Vol. 2, No. 2, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

微分方程组$\dot{x}=a+\sum\limits_{i+j=2}a_{ij}x^iy^j$，$\dot{y}=b+\sum\limits_{i+j=2}b_{ij}x^iy^j$的极限环存在的分歧值与代数奇异环

索光俭

（吉林省白城师专）

§1 引 言

董金柱最先研究如下的二次系统[1]：

$$\dot{x}=a+\sum_{i+j=2}a_{ij}x^iy^j,\qquad \dot{y}=b+\sum_{i+j=2}b_{ij}x^iy^j \tag{E}$$

的极限环的个数问题，他指出（E）可以至少存在两个极限环，且这两个极限环的位置分布在两个奇点周围．文[2]中证明了（E）至多存在两个极限环．本文将应用旋转向量场理论，研究当旋转参数$\alpha=\bar{\alpha}$时极限环变为奇异环的分歧值．从而得出一些情况下（E）恰存在两个极限环的充要条件．依据[2]，研究(E)的极限环，只要研究如下系统就行了：

$$\dot{x}=1-x^2+xy,\qquad \dot{y}=L-Lx^2+Mxy+ny^2 \tag{1.1}$$

为了应用旋转向量理论，在（1.1）中置$M=2+\alpha$，$L=l+\alpha$，（1.1）变为：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=1-x^2+xy=P(x,y)\\ \dot{y}&=l-lx^2+2xy+ny^2+\alpha(1-x^2+xy)=Q(x,y)\end{aligned} \tag{$E(\alpha)$}$$

很明显，对于不同的α，E(α)有相同的有限奇点，且

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ \dfrac{\partial P}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial Q}{\partial \alpha}\end{vmatrix}=(1-x^2+xy)^2\geqslant 0$$

所以，$E(\alpha)$关于α形成广义旋转向量场．若$E(\alpha)$有极限环，则当α向适当方向变动时，极限环扩大而最后消失．设消失时的α值为$\bar{\alpha}$，显然$\bar{\alpha}$是l,n的函数．我们的目的就是在一些情况下求出函数$\bar{\alpha}=f(l,n)$来．这时对应系统$E(\bar{\alpha})$存在奇异环．

* 1981年6月10日收到．

推荐者：秦元勋（中国科学院应用数学研究所）、俞玉森（华中工学院）．

§2 焦点量、中心

无伤于一般性，我们假设 $E(\alpha)$ 的两个奇点 $F_i(\pm 1,0)$ 的指标为 $1(i=1,2)$ 由 $E(\alpha)$ 的向量场的中心对称性质，只研究 $F_1(1,0)$ 附近就可以了。

在 F_1 处，经过简单计算，其一次近似的特征方程为 $\lambda^2-\alpha\lambda+2(l-2)=0$。由假定知 $l>2$。令 $q^2=2(l-2)$ 则 $\alpha^2-4q^2<0$ 时，F_1 为焦点，当 $\alpha^2-4q^2\geqslant 0$ 时 F_1 为结点。

若 F_1 为焦点，则第一个焦点量为 $\bar{V}_1=\alpha$。现求第二个焦点量。当 $\alpha=0$时，$E(\alpha)$ 变为

$$\dot{x}=1-x^2+xy, \qquad \dot{y}=l-lx^2+2xy+ny^2 \tag{2.1}$$

把原点移到 (1,0) 后，(2,1) 变为：

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}&=-2\bar{x}+\bar{y}-\bar{x}^2+\bar{x}\bar{y},\\ \dot{\bar{y}}&=-2l\bar{x}+2\bar{y}-l\bar{x}^2+2\bar{x}\bar{y}+n\bar{y}^2\end{aligned} \tag{2.2}$$

