Vol. 2, No. 2, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

高阶奇点的定性研究*

庄 新 华

(浙江省计算技术研究所)

关于微分方程组孤立奇点的拓扑分类问题，最初是 H. Poincaré[1] 提出的. 对于线性矩阵特征根实部皆不为零的情形,已被 P. Hartman[2]、Д. М. Гробман[3]所解决. 前者的方法是几何的,简练然而限制较强;后者是纯分析的,论证颇长. 经仔细的计算,可知 Hartman 的变换恰具有 Гробман 的分析表达式. 在线性矩阵具一个零特征根、其余特征根实部同号、系统为解析的情形下, P. Mendelson[4]曾作了研究. 本文对线性矩阵具一个零特征根、其余特征根实部皆不为零的情形，给出了较完整的拓扑结构.

不妨令所考虑的微分方程组已具如下形式

$$\begin{cases} dx/dt = Px + f(x,y,z) \\ dy/dt = Qy + g(x,y,z) \\ dz/dt = h(x,y,z) \end{cases} \tag{1}$$

其中 x,y,z 分别是 k-, l-, m- 维向量, $k,l,m \geqslant 0$, 但 $n=k+l>0$; P、Q 分别是 $k\times k$, $l\times l$ 负定、正定矩阵; f,g,h 充分地规则，以保证原点邻域内解的存在唯一性,而且 $f,g,h=o(r)$, 这里 $r^2=|x|^2+|y|^2+|z|^2$, $|x|$、$|y|$、$|z|$ 分别表示相应空间 Π_x、Π_y、Π_z 内的平方模.

显然，原点 O 是系统 (1) 的奇点. 我们把奇点 O 邻域内的任意轨线汎记作 Γ, 若 Γ 正向 (或负向) 趋于奇点 O, 则依惯例, 称 Γ 为 O^+ (或 O^-)-曲线, 汎称 O- 曲线; 显然, 此必发生于 $t\to\infty$ (或 $t\to-\infty$) 时.

1. O-曲线在原点与 Π_x, Π_y, Π_z 之一相切的情形.

定理 设 Γ 为奇点 O 邻域内的任意 O-曲线，则 Γ 必于原点 O 与三 "平面" Π_x,Π_y,Π_z 之一相切.

证 分两种情形考虑:

(1) $k=n$.

*1981年4月9日收到.

推荐者: 刘世泽 (中国科学院成都分院).

命$\theta=|z|^2/|x|^2$. 任取正数$\varepsilon<1$，则当$\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{\varepsilon}$时，由$P$的特征根实部皆负及$f,g,h=o(r)$，必存在$\delta_\varepsilon$、$\kappa_\varepsilon>0$，使当$r<\kappa_\varepsilon$，沿轨线可有

$$\begin{aligned} d\theta/dt &= \frac{|x|^2 d|z|^2/dt-|z|^2 d|x|^2/dt}{|x|^4} \\ &\geqslant \frac{-2|z|^2\langle x,P_x\rangle_{\Pi_x}+|z|^2 o(|x|\cdot r)+|x|^2 o(|z|\cdot r)}{|x|^4} \\ &\geqslant \delta_\varepsilon. \end{aligned} \tag{2}$$

这里$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\Pi_x}$表示欧氏空间$\Pi_x$内的数积.

已设Γ为O-曲线，故由某时刻T_ε始，正向或反向（依Γ为O^+或O^-），恒居于$r<\kappa_\varepsilon$内. 此时，因沿此Γ，当$\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{\varepsilon}$，$\theta$是严格单调的，故由某时刻$T'_\varepsilon$始，正向或负向（依$\Gamma$为$O^+$或$O^-$），恒居于三区域：

$$\{\theta<\varepsilon,\ r<\kappa_\varepsilon\},$$
$$\{\varepsilon<\theta<\frac{1}{\varepsilon},\ r<\kappa_\varepsilon\},$$
$$\{\theta>\frac{1}{\varepsilon},\ r<\kappa_\varepsilon\}$$

