Vol. 2, No. 2, 1982

数学研究与评论

JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

大系统在稳定性理论中的分解问题(5)*

刘永清

(华南工学院)

摘　　要

本文应用李雅普诺夫函数分解的方法,[1][2]研究离散大系统在稳定理论中的分解问题。同时给出了分解系数的估计公式。

§1　问题的提出与解决的方法

1959年秦元勳提出了大系统在稳定性理论中的分解问题:

(i) 由子系统的稳定性代替等于大系统的稳定性;

(ii) 由部份子系统为稳定或部份不稳定如何通过选取参数推出整个大系统为稳定。

王慕秋于1959年研究了这个问题[3]. 在工程技术中常常需要确定非线性系统参数的稳定域。1959年结合三峡升船机的电力拖动控制系统任务，将两个联立的五阶非线性系统的稳定域的估计化为两个孤立的子系统的问题加以解决。即分别作出孤立子系统的李雅普诺夫函数，并以子系统的李雅普诺夫函数和式，作为两个五阶非线性微分方程组的标量李雅普诺夫函数，从而给出了两个联立非线性系统的稳定域[1]。这种做法我们定义为李雅普诺夫函数分解法。而在1964年将此法应用到一般大系统的分解上来。国外在1966年由F.N.Bailey[4]提出了类似的问题，并在1970年由W. E. Thompson[5]提出了类似的方法。即"由孤立子系统李雅普诺夫函数加权和式来作为大系统的标量李雅普诺夫函数法"。1980年应用李雅普诺夫函数分解法研究了具有滞后的微分差分方程组描述的大系统在稳定性理论中的分解问题等[6]-[9]。

§2　离散大系统在稳定性中的分解

我们研究由差分方程组描述的离散大系统:

* 本文已在中国自动化学会与美国自动化学会于1981年8月联合举行的"中美双边控制系统学术交流会议"上宣读。1981年5月30日收到。

$$X_i(k+1)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j(k) \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

其中 a_{ij} 为常数。将方程组(1)的系数矩阵(a_{ij})($\det|a_{ij}|\neq 0$)按主对角线分解成 m 个孤立的子系统为：

$$x_{n_r}(k+1)=Ax_{n_r}(k) \qquad (r=1,2,\cdots,m;\ n_1+\cdots+n_m=n) \tag{2}$$

$$x_{n_r}(k)=\begin{pmatrix} X_{n_1+\cdots+n_{r-1}+1}(k) \\ \vdots \\ X_{n_1+\cdots+n_r}(k) \end{pmatrix} \quad A_{rr}=\begin{pmatrix} a_{n_1+\cdots+n_{r-1}+1\ \ n_1+\cdots+n_{r-1}+1}\cdots a_{n_1+\cdots+n_{r-1}+1\ \ n_1+\cdots+n_r} \\ \vdots \\ a_{n_1+\cdots+n_r\ \ n_1+\cdots+n_{r-1}+1}\cdots a_{n_1+\cdots+n_r\ \ n_1+\cdots+n_r} \end{pmatrix}$$

$$(r=1,2\cdots,m,\quad n_1+n_2+\cdots+n_m=n) \tag{3}$$

令 $A=\max[\,|a_{ij}|\,,i,j=1,2,\cdots n],B=\max[\,|b_{ij}|\,,i,j=n_1+\cdots+n_{r-1}+1,\cdots,n_1+\cdots+n_r,$

$$r=1,\cdots,m], \tag{4}$$

$$E=\max\left(|a_{ij}|,\ \begin{matrix} i=1,2,\cdots,n_1 \\ j=n_1+1,\cdots,n; \end{matrix}\ \begin{matrix} i=n_1+1,\cdots,n_1+n_2 \\ j=1,2,\cdots,n_1,\ \cdots, \\ j=n_1+n_2+1,\cdots,n; \end{matrix}\ \begin{matrix} i=n-n_m+1,\cdots,n \\ j=1,2,\cdots,n-n_m \end{matrix}\right) \tag{5}$$