在 (2.2) 中，引入变换：

$$\bar{x}=\frac{1}{2lq}[-2\eta-q\xi], \quad \bar{y}=-\frac{1}{q}\eta$$

其逆变换为：$\eta=-q\bar{y}$，$\xi=2\bar{y}-2l\bar{x}$，这时 (2.2) 变为：

$$\begin{aligned}\dot{\eta}&=-\xi-\frac{1+ln}{lq^2}\eta^2+\frac{1}{4l}\xi^2\\ \dot{\xi}&=\eta\left[1+\left(\frac{2n}{q^3}-\frac{1}{lq}\right)\eta-\frac{1}{2l}\xi\right]\end{aligned} \tag{2.3}$$

由[3]知

$$\begin{aligned}\bar{V}_3&=\frac{\pi}{4}\left(\frac{2n}{q^3}-\frac{1}{lq}\right)\left(\frac{1}{2l}+\frac{2(1+ln)}{lq^2}\right)\\ &=\frac{1}{4l(l-2)^{\frac{5}{2}}}(ln-l+2)(2n+1).\end{aligned}$$

定理 2.1 点 $F_1(1,0)$ 为 $E(\alpha)$ 的中心点的充要条件是 $\bar{V}_1=\bar{V}_3=0$

证明 必要性显然，现证充分性：

若 $\alpha=0$ 且 $2n+1=0$，则 (2.3) 为全微分方程，若 $\alpha=0$，$ln-l+2=0$，则 (2.3) 的向量场关于 ξ 轴对称。证毕。

由旋转向量场理论及[2]知如下定理正确。

定理 2.2 若 $\alpha\bar{V}_3\geqslant 0$，则无绕 $F_i(i=1,2)$ 的极限环。若$\alpha\bar{V}_3<0$，则当$|\alpha|<<1$时，围绕 F_i 各有一个极限环。当 α 向适当方向变动时，极限环扩大而后消失。

§3 有限平面上只有两个奇点的情形

本文中，设 $E(\alpha)$ 在有限平面上只有两个奇点 $F_i(\pm 1,0)(i=1,2)$。且认为 F_i 的指标为 1，经过简单计算，$E(\alpha)$ 有两个有限奇点的条件是：$n(l-n-2)\geqslant 0$，而 F_i 的指标为

1 的条件是$l>2$．与上述两个条件等价的条件是

$$\text{i) } l>2,\ \text{ii) } n\geqslant 0,\ \text{iii) } l-n-2\geqslant 0$$

我们现在就在上述参数区域中，研究极限环存在的分歧函数$\bar{\alpha}=f(l,n)$．

引理 3.1　若$E(\alpha)$满足

$$\begin{aligned}&\text{i) } l>2\\&\text{ii) } 0\leqslant n<1\\&\text{iii) } l-n-2>0\end{aligned}\tag{3.1}$$

则无限奇点$N(0,1,0)$是鞍点；若$E(\alpha)$还有两个无穷奇点，且$|\alpha|\leqslant 1$则两奇点坐标$N_i(k_i,1,0)$中，$k_i>0$设$k_2>k_1$，则N_1是结点，N_2是鞍点．

证明　在$E(\alpha)$中，引入射影坐标$x=\dfrac{X}{Z}$，$y=\dfrac{Y}{Z}$并消去t后得到

$$\begin{vmatrix} dX & dY & dZ\\ X & Y & z\\ Z^2-X^2+XY & (l+\alpha)Z^2-(l+\alpha)X^2+(2+\alpha)XY+nY^2 & 0\end{vmatrix}=0\tag{3.2}$$

决定无穷远奇点射影坐标的方程组是：

$$\begin{cases}Z=0\\ X[(l+\alpha)X^2+(3+\alpha)XY+(n-1)Y^2]=0\end{cases}\tag{3.3}$$

置$Y=1$，则显然$N(0,1,0)$是无穷远奇点，由（3.2）它的性质由如下方程决定：

$$\begin{aligned}&[(n-1)x+(3+\alpha)x^2-z^2-(l+\alpha)x^3+(l+\alpha)xz^2]dz\\&=[nz+(2+\alpha)xz-(l+\alpha)x^2z+(l+\alpha)z^3]dx\end{aligned}\tag{3.4}$$

