Vol. 2, No. 2, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

佐藤超函数理论介绍*

(单变量情况)

(II)

齐民友

(武汉大学)

§2 关于超函数的基本定理

上一节的讨论中看到,超函数可以限制在一个开子集上仍为超函数;同时,又可以将一些开子集上的超函数"粘"起来成为一个大范围的超函数.这些性质统称为超函数的局部性.为了更清楚地理解这种局部性并解决一些有关的问题,我们要用到层(sheaf)的概念.

定义2.1 设X为一拓扑空间,对其任一开子集$U\subset X$,都有一个复线性空间$\mathscr{F}(U)$存在,而且对于开子集$U\subset V$在$\mathscr{F}(U)$与$\mathscr{F}(V)$之间有一个复线性映射—即同态—ρ_{UV},使得

1) $$\rho_{UV}=id_U.$$

2) 若$U\subset V\subset W$均为X的开子集,而有

$$\rho_{UW}=\rho_{UV}\circ\rho_{VW},$$

则说有一个X上的前层(presheaf).ρ_{UV}称为限制映射.

准确些说,我们得到的是X上复线性空间的前层,当然也可以讨论例如Abel群的前层,等等.

$\mathscr{F}(U)$的每一个元称为U上的一个切口(section),$\mathscr{F}(U)$称为U上的切口空间.如果$U=X$,则$\mathscr{F}(X)$的元称为整体切口.

前层概念的要点是切口经过限制映射后将成为较小开集上的切口.现在反过来,问较小开集上的切口能否合成较大开集上的切口?

定义2.2 前层$\mathscr{F}$若适合以下条件,就称为层:设$U\subset X$是一个开集,$\{U_k\}$是U的任一开复盖,有

FI. 若$f\in\mathscr{F}(U)$是U上一个切口,而且在每个U_k上的限制$f_k=f|_{U_k}=0$,则$f=0$.

FII. 若$f_\alpha\in\mathscr{F}(U_\alpha)$是$U_\alpha$上的切口,而且$U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi$时$f_\alpha|_{U_\alpha\cup U_\beta}=f_\beta|_{U_\alpha\cup U_\beta}$,则必

*1981年5月20日收到.本文上半部已于上期刊登.

存在U上的一个切口$f\in\mathscr{F}(U)$，使$f|_{U_\alpha}=f_\alpha$。

注 定义2.2中的任意开复盖可以代之以X的某个拓扑基所成的开复盖。

下面举一些例子。

例。令$X=\mathbf{C}^n$，$\mathscr{F}(U)=\mathscr{O}(U)$，即得解析函数层。

令 $X=\mathbf{R}^n$，$\mathscr{F}(U)=C^\infty(U)$，即得光滑函数层。

令 $X=\mathbf{R}^n$，$\mathscr{F}(U)=\mathscr{D}'(U)$，即得Schwartz广义函数层。

还可以举出前层而不是层的例子。例如$X=\mathbf{R}^n$，$\mathscr{F}(U)=L_1(U)$，即U上可积函数。它不适合FⅡ，因为取$\mathbf{R}^n$的一个开复盖$\{U_\alpha\}$使每个U_α均为有界开集，则在每个U_α上可积的函数（例如$f(x)\equiv 1$）在$\mathbf{R}^n$上不一定可积。但是，在$\mathbf{R}^n$上的局部可积函数确实成为层。请读者自行验证。

在层之间有一种映射关系称为"射"(morphism)。

定义2.3 设有X上的层$\mathscr{F}$与$\mathscr{G}$。若在切口空间$\mathscr{F}(U)$、$\mathscr{G}(U)$之间有同态h_U而且与限制映射可换，即下图为可换

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}(U) & \xrightarrow{h_U} & \mathscr{G}(U) \\ \rho_{VU}\downarrow & & \downarrow\rho_{VU} \\ \mathscr{F}(V) & \xrightarrow[h_V]{} & \mathscr{G}(V) \end{array} \qquad \begin{array}{c} V\subset U \\ \rho_{VU}\circ h_U=h_V\circ\rho_{VU} \end{array}$$

则同态的系$\{\rho_U\}$称为一个射，或称层同态。

特别是，若每一个ρ_U均为嵌入映射（或者更抽象地说是一个单射），就说$\mathscr{F}$是$\mathscr{G}$的子层。

以后我们将证明，$\mathscr{B}(\Omega)$是层。这时很容易看到，乘子运算和微分运算都是$\mathscr{B}(\Omega)$到$\mathscr{B}(\Omega)$的射或层同态。层同态的根本特点在于它与限制映射的可交换性。可以说，这就是一种"局部性"，而"射"其实就是局部算子的抽象化。为了进一步说明这个问题，引入切口的支集概念。