设孤立离散子系统(2)存在正定二次型 V 函数为：

$$V_{n_r}(x_{n_r}(k))=x^{\tau}_{n_r}(k)B_{n_r}x_{n_r}(k)=\sum_{i=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}\ \sum_{j=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r} b_{ij}X_i(k)X_j(k) \tag{6}$$

$$(r=1,2,\cdots,m,n_1+n_2+\cdots+n_m=n)$$

对孤立离散子系统(2)有

$$\Delta V_{n_r}(x_{n_r}(k))=V_{n_r}(x_{n_r}(k+1))-V_{n_r}(x_{n_r}(k))=-x^{\tau}_{n_r}(k)C_{n_r}x_{n_r}(k)$$

$$=-W_{n_r}(x_{n_r}(k))<0, \tag{7}$$

其中矩阵 C_{n_r} 是方程： $C_{n_r}=-(A^{\tau}_{n_r}B_{n_r}A_{n_r}-B_{n_r}) \quad (r=1,\cdots m)$ (8)

中给定的 $n_r\times n_r$ 维正定常数矩阵。由(8)式确定的正定对称矩阵 B_{n_r} 满足塞尔维斯特条件。并且有

$$-W_{n_r}(x_{n_r}(k))\leqslant -H_{n_r}\sum_{S=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r} X_S^2(k),\ (H_{n_r}>0) \tag{9}$$

这说明 m 个孤立离散子系统(2)之零解是渐近稳定的[10]。

由 m 个孤立离散子系统之李雅普诺夫函数 $V_{n_r}(x_{n_r}(k))$ 之和作为离散大系统(1)之李雅普诺夫函数：

$$V(x(k))=\sum_{r=1}^{m} V_{n_r}(x_{n_r}(k)) \tag{10}$$

沿着离散大系统(1)之轨线对 $V(x(k))$ 求差值有

$$\Delta V(x(k))|_{(1)}=V(x(k+1))-V(x(k))=\sum_{r=1}^{m}V_{n_r}(x_{n_r}(k+1))-\sum_{r=1}^{m}V_{n_r}(x_{n_r}'(k))$$

$$=\sum_{r=1}^{m}\left(\sum_{i=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}\ \sum_{j=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}b_{ij}X_i(k+1)X_j(k+1)\right)$$

$$-\sum_{r=1}^{m}\left(\sum_{j=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}\ \sum_{j=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}b_{ij}X_i(k)X_j(k)\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_1}b_{ij}\left(\sum_{S=1}^{n}a_{is}X_s(k)\right)\left(\sum_{l=1}^{n}a_{jl}X_l(k)\right)+\cdots$$

$$+\sum_{i=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}\ \sum_{j=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}b_{ij}\left(\sum_{s=1}^{n}a_{is}X_s(k)\right)\left(\sum_{l=1}^{n}a_{jl}X_l(k)\right)$$

$$+\cdots+\sum_{i=n-n_m+1}^{n}\ \sum_{j=n-n_m+1}^{n}b_{ij}\left(\sum_{s=1}^{n}a_{is}X_s(k)\right)\left(\sum_{l=1}^{n}a_{jl}X_l(k)\right)$$

$$-\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{i=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}\ \sum_{j=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}b_{ij}X_i(k)X_j(k)\right)$$

以下分别进行估计．利用(7)，(8)两式得到：

$$\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_1}b_{ij}\left(\sum_{s=1}^{n}a_{is}X_s(k)\right)\left(\sum_{l=1}^{n}a_{jl}X_l(k)\right)-\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_1}b_{ij}X_i(k)X_j(k)$$