之一. 易知，居第二个区域为不可能. 因为当Γ为O^+-曲线时，由 (2)，$\int_{\Gamma^+}d\theta\geqslant\delta_\varepsilon\int_{T'_\varepsilon}^{\infty}dt=\infty$，而当$\Gamma$为$O^-$-曲线时，由 (2)，$\int_{\Gamma^-}d\theta\leqslant\delta_\varepsilon\int_{T'_\varepsilon}^{-\infty}dt=-\infty$. 但该二不等式左边均有界量，得一矛盾. 由此即有，自T'_ε始，Γ正向或负向恒居于二区域：$\{\theta<\varepsilon,\ r<\kappa_\varepsilon\}$，$\{\theta>\frac{1}{\varepsilon},\ r<\kappa_\varepsilon\}$之一；此即，沿$\Gamma$的正向或负向，或有$\theta\to0$，或有$\theta\to\infty$，分别对应于$\Gamma$在点$O$切于$\Pi_x$或$\Pi_z$.

(2) $o\leqslant k<n$.

命$\varphi=(|x|^2+|z|^2)/|y|^2$，则当$\varepsilon\leqslant\varphi\leqslant\frac{1}{\varepsilon}$时，沿轨线可有

$$\begin{aligned} d\varphi/dt &= \frac{|y|^2 d(|x|^2+|z|^2)/dt-(|x|^2+|z|^2)d|y|^2/dt}{|y|^4} \\ &\leqslant -\frac{2(|x|^2+|z|^2)}{|y|^4}\langle y,Qy\rangle_{\Pi_y}+o(1) \\ &\leqslant -\delta_\varepsilon(r<\kappa_\varepsilon). \end{aligned} \tag{3}$$

类似地可证，沿O-曲线，或$\varphi\to0$，或$\varphi\to\infty$；对应地有Γ于点O切Π_y或Π_{xz}. 当$\varphi\to\infty$，或即Γ在点O切于Π_{xz}时，再命$\theta=|z|^2/|x|^2$，则同上可证$\theta\to0$或$\theta\to\infty$，即，此时Γ在点O切Π_x或Π_z.

2. 存在由O^+（O^-）-曲线所形成的，在原点切$\Pi_x(\Pi_y)$的$k(l)$维胞腔.

定理 存在由O^+-曲线（O^--曲线）组成的$k(l)$维胞腔$E_x(E_y)$，在点O切于$\Pi_x(\Pi_y)$.

证　见[5]。

3．除2中所说的胞腔外，不再有于原点切$\Pi_x(\Pi_y)$之O-曲线。

定理　若Γ在点O切于$\Pi_x(\Pi_y)$，则Γ为$O^+(O^-)$-曲线，$\Gamma\subset E_x(E_y)$。

证　为确定起见，设Γ在点O切Π_x。此时，自某时刻始，$|y|+|z|<|x|$，$d|x|^2/dt\leqslant-\lambda|x|^2$（这里$\lambda$是某正常数）。由此立知$\Gamma$为$O^+$-曲线，且当$t\to\infty$时，$|x|\leqslant\gamma\exp(-\frac{\lambda}{2}t)$。由该估计及$|y|+|z|<|x|$，知积分$\int_0^\infty\exp[Q(t-\tau)]g(x(\tau),\ y(\tau),\ z(\tau))d\tau$，$\int_0^\infty h(x(\tau),\ y(\tau),\ z(\tau))d\tau$收敛。可见，对$\Gamma$成立

$$\begin{cases} x(t)=\exp(Pt)x^0+\int_0^t\exp[P(t-\tau)]f(x(\tau),\ y(\tau),\ z(\tau))d\tau \\ y(t)=\exp(Qt)\bar{y}^0-\int_t^\infty\exp[Q(t-\tau)]g(\cdot,\cdot,\cdot)d\tau \\ z(t)=\bar{z}^0-\int_t^\infty h(\cdot,\cdot,\cdot)d\tau \end{cases} \tag{4}$$

其中$\bar{y}^0=y^0+\int_0^\infty\exp[-Q\tau]\,g(\cdot,\cdot,\cdot)d\tau$，$\bar{z}^0=z^0+\int_0^\infty h(\cdot,\cdot,\cdot)d\tau$，而$x^0=x(0),y^0=y(0)$，$z^0=z(0)$。