设$f\in\mathscr{F}(U)$，而对开集$V\subset U$有$f|_V=\rho_{VU}f=0$，就说f在V上为0。使f在其上为0的最大开子集U_0在U中的余集$U\backslash U_0$称为f的支集，仍记作$\operatorname{supp} f$。于是有

命题2.4 在射之下，切口的支集不会扩大。

证明是自明的。局部算子的根本特点在此。

现在要证明第一个基本的结果：$\mathscr{B}(\Omega)$是层。但在证明之前还应提到另一个基本问题。前面定义$\mathscr{B}(\Omega)=\mathscr{O}(U\backslash\Omega)/\mathscr{O}(U)$，那么超函数的定义与$\Omega$的复邻域$U$的取法是否有关？答案是无关。为了证明这样一些基本的事实，所用的工具是最基本的Mittag-Leffler定理。我们先从它的最简单的特例开始。

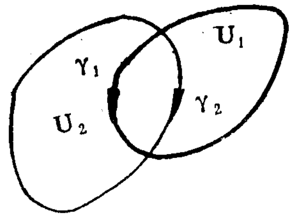

图 7

引理2.5 (Mittag-Leffler)　设有两个开集U_1、U_2，$F(z)\in\mathcal{O}(U_1\cap U_2)$，于是必存在$F_j(z)\in\mathcal{O}(U_j)$　$i=1,2$，使$F(z)=F_1(z)-F_2(z)$。

证　先设∂U_1、∂U_2都是分段光滑曲线如图7，而且可以应用Cauchy公式

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1-\gamma_2}\frac{F(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{F(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{F(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}.$$

令$F_j(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j}\frac{F(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$，则显然$F_j(z)\in\mathcal{O}(U_j)$而且适合要求。

在一般情况下，取U_j内的上升开子集列$U_{j,k}$使$U_{j,1}\Subset U_{j,2}\Subset\cdots$且$\bigcup_{k=1}^{\infty}U_{j,k}=U_k$，而且$\partial U_{j,k}$是分段光滑曲线，$j=1$、2。最重要的是设$U_1\cup U_2$与$U_{1,k}\cup U_{2;k}$成为Runge对（其定义与有关定理见下文），对于$F(z)|_{U_{1,k}\cap U_{2,k}}$应用上面的理论知道有$F_{j;k}(z)\in\mathcal{O}(U_{j,k})$使$F(z)=F_{1,k}(z)-F_{2;k}(z),z\in U_{1;k}\cap U_{2,k}$。从而可知

$$F_{1;k+1}(z)-F_{1;k}(z)=F_{2;k+1}(z)-F_{2;k}(z)\qquad z\in U_{1;k}\cap U_{2;k}$$

但上式左方其实定义于$U_{1;k}$上，右方定义于$U_{2;k}$上，所以二者合起来属于$\mathcal{O}(U_{1,k}\cup U_{2,k})$，记之为$G_k(z)$。根据Runge定理必有$H_k(z)\in\mathcal{O}(U_1\cup U_2)$存在，使

$$|G_k(z)-H_k(z)|\leqslant\frac{1}{2^k},\ z\in U_{1,k-1}\cup U_{2,k-1}.$$

令$F_1(z)=F_{1;1}(z)+\sum_{k=1}^{\infty}[G_k(z)-H_k(z)]$。对任一点$z\in U_1$，必有$N$存在，使$z\in U_{1;N-1}$，而上式由$G_k=F_{1,k+1}-F_{1,k}$可以化为

$$F_1(z)=F_{1,N}(z)+\sum_{k=N}^{\infty}[G_k(z)-H_k(z)]-\sum_{k=1}^{N-1}H_k(z).$$

右方三项均属于$\mathcal{O}(U_{1;N-1})$，故$F_1(z)$在z解析。这样得知$F_1(z)\in\mathcal{O}(U_1)$。同样作$F_2(z)=F_{2,1}(z)+\sum_{k=1}^{\infty}[G_k(z)-H_k(z)]$，易见在$U_{1,N-1}\cap U_{2;N-1}$中$F_1(z)-F_2(z)=F_{1,N}(z)-F_{2;N}(z)=F(z)$。由$N$的任意性即得定理之证。

上面提到Runge对和Runge定理，这是为了解决如下的问题。设有两个区域$U\subset V$，问$\mathcal{O}(U)$中的元可否用$\mathcal{O}(V)$中的序列在U中广义一致地逼近？如果能够，就说U、V成为一个Runge对。

Runge定理　若$P^1\backslash U$(P^1即Riemann球)的各个连通分支均与$P^1\backslash V$相交，则U、V为Runge对。