$$\leqslant -x_{n_r}^{\tau}(k)C_{n_1}x_{n_1}(k)+\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_1}|b_{ij}|\left\{\left(\sum_{s=n_1+1}^{n}|a_{is}|\ |X_s(k)|\right)\cdot\left(\sum_{l=1}^{n}|a_{jl}|\ |X_l(k)|\right)\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{s=1}^{n_1}|a_{is}|\ |X_s(k)|\right)\left(\sum_{l=n_1+1}^{n}|a_{jl}|\ |X_l(k)|\right)\right\}\leqslant -W_{n_1}(x_{n_1}(k))$$

$$+EABn_1^2\left\{\left(\sum_{s=n_1+1}^{n}|X_s(k)|\right)\left(\sum_{l=1}^{n}|X_l(k)|\right)+\left(\sum_{s=1}^{n_1}|X_s(k)|\right)\left(\sum_{l=n_1+1}^{n}|x_l(k)|\right)\right\}$$

$$\leqslant -W_{n_1}(x_{n_1}(k))+EABn_1^2\left((n-n_1+1)\sum_{s=1}^{n}X_s^2(k)+n_1\sum_{s=n_1+1}^{n}X_s^2(k)\right)\tag{11}$$

同理进行类似的估计，得到

$$\sum_{i=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}\ \sum_{j=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}b_{ij}\left(\sum_{s=1}^{n}a_{is}X_s(k)\right)\left(\sum_{l=1}^{n}a_{jl}X_l(k)\right)$$

$$-\sum_{i=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}\ \sum_{j=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}b_{ij}X_i(k)X_j(k)\leqslant -W_{n_r}(x_{n_r}(k)$$

$$+EABn_r^2\left((n-n_r+1)\sum_{s=1}^{n}X_s^2(k)+n_r\left(\sum_{s=1}^{n_1+\cdots+n_{r-1}}X_s^2(k)\right.\right.$$

$$+\sum_{s=n_1+\cdots+n_r+1}^{n} X_s^2(k)\Big)+\sum_{s=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r} X_s^2(k)\Big\}, \quad (r=2,3,\cdots,m-1) \tag{12}$$

$$\sum_{i=n-n_m+1}^{n}\sum_{j=n-n_m+1}^{n} b_{ij}\Big(\sum_{s=1}^{n} a_{is}X_s(k)\Big)\Big(\sum_{l=1}^{n} a_{jl}X_l(k)\Big)-\sum_{i=n-n_m+1}^{n}\sum_{j=n-n_m+1}^{n} b_{ij}X_i(k)X_j(k)$$

$$\leqslant -W_{n_m}(x_{n_m}(k))+EABn_m^2\Big\{(n-n_m+1)\sum_{s=1}^{n}X_s^2(k)+n_m\sum_{s=1}^{n-n_m}X_s^2(k)\Big\} \tag{13}$$

将(11),(12),(13)式分别代入前式中,得到

$$\begin{aligned}
\triangle V(x(k))|_{(1)}\leqslant &-\sum_{r=1}^{m} H_{n_r}\Big(\sum_{s=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r} X_s^2(k)\Big)+EAB\Big\{n_1^2\Big\{(n-n_1+1)\sum_{s=1}^{n}X_s^2(k)\\
&+n_1\sum_{s=n_1+1}^{n}X_s^2(k)\Big\}+\cdots+n_r^2\Big\{(n-n_r+1)\sum_{s=1}^{n}X_s^2(k)+n_r\Big(\sum_{s=1}^{n_1+\cdots+n_{r-1}}X_s^2(k)\\
&+\sum_{s=n_1+\cdots+n_r+1}^{n}X_s^2(k)\Big)+\sum_{s=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}X_s^2(k)\Big\}+\cdots+n_m^2\Big\{(n+n_m+1)\sum_{s=1}^{n}X_s^2(k)\\
&+n_m\sum_{s=1}^{n-n_m}X_s^2(k)\Big\}\Big\}=\sum_{s=1}^{n_1}X_s^2(k)\Big\{-H_{n_1}+EAB\Big(\sum_{s=1}^{m}n_s^2(n-n_s+1)+\sum_{s=2}^{m}n_s^3\Big)\Big\}+\cdots\\
&+\sum_{s=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}X_s^2(k)\Big\{-H_{n_r}+EAB\Big(\sum_{s=1}^{m}n_s^2(n-n_s+1)+\sum_{\substack{s=1\\ s\neq r}}^{m}n_s^3\Big)\Big\}+\cdots\\
&+\sum_{s=n-n_m+1}^{n}X_s^2(k)\Big\{-H_{n_m}+EAB\Big(\sum_{s=1}^{m}n_s^2(n-n_s+1)+\sum_{s=1}^{n-n_m}n_s^3\Big)\Big\}
\end{aligned} \tag{14}$$