由（3.4）和$0<n<1$时，N是鞍点．下面再证：$n=0$时，N亦是鞍点．

在（3.4）中，若$n=0$，则变为：

$$\begin{aligned}&[-x+(3+\alpha)x^2-z^2-(l+\alpha)x^3+(l+\alpha)xz^2]dz\\&=[(2+\alpha)xz-(l+\alpha)x^2z+(l+\alpha)z^3]dx\end{aligned}\tag{3.5}$$

因（3.5）中x的系数$-1\neq 0$知（3.5）中（0,0）是Ляпунов奇点[4]．由

$$-x+(3+\alpha)x^2-z^2-(l+\alpha)x^3+(l+\alpha)xz^2=0$$

中解出x，得

$$x=-z^2+\psi(z)$$

这里$\psi(z)$是四次开始的项．作变换$u=x+z^2-\psi(z)$后，N的性质由方程：$-xdu=(l-2)u^3dx$决定．由$l-2>0$知N是鞍点．

下面证明第二个结论．在（3,4）中作变换：$x\to x+k_i$，　$y\to y$，变为

$$\begin{aligned}&\{k_if'(k_i)x+[(3+\alpha)-3(l+\alpha)k_i]x^2+[(l+\alpha)k_i-1]z^2+(l+\alpha)xz^2-(l+\alpha)x^3\}dz\\&=[(1-k_i)z+(3+\alpha-2k_i)xz-(l+\alpha)x^2z+(l+\alpha)z^3]dz\end{aligned}\tag{3.6}$$

这里 k_i 是 $f(k)=-(l+a)k^2+(3+a)k+(n-1)=0$ 的两个根．由于 $3+a>0$ 及 $-(l+a)<0$ 和 $n-1\neq 0$ 知 $k_i>0$．现证在（3.6）中有 $1-k_i>0$．事实上，由 $f(0)=n-1<0$，及 $f(1)=-(l-n-2)<0$ 知 $f(k)=0$ 在（0,1）上有偶数个根，但是 $k_1k_2=-\frac{n-1}{l+a}<1$，因而两根中至少一个在 0 和 1 之间，由此知两根都在（0,1）上．由 $k_2>k_1>0$ 及 $-(l+a)<0$ 知 $f'(k_1)>0$，$f'(k_2)<0$，得 $k_1f'(k_1)>0$，$k_2f'(k_2)<0$ 这就是说（3.6）中．$1-k_1$ 与 $k_1f'(k_1)$ 同号；$1-k_2$ 与 $k_2f'(k_2)$ 反号．即 N_1 是结点，N 是鞍点．引理 3.1 证毕．

引理3.2 E(a) 当 $a=-\frac{ln-l+2}{n+1}$ 时，有双曲线解 $1-(l-1)x^2+(n+1)xy=0$

证明 E(a) 当 $a=-\frac{ln-l+2}{n+1}$ 时，可写为：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left[\frac{2(l-1)}{n+1}x-y\right][(l-2)x-ny]-\frac{2}{n+1}[1-(l-1)x^2+(n+1)xy]}{x[(l-2)x-ny]+[1-(l-1)x^2+(n+1)xy]} \tag{3.7}$$

把 $1-(l-1)x^2+(n+1)xy=0$ 直接代入（3.7）知是解．

定理3.1 若 E(a) 满足（3.1），且 $v_3=ln-l+2<0$ 若 $ln-l+n+3>0$，则 $a=\bar{a}=-\frac{v_3}{n+1}$ 时，存在两个代数奇异环，这时极限环消失．在定理的条件下，E(a) 恰存在两个极限环的充要条件是 $0<a<\bar{a}$．

