Vol. 2, No. 2, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

关于(LF)空间中随机元序列的平均值的收敛性*

吴智泉　王向忱

（吉林大学）

设 $(\Omega,\mathscr{A})$ 是一可测空间，$(X,\mathscr{T})$ 是一 (LF) 空间，即一串完全的局部凸线性度量空间 $(X_n,\mathscr{T}_n)$ 的严格归纳极限[1]，以下我们总假定每个 X_n 都是可分的，不再逐次声明。

本文的目的是讨论对X中独立同分布随机元[2]序列 $\{V_n\}$ 强大数定律成立的充要条件。即证明下述二定理：

定理1 如果 $\{V_n\}$ 是 (LF) 空间X中的独立同分布随机元序列，则 EV_1 存在**且

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}V_i\to EV_1\quad(a.s.)$$

的充要条件是存在某个 n，使 $P\{\omega: V_1(\omega)\in X_n\}=1$，并且在 X_n 中 $E\tilde{V}_1^n$ 存在，且 $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\tilde{V}_i^n\to E\tilde{V}_1^n(a.s.)$。此处 $\tilde{V}_i^n$ 是 V_n 在 $(\bigcap_{i=1}^{\infty}\Omega_i^n,(\bigcap_{i=1}^{\infty}\Omega_i^n)\cap\mathscr{A})$ 上的限制，$\Omega_i^n=V_i^{-1}(X_n)$。

定理2 如果 $\{V_n\}$ 是 (LF) 空间X中的独立同分布随机元序列，EV_1 存在，并且对于 θ 的任何绝对凸闭邻域U所产生的拟范数 $\|\cdot\|_U$ 都有 $E\|V_1\|_U<\infty$，则当 $m\to\infty$ 时

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}V_i\to EV_1\ a.s.$$

的充要条件是存在某一 n，使 $P(V_1^{-1}(X_n))=1$。

引理1 若 $V,V_n(n=1,2,\cdots)$ 都是 $(\Omega,\mathscr{A})\to(X,\mathscr{B}(X))$ 的随机元，则 $A=\{\omega: \lim_{n\to\infty}V_n(\omega)=V(\omega)\}\in\mathscr{A}$。

证明 若 $\omega'\in A$，则 $\{V_n(\omega')\}_{n=1}^{\infty}$ 有界，因此有 $n_0=n_0(\omega')$，使 $\{V_n(\omega')\}_{n=1}^{\infty}\subset X_{n_0}$ 且为 X_{n_0} 中的有界集[1]。令

* 1981年6月15日收到。

** 随机元的期望的定义参考[2]和[4]。

$$A_n=\{\omega:\{V_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}\subset X_n,\ 且在X_n中\ V_m(\omega)\to V(\omega)\}$$

则$A_n\subset A_{n+1}$，$A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$。

将V_i视为从 $\Omega_i^n=V_i^{-1}(X_n)$ 到X_n的映射，记为V_i^n，将V视为从 $\Omega^n=V^{-1}(X_n)$ 到X_n的映射记为 V^n，则从［3］定理 2，V_i^n 是 $(\Omega_i^n,\ \Omega_i^n\cap\mathscr{A})\to X_n$ 的随机元，V^n 是从 $(\Omega^n,\ \Omega^n\cap\mathscr{A})\to X_n$ 的随机元，并且 Ω^n，$\Omega_i^n\in\mathscr{A}$。显然

$$A_n=\{\omega:V_i^n(\omega)\to V^n(\omega),\ \omega\in\bigcap_{i=1}^{\infty}\Omega_i^n\}$$

$$=\{\omega:\lim_{i\to\infty}d_n(V_i^n(\omega),V^n(\omega))=0,\ \omega\in(\bigcap_{i=1}^{\infty}\Omega_i^n)\cap\Omega^n\}$$

此处d_n为 X_n 中的度量函数。注意X_n是可分的。$d_n(V_i^n,\ V^n)$ 是 $((\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\Omega_i^n)\cap\Omega^n,((\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\Omega_i^n)\cap\Omega^n)\cap\mathscr{A})$ 上的随机变数（[4] 命题 2.2.1）*，所以 $A_n\in\mathscr{A}$，从而 $A\in\mathscr{A}$。

根据引理 1，我们可以定义从概率空间$(\Omega,\mathscr{A},P)\to$(LF)空间X的随机元序列 $V_n\to V$ $(a.s.)$ 为

$$P\{\omega:V_n(\omega)\to V(\omega)\}=1.$$

命题1 设V，V_i $(i=1,2,\cdots)$ 是（LF）空间X中的随机元，如果

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}V_i\to V\ \ (a.s.),$$

则

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=1}^{\infty}V_i^{-1}(X_n))=1.$$

证明 注意$E_n=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}V_i^{-1}(X_n)\in\mathscr{A}$且$E_n\subset E_{n+1}$，因此若结论不真，则有 $S\in\mathscr{A}$，$P(S)>0$，使当 $\omega\in S$ 时，任何X_n都不能包含 $\{V_i(\omega)\}_{i=1}^{\infty}$。对每一$n$，将 $\{V_i(\omega)\}$ 中第一个使 $V_i(\omega)\bar{\in}X_n$ 的 i 记为 i_n。则当 $j<i_n$时，$V_j(\omega)\in X_n$。因此$y_{i_n}=\sum\limits_{i=1}^{i_n}V_i(\omega)\bar{\in}X_n$。从而$\{\frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}V_i(\omega)\}_{m=1}^{\infty}$不可能包含在任何一个$X_n$中。这说明$\{\frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}V_i(\omega)\}$是无界序列，于是它不可能是X中的收敛序列。总之，对任意$\omega\in S$，$\frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}V_i(\omega)$都是没有极限的。这与$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}V_i\to V(a.s)$的假设矛盾。