令
$$\begin{cases}
\Delta_1^{(1)}=\dfrac{H_{n_1}}{AB\Big[\sum\limits_{s=1}^{m}n_s^2(n-n_s+1+)+\sum\limits_{s=2}^{m}n_s^3\Big]},\\
\Delta_m^{(1)}=\dfrac{H_{n_m}}{AB\Big[\sum\limits_{s=1}^{m}n_s^2(n-n_s+1)+\sum\limits_{s=1}^{n-n_m}n_s^3\Big]},\\
\Delta_r^{(1)}=\dfrac{H_{n_r}}{AB\Big[\sum\limits_{s=1}^{m}n_s^2(n-n_s+1)+\sum\limits_{\substack{s=1\\ s\neq r}}^{m}n_s^3+n_r^2\Big]}, \qquad r=2,3,\cdots,m-1
\end{cases} \tag{15}$$

当 $E<\Delta^{(1)}=\min[\Delta_r^{(1)},r=1,2,\cdots,m]$ (16)

时,由(14)式知 $\Delta V(x(k))|_{(1)}<0$ (17)

从而得到

定理 1 对 m 个孤立离散子系统(2),存在由(6)式表示的正定函数 $V_{n_r}(x_{n_r}(k))$,对(2)有 $\Delta V_{n_r}(x_{n_r}(k))|_{(2)}=-W_{n_r}(x_{n_r}(k))<0,(r=1,2,\cdots m,)$.即 m 个孤立离散子系统之

零解是渐近稳定的，由$V_{n_r}(x_{n_r}(k))$做离散大系统(1)的正定函数$V(x(k))=\sum_{r=1}^{m}V_{n_r}(x_{n_r}(k))$，存在$\Delta^{(1)}>0$，仅当

$$E<\Delta^{(1)}$$

时，则离散大系统(1)之零解是渐近稳定的。其中$\Delta^{(1)}$由(15)，(16)式表示；$W_{n_r}(x_{n_r}(k))$由(7)式表示，并满足(8)，(9)式。

对由(6)式表示的孤立离散子系统(2)的正定函数，假设求差值有$\Delta V_{n_r}(x_{n_r}(k))_{(2)}$

$$=x_{n_r}^{\tau}(k)P_{n_r}x_{n_r}(k)=D_{n_r}(x_{n_r}(k))>0 \tag{18}$$

其中

$$P_{n_r}=(A_{n_r}^{\tau}B_{n_r}A_{n_r}-B_{n_r})\quad (r=1,2,\cdots,m,) \tag{19}$$

矩阵P_{n_r}是给定的$n_r\times n_r$维正定常数矩阵，由(19)式定出对称矩阵B_{n_r}，且满足塞尔维斯特条件。并且有

$$D_{n_r}(x_{n_r}(k))\geqslant L_{n_r}\sum_{s=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}X_s^2(k),\quad (L_{n_r}>0,\ r=1,2,\cdots,m) \tag{20}$$