证明 $a=\bar{a}$ 时，由引理 3.2 知 E(a) 有双曲线解，由[5]知 E($\bar{a}$) 无极限环．现证在定理的条件下，E($\bar{a}$) 存在由双曲线 $1-(l-1)x^2+(n+1)xy=0$ 的分支与其所夹的无穷远赤道弧围成二角形奇异环．为此，需证：(1) 该双曲线上的无穷远点恰是 E($\bar{a}$) 的无穷远鞍点，且除此二鞍点外，所述二角形上无其它奇点．(2) 所述二角形内部恰有一个奇点．先证 (1)：因双曲线上两个无穷远点分别是 (0,1,0) 及 $\left(\frac{n+1}{l-1},\ 1,0\right)$ 而 E($\bar{a}$) 的三个无穷远奇点分别是 (0,1,0)，$\left(\frac{n+1}{l-1},\ 1,0\right)$ 及 $\left(\frac{1-n}{2},\ 1,0\right)$．由条件 $ln-l+n+3>0$ 知 $\frac{n+1}{l-1}>\frac{1-n}{2}$，故由引理 3.1 知 (0,1,0) 及 $\left(\frac{n+1}{l-1},\ 1,0\right)$ 都是 E($\bar{a}$) 的鞍点，且另一无穷远奇点 $\left(\frac{1-n}{2},\ 1,0\right)$ 不在双曲线分支所夹的无穷远赤道弧上．又在有限部分，双曲线与 x 轴交点 $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{l-1}},0\right)$ 在 $(-1,1)$ 上，故所述二角上无其它奇点．由 $0<\sqrt{\frac{1}{l-1}}<1$ 知二角形内恰有一个奇点．

再证 E(a) 恰有两个极限环的充要条件是：$0<a<\bar{a}$．由旋转向量理论，必要性显然．又 E($\bar{a}$) 的奇异环恰构成 E(a) 的外境界线，故知当 $0<a<\bar{a}$ 时存在极限环，由文[2]知恰有两个环．证毕．

定理3.2 若 E(a) 满足（3.1）且 $v_3=ln-l+2<0$ 若 $ln-l+n+3<0$ 则 $a_0\leqslant\bar{a}<-\frac{v_3}{n+1}$．其中 a_0 是 $\Delta(a)=(a+3)^2+4(l+a)(n-1)=a^2+2(2n+1)a+\Delta_0=0$ 的正根．这里 $\Delta_0=9+4l(n-1)$．

证明 因 $\frac{\Delta_0}{4}=\frac{9}{4}+ln-l<ln-l+n+3<0$，所以 E(0) 在无穷远处有唯一奇点

且是鞍点．因此当$0<\alpha<\alpha_0$时，$\Delta(\alpha)<0$则y轴与赤道构成$E(\alpha)$奇点F_i的外境界线，因此，只要$\Delta(\alpha)<0$，$E(\alpha)$就一定存在极限环．极限环只能在$\Delta(\alpha_0)=0$以后消失，即$\alpha_0\geqslant\bar{\alpha}$，又当$\alpha=-\dfrac{v_3}{n+1}$时，系统有双曲线解，所以不存在极限环．即$\bar{\alpha}<-\dfrac{v_3}{n+1}$．证毕．

定理3.3　若$E(\alpha)$满足条件（3.1）且$v_3>0$，则$\bar{\alpha}=-\dfrac{v_3}{n+1}$．$E(\alpha)$恰存在两个极限环的充要条件是：$\bar{\alpha}<\alpha<0$．

证明　先证$\bar{\alpha}>-1$，事实上，$\dfrac{d\bar{\alpha}}{dn}=-\dfrac{2(l-1)}{(n+1)^2}<0$因此$\bar{\alpha}$当$n$增加时减少．但$\bar{\alpha}(n)\Big|_{n=1}=-1$，所以当$0\leqslant n<1$时有$\bar{\alpha}>-1$．由此知引理3.1条件满足．又由$v_3>0$推出：

$$ln-l+n+3>ln-l+2=v_3>0.$$

所以$\left(\dfrac{n+1}{l-1},\ 1,0\right)$是鞍点．即当$\bar{\alpha}=-\dfrac{v_3}{n+1}$时，$E(\bar{\alpha})$存在代数奇异环．其它证明仿定理3.1．证毕．