为证$\Gamma\subset E_x$，据[3]，只需证明$\bar{y}^0=0$，$\bar{z}^0=0$。

此事易见。实因$\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$，$\lim\limits_{t\to\infty}z(t)=0$，故由（4）立知$\bar{y}^0=0$，$\bar{z}^0=0$。

4．除零根外，其余特征根实部同号的情形。

设$k=n$，且有常数$M>0$，使当$M|x|^2\leqslant|z|^2$，r充分小时，数积$\langle z,h(x,z)\rangle_{\Pi_z}\leqslant-\gamma|z|^{2\alpha}(\gamma>0,\ \alpha>1)$。

由1之论述，易知当r充分小时，曲面$\theta=M$无切，其上向量场的方向指向$\theta>M$。

考虑区域$\theta>M$，于其内，当r充分小时，由假定可有

$$d|z|^2/dt\leqslant-2\gamma|z|^{2\alpha}.$$

由此可得

$$|z(t)|^{2-2\alpha}-|z^0|^{2-2\alpha}\geqslant2\gamma(\alpha-1)t\quad(t>0), \tag{5}$$

$$|z(t)|^{2-2\alpha}-|z^0|^{2-2\alpha}\leqslant2\gamma(\alpha-1)t\quad(t<0). \tag{6}$$

由(5)知，当r充分小时，轨线正向穿过$\theta=M$而进入$\theta>M$，居留其内，当$t\to\infty$，趋于O点。根据1，该轨线切Π_z于O。始点在$\theta>M$之轨线，正向居留其内，而当$t\to\infty$，趋于O点；负向或穿过$\theta=M$而进入$\theta<M$，或据(6)，逃逸O点的充分小邻域。

再考虑区域$\theta<M$。于其内，当r充分小时，

$$d|x|^2/dt\leqslant-\lambda|x|^2.$$

此时易有

$$|x(t)|^2\leqslant|x^0|^2\exp(-\lambda t)\quad(t>0), \tag{7}$$

$$|x(t)|^2\geqslant|x^0|^2\exp(-\lambda t)\quad(t<0). \tag{8}$$

由 (8)，负向穿过 $\theta=M$ 而进入 $\theta<M$ 之轨线，当 $t\to-\infty$ 时，逃逸 O 点的充分小邻域。始于 $\theta<M$ 内之轨线，负向逃逸 O 点的充分小邻域；正向或穿过 $\theta=M$ 进入 $\theta>M$，或据(7)，趋于 O 点，从而属于 E_x。

5. 除零根外，其余特征根实部皆非零的情形

设 $0\leqslant k<n$，且有常数 $M>0$，使当 $M(|x|+|y|)\leqslant|z|$，r 充分小时，数积 $\langle z, h(x,y,z)\rangle_{\Pi_z}\leqslant-\gamma|z|^{2a}$ ($a>1$, $\gamma>0$)。

由 1，对任意 $M'>0$，只要 r 充分小，$\varphi=(|x|^2+|z|^2)/|y|^2=M'$ 无切，其上向量场方向指向 $\varphi<M'$。

在 $\varphi<M'$ 内，当 r 充分小时

$$d|y|^2/dt\geqslant\mu|y|^2 \text{（这里 } \mu \text{ 是某正常数），}$$

由此可得

$$|y(t)|^2\geqslant|y^0|^2\exp(\mu t) \quad (t>0), \tag{9}$$

$$|y(t)|^2\leqslant|y^0|^2\exp(\mu t) \quad (t<0). \tag{10}$$

结果，当 r 充分小时，轨线正向穿过 $\varphi=M'$ 进入 $\varphi<M'$ 而逃逸 O 点之充分小邻域；始于 $\varphi<M'$ 之轨线，正向逃逸 O 点之充分小邻域，负向或趋于 O 点而属于 E_y，或穿过 $\varphi=M'$ 而进入 $\varphi>M'$。

在区域 $\varphi>M'$ 内，对任意 $M''>0$，当 r 充分小时，$\theta=|z|^2/|x|^2=M''$ 无切，其上向量场方向指向 $\theta>M''$。