即m个孤立离散子系统(2)之零解是不稳定的。由孤立离散子系统之正定V函数和式(10)式为离散大系统(1)之李雅普诺夫函数。类似于定理1的证明，对$V(x(k))$沿离散大系统(1)之轨线求增量有

$$\begin{aligned}\nabla V(x(k))|_{(1)}\geqslant&\sum_{s=1}^{n_1}X_s^2(k)\left\{L_{n_1}-EAB\left[\sum_{s=1}^{m}n_s^2(n-n_s+1)+\sum_{s=2}^{m}n_s^3\right]\right\}+\cdots\\&+\sum_{s=n_1+\cdots+n_{r-1}+1}^{n_1+\cdots+n_r}X_s^2(k)\left\{L_{n_r}-EAB\left[\sum_{s=1}^{m}n_s^2(n-n_s+1)+\sum_{\substack{s=1\\s\neq r}}^{m}n_s^3+n_r^2\right]\right\}+\cdots\\&+\sum_{s=n-n_m+1}^{n}X_s^2(k)\left\{L_{n_m}-EAB\left[\sum_{s=1}^{m}n_s^2(n-n_s+1)+\sum_{s=1}^{n-n_m}n_s^3\right]\right\}>0\end{aligned} \tag{21}$$

当

$$E<\Delta^{(2)}=\min[\Delta_r^{(2)},\ r=1,\ 2,\ \cdots,\ m] \tag{22}$$

$$\begin{cases}\Delta_1^{(2)}=\dfrac{L_{n_1}}{AB\left[\sum_{s=1}^{m}n_s^2(n-n_s+1)+\sum_{s=2}^{m}n_s^3\right]},\\[2ex]\Delta_m^{(2)}=\dfrac{L_{n_m}}{AB\left[\sum_{s=1}^{m}n_s^2(n-n_s+1)+\sum_{s=1}^{n-n_m}n_s^3\right]},\\[2ex]\Delta_r^{(2)}=\dfrac{L_{n_r}}{AB\left[\sum_{s=1}^{m}n_s^2(n-n_s+1)+\sum_{\substack{s=1\\s\neq r}}^{m}n_s^3+n_r^2\right]},\quad r=2,3,\cdots,m-1\end{cases} \tag{23}$$

由此得到

定理 2 对 m 个孤立离散子系统(2)，存在由(6)式表示的正定函数 $V_{n_r}(x_{n_r}(k))$，对(2)有 $\Delta V_{n_r}(x_{n_r}(k))=D_{n_r}(x_{n_r}(k))>0$ $(r=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$，即 m 个孤立离散子系统是不稳定的。由孤立离散子系统之正定函数 $V_{n_r}(x_{n_r}(k))$ 和式(10)式作为离散大系统之李雅普诺夫函数，存在 $\Delta^{(2)}>0$，仅当

$$E<\Delta^{(2)} \tag{24}$$

时，则离散大系统(1)之零解是不稳定的。其中 $\Delta^{(2)}$ 如(22)，(23)式所示；$D_{n_r}(x_{n_r}(k))$ 由(18)式表示，且满足(19)，(20)。

由定理 1 知孤立离散子系统零解之渐近稳定，得到离散大系统零解之渐近稳定；由定理 2 知孤立离散子系统零解之不稳定，得到大系统零解之不稳定。而下面的例 2 例 4 分别说明孤立离散子系统(2)之零解渐近稳定，而离散大系统(1)零解不稳定与孤立离散子系统零解之不稳定，而得到离散大系统(1)零解之渐近稳定。

今就 $n=2$ 时考虑复合离散系统

$$\begin{cases} X_1(k+1)=a_{11}X_1(k)+a_{12}X_2(k) \\ X_2(k+1)=a_{21}X_1(k)+a_{22}X_2(k) \end{cases} \tag{25}$$

与它的两个孤立离散子系统

$$\begin{cases} X_1(k+1)=a_{11}X_1(k) \\ X_2(k+1)=a_{22}X_2(k) \end{cases} \tag{26}$$

其中 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 为常数。

令 $E=\max[|a_{12}|,\ |a_{21}|]$，$A=\max[|a_{ij}|,\ i,\ j=1,\ 2]$。

例 1 设 $|a_{11}|<1$，$|a_{22}|<1$，孤立离散子系统(26)零解是渐近稳定的，仅当 $E<\Delta_1$ 时，复合离散系统(25)零解是渐近稳定的。