定理3.1—3.3都是在条件$0\leqslant n<1$下讨论的，下面讨论条件(3.1)中把$0\leqslant n<1$换成$n\geqslant1$的情况．

引理3.4　$E(\alpha)$中当$\alpha=\bar{\alpha}=-1$时，有解

$$-(l-1)x^2+2xy+(n-1)y^2=\frac{1+(n-1)(l-1)}{-n},\tag{3.8}$$

证明　$\alpha=-1$时。$E(\alpha)$可写为：

$$\frac{dy}{dx}=$$

$$\frac{[2(l-1)x-2y]\left[\dfrac{(l-2)x-ny}{2}\right]+n(l-1)\left[\dfrac{1+(n-1)(l-1)}{n}-(l-1)x^2+2xy+(n-1)y^2\right]}{[2x+2(n-1)y]\left[\dfrac{(l-2)x-ny}{2}\right]+n\left[\dfrac{1+(n-1)(l-1)}{n}-(l-1)x^2+2xy+(n-1)y^2\right]}\tag{3.9}$$

把（3.8）代入（3.9）知是解．

定理3.4　若$E(\alpha)$满足

i) $l>2$,　ii) $n>1$　iii) $l-n-2>0$

此时一定有$v_3>0$．当$\alpha=\bar{\alpha}=-1$时，$E(\bar{\alpha})$存在两个代数奇异环．这时，$E(\alpha)$恰有两个极限环的充分且必要条件是：$-1<\alpha<0$．

证明　$n>1$时由（3.4）知N是结点、又$-(l-1)<0$及$n-1>0$知$f(k)=0$有二异号实根．设$k_1<0,k_2>0$．现证N_1,N_2是鞍点．由（3.6）及$1-k_1>0,f'(k_1)>0$知$1-k_1$与$k_1f'(k_1)$反号，因此N_1是鞍点．又$f(0)=n-1>0$和$f(1)=-(l-n-2)<0$所以$0<k_2<1$，又$f'(k_2)<0$所以$1-k_2$与$k_2f'(k_2)$反号，即N_2亦是鞍点．

很明显，(3.7) 通过两个无穷远鞍点 N_1, N_2。现证 (3.7) 的分支与其所夹的无穷远赤道弧围成二角形奇异环。事实上，奇点 $N(0,1,0)$ 及 $(\pm 1, 0)$ 都不在上述二角形上，又双曲线 (3.7) 与 x 轴交点为 $\left(\pm\sqrt{\dfrac{1+(n-1)(l-1)}{n(l-1)}},\ 0\right)$ 而

$$0 < \frac{1+(n-1)(l-1)}{n(l-1)} = 1 - \frac{l-2}{n(l-1)} < 1$$

知上述二角形内有唯一奇点，这就是说 $E(\bar{\alpha})$ 有代数奇异环。

充要条件的证明仿照定理 3.1。证毕。

推论　定理 3.4 中，若把 $n>1$ 换成 $n=1$，结论仍成立。

证明　此时无穷远处只有两个奇点。$N(0,1,0)$ 是鞍结点，另一个奇点是鞍点。其它证明都有效。这时 $\bar{\alpha}=-1$。证毕。

最后，在上述定理中，把 $l-n-2>0$ 换成 $l-n-2=0$ 时，结论仍成立。不过这时无穷远奇点 $(1,1,0)$ 是高次奇点。容易验证，它是 Ляпунов 型的。通过计算，可以验证它具有各定理对交点 N_2 所要求的性质。这里就不叙述了。