取 M'，M'' 充分大，使当 $\varphi>M'$，$\theta>M''$ 时，仍可有 $M(|x|+|y|)\leqslant|z|$。这时，当 r 充分小，在 $\varphi>M'$，$\theta>M''$ 内便有

$$d|z|^2/dt\leqslant-2\gamma|z|^{2a}.$$

运用类似的推理，易知当 r 充分小时，正向穿过 $\varphi>M'$，$\theta=M''$ 而进入 $\varphi>M'$，$\theta>M''$ 之轨线，或当 $t\to\infty$ 趋于 O，从而切 Π_z 于 O，或穿过 $\varphi=M'$ 而进入 $\varphi<M'$ 内。始于 $\varphi>M'$，$\theta>M''$ 之轨线，正向或趋于 O 而与 Π_z 相切，或穿过 $\varphi=M'$ 而进入 $\varphi<M'$，负向或穿过 $\theta=M''$ 而进入 $\varphi>M'$，$\theta<M''$，或逃逸 O 点之充分小邻域。

在区域 $\varphi>M'$，$\theta<M''$ 内，当 r 充分小时

$$d|x|^2/dt\leqslant-\lambda|x|^2.$$

易知，当 r 充分小时，负向穿过 $\varphi>M'$，$\theta=M''$ 之轨线逃逸 O 点的充分小邻域。始于 $\varphi>M'$，$\theta<M''$ 之轨线，正向或趋于 O 点，从而属于 E_x，或穿过 $\varphi=M'$ 进入 $\varphi<M'$，或穿过 $\theta=M''$，进入 $\varphi>M'$，$\theta>M''$；其负向逃逸 O 点的充分小邻域。

6. 一个零根，其余特征根实部皆非零的情形

设 $m=1$，且有常数 $M>0$，使当 $M(|x|+|y|)\leqslant|z|$，r 充分小时，

$$\langle z,h(x,y,z)\rangle_{\Pi_z}\leqslant-\gamma'|z|^{2a} \quad (z>0,\ a>1),$$

$$\langle z,h(x,y,z)\rangle_{\Pi_z}\geqslant\gamma''|z|^{2\beta} \quad (z<0,\ \beta>1).$$

分两种情形考虑：

(1)　$k=n$. 对任意$M'>0$，当 r 充分小时，$\theta=M'$ 无切，其上向量场方向指向$\theta>M'$. 取 $M'\geqslant M^2$，当 r 充分小，由假定可有

$$d|z|^2/dt\leqslant -2\gamma'|z|^{2\alpha}\quad(\theta>M',\ z>0),$$

$$d|z|^2/dt\geqslant 2\gamma''|z|^{2\beta}\quad(\theta>M',\ z<0).$$

故当 r 充分小时，轨线正向穿过 $\theta=M'$，$z>0$而进入 $\theta>M'$，$z>0$，逗留其内，趋于 O 点，切于 z 轴．始于 $\theta>M'$，$z>0$ 之轨线，正向居留其内，趋于 O 点，切 z 轴；负向或逃逸 O 点的充分小邻域，或穿过 $\theta=M'$ 而进入 $\theta<M'$. 正向穿过 $\theta=M'$，$z<0$而进入$\theta>M'$，$z<0$ 之轨线，逃逸．始于 $\theta>M'$，$z<0$ 之 轨线，正向逃逸；负向或趋于 O 点，切 z 轴，或穿过 $\theta=M'$，进入 $\theta<M'$.

在区域 $\theta<M'$ 内，当 r 充分小时，有

$$d|x|^2/dt\leqslant -\lambda|x|^2,$$

故知，在此区域内，轨线负向逃逸；正向或趋于 O 点属于E_x，或穿过$\theta=M'$而进入$\theta>M'$.

(2)　$l=n$无须讨论，可设$1\leqslant k<n$.

对任意的 $M'>0$，当 r 充分小时，轨线正向穿过 $\varphi=M'$ 进入$\varphi<M'$而逃逸．始于$\varphi<M'$ 之轨线正向逃逸，负向或趋于 O 点而属E_y，或穿过 $\varphi=M'$ 而进入 $\varphi>M'$.