对于（LF）空间X中的随机元V，如果存在一正整数 n，使得 $P\{\omega:V(\omega)\in X_n\}=1$。则容易证明有

$$EV=EV^*.$$

此处V^*是V在 $(\Omega_n,\ \Omega_n\cap\mathscr{A},\ P)$ 上的限制，$\Omega_n=V^{-1}(X_n)$，上式的意义理解为：当EV 和 EV^*二者中有一个存在时，另一个也存在且二者相等。

现在我们来证明本文的主要结果。

* 若 $(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\Omega_i^n)\cap\Omega^n=\phi$，则 $A_n=\phi\in\mathscr{A}$

定理1 的证明 充分性至为明显，必要性也只有存在 n，使 $P\{\omega: V_1(\omega)\in X_n\}=1$ 这点需要证明．设这样的 n 不存在．则对任意 n，

$$a_n \triangleq P\{\omega: V_1(\omega)\in X_n\}<1.$$

由于$\{V_i\}$是独立同分布的．因此

$$P\{\bigcap_{i=1}^{\infty} V_i^{-1}(X_n)\}=\lim_{m\to\infty}P\{\bigcap_{i=1}^{m} V_i^{-1}(X_n)\}=\lim_{m\to\infty}\prod_{i=1}^{m}P(V_i^{-1}(X_n))$$
$$=\lim_{m\to\infty}(P\{V_1^{-1}(X_n)\})^m=\lim_{m\to\infty}a_n^m=0.$$

从而 $P(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=1}^{\infty}V_i^{-1}(X_n))=0$．与命题 1 矛盾．证完．

注 从上述证明可以看到：若$\{V_n\}$是（LF）空间X中的独立同分布随机元序列．则对于任意 n，

$$P(\bigcap_{i=1}^{\infty}\{\omega: V_i(\omega)\in X_n\})=0 \text{ 或 } 1.$$

并且上式为 1 的充要条件是$P\{V_1^{-1}(X_n)\}=1$．

定理2 的证明 必要性已见于定理 1，现在证充分性．若 n 使$P(V_i^{-1}(X_n))=1$，则$\tilde{\Omega}=\bigcap_{i=1}^{\infty}V_i^{-1}(X_n)$ 的概率也是 1，若用$\tilde{V}_i^n$表示V_i在$\tilde{\Omega}$上的限制．则$\tilde{V}_i^n$ 是$(\tilde{\Omega},\ \tilde{\Omega}\cap\mathscr{A},\ P)\to X_n$的随机元．而且易见 $\{\tilde{V}_i^n\}_{i=1}^{\infty}$还是$X_n$中的相互独立的同分布的随机元序列．设 $\{U_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$是$X_n$中 θ 点的由绝对凸闭邻域所组成的邻域基底，则对每一 k，都有X中 θ 点的绝对凸闭邻域U_k，使

$$U_k^{(n)}=U_k\cap X_n.$$

于是对于 $x\in X_n$，

$$\|x\|_{U_k^{(n)}}=\|x\|_{U_k}.$$

从而由假设得：

$$E\|V_1\|_{U_k^{(n)}}=E\|V_1\|_{U_k}<\infty.$$

注意X_n是可分的（F）型空间，所以由[5]定理 6．1．2 即得．

参 考 文 献

[1] Köthe G., Topologische Lineare Räume, Springer-Verlag, Berlin·Göttingen·Heidelberg, 1960.

[2] 王梓坤，随机泛函分析引论，数学进展，第五卷，第一期，第45—71页，1962.

[3] 吴智泉、王向忱，关于随机元的若干注记，数学研究与评论，1982年 第 2 期.

[4] Taylor, R. L., Stochastic Convergence of Weighted Sums of Random Elements in Linear Spaces, Lecture Notes, Vol. 672, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[5] Padgett, W. J. and Taylor, R. L., Laws of Large Numbers for Normed Linear Spaces and Certain Fréchet Spaces, Lecture Notes, Vol. 360, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

Concerning the Convergence of the Mean of Random Elements in a (LF)-Space

By Wu Zhiquan(吴智泉) *and Wang Xiangchen*(王向忱)

Abstract

The definition concerning with convergence with probability one in a separable (LF)-space is discussed here. It is shown that if V, V_i, $i=1, 2, 3, \cdots$ are random elements in a separable (LF)-space such that $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} V_i \to V$ (a.s.) as $m\to\infty$, then $\lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{i=1}^{\infty} V_i^{-1}(X_n)) = 1$ must be hold. Once this is accomplished, the extensions of the strong lows of large numbers for independent, identically distributed random elements to separable (LF)-spaces will be given immediately. In the end, we pointed out that if X is a separable (LF)-space, $\{V_i\}$ is a sequence of i. i. d. random elements such that EV_1 exists and for every absolutely convex closed neighborhood U of zero element of X $E\|V\|_U<\infty$ then $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} V_i \to EV_1$ in probability 1 if and only if there exists some n snch that $P(V_1^{-1}(X_n))=1$, where $\|\cdot\|_U$ is the Minkowski functional generated by U.