Runge定理是复变函数论的基本定理之一，证明可见[21]。

定理2.6 (Mittag-Leffler)　设$\{U_\lambda\}$是开集U的局部有限开复盖。设函数族$F_{\lambda\mu}\in\mathcal{O}(U_\lambda\cap U_\mu)$适合以下的"上循环条件"(cocycle condition)：

$$\begin{aligned}&F_{\lambda\mu}=-F_{\mu\lambda}\qquad&&\text{在 }U_\lambda\cap U_\mu\text{ 上},\\&F_{\lambda\mu}+F_{\mu\nu}+F_{\nu\lambda}=0\qquad&&\text{在 }U_\lambda\cap U_\mu\cap U_\nu\text{ 上},\end{aligned}\tag{2.1}$$

则必存在 $F_\lambda(z)\in\mathscr{O}(U_\lambda)$ 使

$$F_{\lambda\mu}(z)=F_\lambda(z)-F_\mu(z).$$

证 可以用归纳法．当 $\{U_\lambda\}=\{U_1,U_2\}$ 时，令 $F_{\lambda\mu}=F(z)\in\mathscr{O}(U_1\cap U_2)$，$F_{\mu\lambda}=-F(z)$，而因为设有 U_ν，故上循环条件自然成立．于是定理 2.6 化为其特例引理 2.5 而自然成立．若设 $\{U_\lambda\}=\{U_1,\cdots,U_{N-1}\}$ 时定理成立，考虑 $\{U_j\}_{j=1,\cdots,N}$．对 $\{U_j\}_{j=1,\cdots,N-1}$ 得知存在 $F_j\in\mathscr{O}(U_j)$，$j=1,\cdots,N-1$，且

$$F_{jk}(z)=F_j(z)-F_k(z)\quad 1\leqslant j,k\leqslant N-1.$$

记 $V=\bigcup_{j=1}^{N-1}U_j$，并且在 $V\cap U_N$ 上定义解析函数 $G(z)=F_j(z)+F_{jN}(z)\ (z\in U_j\cap U_N)$．这个定义是适当的．因为由(2.1)，在 $(U_j\cap U_N)\cap(U_k\cap U_N)=U_j\cap U_N\cap U_k$ 上 $F_j(z)+F_{jN}(z)=F_k(z)+F_{kN}(z)$，故 $G(z)\in\mathscr{O}(V\cap U_N)$．由引理 2.5，有

$$G(z)=G_N(z)-H(z),\quad G_N(z)\in\mathscr{O}(U_N),H(z)\in\mathscr{O}(V).$$

令 $G_j(z)=F_j(z)+H(z)$，则 $G_j(z)\in\mathscr{O}(U_j)$，而且在 $U_j\cap U_k$ 上

$$G_j(z)-G_k(z)=F_j(z)-F_k(z)=F_{jk}(z),\quad 1\leqslant j,k\leqslant N.$$

最后考虑一般的开复盖．如引理 2.5 那样，作一串开子集 $V_1\subset\subset V_2\subset\subset\cdots\subset\subset V$，使 $\bigcup_k U_k=U$，而且 U,V_n 为 Runge 对．因为 $\{U_\lambda\}$ 是 U 的局部有限开复盖，故对任一个固定的 V_n，必只有有限个 U_λ 与 V_n 相交．于是应用以上的推理，知有 $F_{\lambda;n}(z)\in\mathscr{O}(U_\lambda)$ 使 $F_{\lambda;n}-F_{\mu;n}=F_{\lambda\mu}$．对这有限个 U_λ 以外的 U_λ，不妨设 $F_{\lambda,n}=0$．于是 $F_{\lambda\mu}=F_{\lambda,n}-F_{\mu;n}$ 在 V_n 上成立．因为 $F_{\lambda;n+1}-F_{\lambda;n}$ 定义了 V_n 上的解析函数 $H_N(z)$，由 Runge 定理可以找到 $K_n(z)\in\mathscr{O}(U)$ 使在 V_{n-1} 上 $|H_n(z)-K_n(z)|\leqslant\frac{1}{2^n}$，最后定义

$$G_\lambda=F_{\lambda,1}+\sum_{n=1}^{\infty}[F_{\lambda,n+1}-F_{\lambda,n}-H_n(z)].$$

用与引理 2.5 中一样的变形法可证 $G_\lambda(z)\in\mathscr{O}(U_\lambda)$，而且对 $U_\lambda\cap U_\mu$ 取 N 充分大使 V_n 包含 U_λ、U_μ，可以证明