在$\varphi>M'$内，对任意$M''>0$，当 r 充分小时，轨线正向穿过$\varphi>M'$，$\theta=M''$而进入$\varphi>M'$，$\theta>M''$. 取 M'，M''充分大，则当 r 充分小时，由假定可有

$$d|z|^2/dt\leqslant -2\gamma'|z|^{2\alpha}\quad(z>0),$$

$$d|z|^2/dt\geqslant 2\gamma''|z|^{2\beta}\quad(z<0).$$

故知当 $r\ll$，正向穿过 $\varphi>M'$，$\theta=M''$，$z>0$ 之轨线，进入 $\varphi>M'$，$\theta>M''$，$z>0$，或趋于 O 而切 z 轴，或穿过 $\varphi=M'$ 而入 $\varphi<M'$. 负向穿过 $\varphi=M'$ 而入 $\varphi>M'$，$\theta>M''$，$z>0$ 之轨线，或穿过 $\theta=M''$ 而入 $\varphi>M'$，$\theta<M''$，或逃逸．始于 $\varphi>M'$，$\theta>M''$，$z>0$之轨线，正向或趋于 O 而切 z 轴，或穿过$\varphi=M'$ 入$\varphi<M'$；负向或穿过 $\theta=M''$进入$\varphi>M'$，$\theta<M''$，或逃逸．类似可得，当 $r\ll$，正向穿过 $\varphi>M'$，$\theta=M''$，$z<0$之轨线，进入$\varphi>M'$，$\theta>M''$，$z<0$，或逃逸，或穿过 $\varphi=M'$，进入 $\varphi<M'$. 负向穿过 $\varphi=M'$而入 $\varphi>M'$，$\theta>M''$，$z<0$之轨线，或穿过$\theta=M''$进入$\varphi>M'$，$\theta<M''$，或趋于 O 而切 z 轴．始于 $\varphi>M'$，$\theta>M''$，$z<0$ 之轨线，正向或逃逸，或穿过 $\varphi=M'$，进入 $\varphi<M'$；负向或穿 过 $\theta=M''$ 进入$\varphi>M'$，$\theta<M''$，或趋于 O 而切 z 轴．

在 $\varphi>M'$，$\theta<M''$ 内，当 $r\ll$

$$d|x|^2/dt\leqslant -\lambda|x|^2,$$

故当 $r\ll$，负向穿过 $\varphi>M'$，$\theta=M''$ 进入 $\varphi>M'$，$\theta<M''$之轨线逃逸．始于其内之轨线，正向或趋于 O，属E_x，或穿过 $\varphi=M'$，进入$\varphi<M'$逃逸，或穿过 $\theta=M''$进入 $\varphi>M'$，$\theta>M''$，负向逃逸．

总结以上，易见，当$r \ll$

$$E_x \subset \{\varphi > M', \ \theta < M''\}, \ E_y \subset \{\varphi < M'\};$$

粗糙地说，还有

$$\{一切O^+\text{-}曲线的正半轨\} \subset E_x \cup \{\varphi > M', \ \theta > M'', \ z > 0\},$$

$$\{一切O^-\text{-}曲线的负半轨\} \subset E_y \cup \{\varphi > M', \ \theta > M'', \ z < 0\}.$$

参 考 文 献

[1] Poincare', H., Sur les courbes définies par des équations différentielles, *C. R. Acad. Sci. Paris* 94 (1882) 416—418.

[2] Hartman, P., A lemma in the theory of structural strbility of differential equations, *Proc. Amers. Math. Soc.* 11 (1960) 610—620.

[3] Гробман, Д. М. Топологическая классификация окрестностей особой тонки в n-мерном пространстве, *Матем. Сборник*, Т. 56 (98), №1 (1962), 77—94.

[4] Mendelson, P., On phase portraits of criical points in n-space, Contributions to the theory of nonlinear oscillation, V. IV.

[5] 刘世泽，关于Ляпунов条件稳定性定理的一点注记，内蒙古大学学报（自然管学），2 (1964).

A Qualitative Study on Singular-Point of Higher Order

By Zhuanq Sinhwa (庄新华)

Abstracf

We consider in this paper topological classification of singular points of ordinary differential eguations containing as coefficient the linear matrix; which has only one null eigenvalue while the real parts of other eigenvalues are all not null.