解 取 $V_1(X_1(k))=|a_{11}|X_1^2(k)$，而沿(26)式对 $V_1(X_1(k))$ 求增量有

$$\Delta V_1(X_1(k))|_{(26)}=V_1(X_1(k+1))-V_1(X_1(k))=|a_{11}|X_1^2(k+1)-|a_{11}|X_1^2(k)$$
$$=-|a_{11}|(1-a_{11}^2)X_1^2(k)<0,\quad (\because |a_{11}|<1).$$

取 $V_2(X_2(k))=|a_{22}|X_2^2(k)$，同理对 $V_2(X_2(k))$ 沿(26)求增量有

$$\Delta V_2(X_2(k))|_{(26)}=-|a_{22}|(1-a_{22}^2)X_2^2(k)<0\quad (\because |a_{22}|<1).$$

这说明两个孤立离散子系统零解是渐近稳定的。

令 $V(x(k))=V_1(X_1(k))+V_2(X_2(k))$ 为复合离散系统(25)之正定 V 函数，由 $V(x(k))$ 对(25)求增量有

$$\begin{aligned}\Delta V(x(k))|_{(25)}&=V_1(X_1(k+1))+V_2(X_2(k+1))-V_1(X_1(k))-V_2(X_2(k))\\ &=|a_{11}|[a_{11}X_1(k)+a_{12}X_2(k)]^2-|a_{11}|X_1^2(k)+|a_{22}|[a_{21}X_1(k)+a_{22}X_2(k)]^2\\ &-|a_{22}|X_2^2(k)=-|a_{11}|(1-a_{11}^2)X_1^2(k)+EA^2[X_2^2(k)+X_1^2(k)+X_2^2(k)]\\ &-|a_{22}|(1-a_{22}^2)X_2^2(k)+EA^2[X_1^2(k)+X_2^2(k)+X_1^2(k)]=X_1^2(k)\{-|a_{11}|(1-a_{11}^2)\\ &+3A^2E\}+X_2^2(k)\{-|a_{22}|(1-a_{22}^2)+3A^2E\}<0,\end{aligned}$$

当 $E<\Delta_1=\min\left[\frac{|a_{11}|(1-a_{11}^2)}{3A^2},\ \frac{|a_{22}|(1-a_{22}^2)}{3A^2}\right]$时，故复合离散系统(25)之零解是渐近稳定的。

例 2　对(26)式，取$a_{11}=\frac{1}{2}$，$a_{22}=\frac{1}{2}$，满足$|a_{11}|<1$，$|a_{22}|<1$，孤立离散子系统(26)之零解是渐近稳定的。

再取　$a_{12}=1$，$a_{21}=\frac{9}{4}$时，(25)式化为

$$\begin{cases} X_1(k+1)=\frac{1}{2}X_1(k)+X_2(k) \\ X_2(k+1)=\frac{9}{4}X_1(k)+\frac{1}{2}X_2(k) \end{cases}$$

它的特征方程为$\rho^2-\rho-2=0$，有特征根：$\rho_1=-1$，$\rho_2=2$. 故此时复合离散系统(25)之零解为不稳定的。

例 3　若$|a_{11}|>1$，$|a_{22}|>1$. 孤立离散子系统(26)之零解为不稳定的. 存在$\Delta_2>0$，当$E<\Delta_2$时，复合离散系统(25)之零解也是不稳定的。

解：取$V_1(X_1(k))=|a_{11}|X_1^2(k)$　$V_2(X_2(k))=|a_{22}|X_2^2(k)$分别有

$$\Delta V_1(X_1(k))|_{(26)}=|a_{11}|(a_{11}^2-1)X_1^2(k)>0 \qquad (\because |a_{11}|>1);$$

$$\Delta V_2(X_2(k))|_{(26)}=|a_{22}|(a_{22}^2-1)X_2^2(k)>0 \quad (\because |a_{22}|>1).$$