本文只讨论了 $E(\alpha)$ 有两个有限奇点的情形，至于四个奇点的情形尚需进一步研究。

在 (l,n) 平面上，函数 $\bar{\alpha}=f(l,n)$ 的情况如图 1 所示。

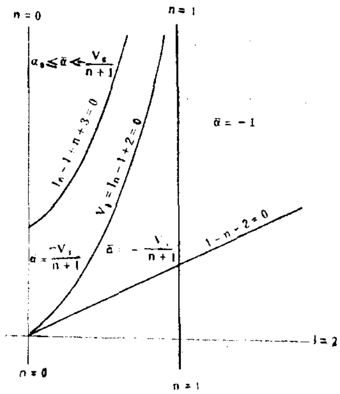

图 1

参　考　文　献

[1]　秦元勋，微分方程所定义的积分曲线，科学出版社1959，391—398。

[2]　索光俭，微分方程组 $\dot{x}=a+\sum\limits_{i+j=2} a_{ij}x^i y^j$，$\dot{y}=b+\sum\limits_{i+j=2} b_{ij}x^i y^j$ 至多存在两个极限环，**科学通报** 24(1981)。

[3]　叶彦谦，极限环论，上海科技出版社。(1962)，第298页。

[4]　同[1]，140—147。

[5]　Черкас, Диф. ур. XII №5 (1977).

The Algebraic Critical Cycles and Bifurcation of Limit Cycles for the System $\dot{x}=a+\sum\limits_{i+j=2}a_{ij}x^iy^j,\ \dot{y}=b+\sum\limits_{i+j=2}b_{ij}x^iy^j$

By Suo Guangjian (索光俭)

Abstract

In this paper we consider algebraic critical cycles and bifurcation of limit cycles for the system

$$\begin{aligned}\dot{x}&=a+\sum_{i+j=2}a_{ij}x^iy^j\\ \dot{y}&=b+\sum_{i+j=2}b_{ij}x^iy^j.\end{aligned}\tag{E}$$

This is a development on the basis of the papet that 《(E) possesses at most two limit cycles》 [2]. Based on [2], (E) may be transformed into the form:

$$\begin{aligned}\dot{x}&=1-x^2+xy\\ \dot{y}&=l-lx^2+2xy+ny^2+a(1-x^2+xy)\end{aligned}\tag{E(a)}$$

The chief result of this paper is as follows:

i) Let E(a) satisfy: $l>2$, $0\leqslant n<1$, $l-n-2\geqslant 0$. If $v_3=ln-l+2<0$ and $ln-l+n+3>0$, then for $a=\bar{a}=-\dfrac{v_3}{n+1}$, E($\bar{a}$) possesses two algebraic critical cycles; Every critical cycle is formed by one branch of the hyperbola $1-(l-1)x^2+(n+1)xy=0$ and an arc of the equator.

Moreover, the necessary and sufficient condition that E(a) possesses just two limit cycles is $0<a<\bar{a}$.

ii) Let E(a) satisfy: $l>2$, $0\leqslant n<1$, $l-n-2\geqslant 0$. If $v_3=ln-l+2<0$ and $ln-l+n+3>0$ then $a_0<\bar{a}<-\dfrac{v_3}{n+1}$. where a_0 is positive root of $\Delta(a)=a^2+2(2n+1)a+9+4l(n-1)=0$.

iii) Let E(a) satisfy: $l>2$, $0\leqslant n<1$, $l-n-2\geqslant 0$. If $v_3=ln-l+2>0$, then for $a=\bar{a}=-\dfrac{v_3}{n+1}$, E($\bar{a}$) possesses two algebraic critical cycles as that of i).

The necessary and sufficient condition that $E(\alpha)$ possesses just two limit cycles is $\bar{\alpha}<\alpha<0$.

iv) Let $E(\alpha)$ satisfy: $l>2$, $n\geqslant 1$, $l-n-2\geqslant 0$. Then for $\alpha=\bar{\alpha}=-1$, $E(\bar{\alpha})$ possesses two algebraic critical cycles. Every critical cycle is formed by one branch of the hyperbola:

$$-(l-1)x^2+2xy+(n-1)y^2=\frac{1+(n-1)(l-1)}{-n}$$

and an arc of the equator.

Moreover, the necessary and sufficient conditoin that $E(\alpha)$ possesses just two limit cycles is $-1<\alpha<0$.