, the limit of any convergent subsequence x_{n_k} is an eigenelement of equation (2) associated with eigenvalue λ^*.

Theorem 3. Let K and K_n be compact selfadjoint linear operators in a Hilbert space H. Let λ^* and λ_n be eigenvalues of equations (2) and (3), respectively. Let $M(\lambda^*)$ and $M(\lambda_n)$ be selfadjoint. Assume that

$$(x^*, M(\lambda^*)x^*) > 0, \quad (x_n, M(\lambda_n)x_n) > 0,$$

where x^* and x_n are eigenelements of equations (2) and (3) associated with the eigenvalues λ^* and λ_n, respectively. Then the eigenvalues λ^* and λ_n of equations (2) and (3), respectively, are all simple rank, that is, all generalized eigenelements are eigenelements.

Theorem 4. Assume that the conditions of theorom 3 are satisfied. Assume also that the conditions (1) and

$$(M'(\lambda^*)x^*, x^*) \neq 0$$

are satisfied. Then the conclusions

$$|\lambda_n - \lambda^*| \leqslant C\|K_n - K\|,$$

$$\rho(x_n, H^*) \leqslant C\|K_n - K\|$$

are valid, wheie C is a constant and H^* is an eigensubspace of equation (2) associated with the eigenvalue λ^*.