即孤立离散子系统(26)之零解为不稳定的。

令$V(x(k))=V_1(X_1(k))+V_2(X_2(k))$为复合离散系统(25)之正定$V$函数，由$V(x(k))$对(25)求增量有：

$$\Delta V(x(k))|_{(25)}\geqslant|a_{11}|(a_{11}^2-1)X_1^2(k)-EA^2[X_2^2(k)+X_1^2(k)+X_2^2(k)]$$
$$+|a_{22}|(a_{22}^2-1)X_2^2(k)-EA^2[X_1^2(k)+X_2^2(k)+X_1^2(k)]$$
$$=X_1^2(k)[|a_{11}|(a_{11}^2-1)-3A^2E]+X_2^2(k)[|a_{22}|(a_{22}^2-1)-3A^2E]>0,$$

仅当$E<\Delta_2=\min\left[\frac{|a_{11}|(a_{11}^2-1)}{3A^2},\ \frac{|a_{22}|(a_{22}^2-1)}{3A^2}\right]$时，复合离散系统(25)之零解也是不稳定的。

例4　取$a_{11}=\frac{5}{4}$，$a_{22}=-\frac{5}{4}$，满足$|a_{11}|>1$，$|a_{22}|>1$，孤立离散子系统(26)之零解为不稳定的。

再令　$a_{12}=\frac{3}{4}$，$a_{21}=-\frac{7}{4}$时，(25)式化为

$$\begin{cases} X_1(k+1)=\frac{5}{4}X_1(k)+\frac{3}{4}X_2(k) \\ X_2(k+1)=-\frac{7}{4}X_1(k)-\frac{5}{4}X_2(k) \end{cases}$$

特征方程为：$\rho^2-\frac{1}{4}=0$，特征根为$\rho_1=\frac{1}{2}$，$\rho_2=-\frac{1}{2}$即有$|\rho_1|<1$，$|\rho_2|<1$，故复合离散系统(25)之零解为渐近稳定的。

参考文献

[1] 刘永清、黄启宇、钱祥征、粟柏新，几类非线性微分方程组的稳定性及稳定域的估计，1961年8月，北京第一届全国微分方程学术会议宣读。

[2] 刘永清，李雅普诺夫函数的分解问题，自动化学报，第3卷第3期(1965年7月)，178—182页。

[3] 王慕秋，稳定性理论中的方程组的分解问题，科学记录，新辑第四卷第一期(1960年1月)。

[4] *Bailey, F. N., J. SIAM Contr., Ser A.* 3(1966), 443—462.

[5] *Thompson, W. E., IEEE Trans. Automatic control, Vol. AC*—15(1970), 505—506.

[6] 刘永清，大系统在稳定性理论中的分解问题(1)，华南工学院学报，第8卷第1期(1980年3月)，第13—26页。

[7] 刘永清、宋中崑，大系统在稳定性理论中的分解问题(2)，本文已在中国自动化学会与美国自动化学会于1981年8月联合举行的"中美双边控制系统学术交流会议"宣读。华南工学院学报9卷2期。

[8] 刘永清，大系统在稳定性理论中的分解问题(3)。1980年10月中国自动化学会第二届全国控制理论及其应用学术会议论文(摘要)集。华南工学院学报9卷4期，1981年12月。

[9] 刘永清：大系统在稳定性理论中的分解问题(4)。1980年10月中国自动化学会第二届全国控制理论及其应用学术会议论文(摘要)集。华南工学院学报9卷4期，1981年12月。

[10] 绪芳胜彦，现代控制工程，第八章第三节，定理5。科学出版社，1978年9月。

On the Decomposition Problem of Large-scale Syetem in the Theory of Stability (5)

By Liu Yongqing (李永清)

Abstract

In this paper, we study the decomposition problem of the discrete large-scale system in the theory of stability by the decomposition method of Liapunov function[1][2]. At the same time a estimate formula for the decomposition coefficients has been obtained.