$$G_\lambda(z)-G_\mu(z)=F_{\lambda,N}(z)-F_{\mu,N}(z)=F_{\lambda\mu}(z).$$

有了 Mittag-Leffler 定理后，就可以证明超函数的定义与Ω的复邻域 U 的取法无关．实际上，若 U、V 是 Ω 的两个复邻域，设 $f(x)\in B(\Omega)$ 由 $F(z)\in\mathscr{O}(U\backslash\Omega)$ 定义，今证可找到 $\tilde{F}(z)\in\mathscr{O}(V\backslash\Omega)$，使 $F-\tilde{F}\in\mathscr{O}(U\cap V)$．但 $U\cap V$ 仍为 Ω 的复邻域，故不妨以它为 U，而设 $U\subset V$．这样，我们的问题成为：对 Ω 的两个复邻域 $U\subset V$，求证自然的限制映射 $\mathscr{O}(V\backslash\Omega)/\mathscr{O}(V)\to\mathscr{O}(U\backslash\Omega)/\mathscr{O}(U)$ 是全射．今取 $F(z)\in\mathscr{O}(U\backslash\Omega)$，令 $U_1=V\backslash\Omega,U_2=U$，则 $U\backslash\Omega=U_1\cap U_2$．而由 Mittag-Leffler 定理知必有 $F_1(z)\in\mathscr{O}(V\backslash\Omega)$，$F_2(z)\in\mathscr{O}(U)$ 使 $F(z)=F_1(z)-F_2(z)$，故 $\mathscr{O}(V\backslash\Omega)\ni F_1(z)=F(z)+F_2(z)$．因此 $\mathscr{O}(V\backslash\Omega)/\mathscr{O}(V)\ni[F_1(z)]=[F(z)]\in\mathscr{O}(U\backslash\Omega)/\mathscr{O}(U)$．

定理 2.7 $\mathscr{B}(\Omega)$成层．

证 $\mathscr{B}(\Omega)$为前层是很明显的．现在要证明它适合 FⅠ 和 FⅡ．

FⅠ 的验证　设 $f\in\mathscr{B}(\Omega)$, $f(x)=[F(z)]$. Ω 有一个开复盖 $\{\Omega_\lambda\}$ 而 $f|_{\Omega_\lambda}=0$. 于是由超函数的限制的定义知必有 Ω_λ 的某个复邻域 U_λ 使 $F(z)|_{U_\lambda}\in\mathscr{O}(U_\lambda)$. 记 $U=\bigcup\limits_\lambda U_\lambda$, 则 $F(z)$ 定义于 U 上而且它在 U_λ 上解析，故 $F(z)\in\mathscr{O}(U)$. 但 U 显然包含 Ω, 即 $F(z)$ 在 Ω 附近解析，从而 $f(x)=[F(z)]=0$.

FⅡ 的验证　设 $\{\Omega_\lambda\}$ 是 Ω 的一个开复盖，$f(x)\in B(\Omega_\lambda)$ 且 $f_\lambda|_{\Omega_\lambda\cap\Omega_\mu}=f_\mu|_{\Omega_\lambda\cap\Omega_\mu}$. 若用 $F_\lambda(z)\in\mathscr{O}(U_\lambda\backslash\Omega_\lambda)$ 记 $f_\lambda(x)$ 的定义函数，U_λ 是 Ω_λ 的复邻域. 因为复平面是仿紧空间，必要时作进一步的细分，可设 $\{\Omega_\lambda\}$、$\{U_\lambda\}$ 均为局部有限的，而且 $F_\lambda(z)-F_\mu(z)\in\mathscr{O}(U_\lambda\cap U_\mu)$. 记 $F_{\lambda\mu}(z)=F_\lambda(z)-F_\mu(z)$, 则它们自然适合上循环条件(2.1). 从而由 Mittag-Leffler 定理必有 $G_\lambda(z)\in\mathscr{O}(U_\lambda)$ 使 $F_{\lambda\mu}=G_\lambda-G_\mu$. 于是

$$F_\lambda(z)-F_\mu(z)=G_\lambda(z)-G_\mu(z),\ F_\lambda(z)-G_\lambda(z)=F_\mu(z)-G_\mu(z).$$

因而 $\{F_\lambda(z)-G_\lambda(z),\ z\in U_\lambda\}$ 就定义了 $\bigcup\limits_\lambda(U_\lambda\backslash\Omega_\lambda)=U\backslash\Omega$ 上的解析函数 $F(z)$. 令 $f(x)=[F(z)]$, 则 $f(x)$ 在 Ω_λ 上的限制等于 $f_\lambda(x)$. 证毕.

在 §1 中我们看到，超函数不但是 $L_{1,loc}(\mathbf{R})$ 的推广，也是 $\mathscr{D}'$ 广义函数的推广. 自然容易找到超函数不是 $\mathscr{D}'$ 广义函数的例子. 如 $e^{\frac{1}{x}}$ 可以作出超函数 $[e^{\frac{1}{z}}]$, 但它不是 $\mathscr{D}'$ 广义函数. 但是超函数与广义函数的本质区别在于：超函数的定义域可以"自由地"扩大，这一点是广义函数所决然没有的，用准确的数学语言来表述，我们有

定义 2.8　设 $\mathscr{F}$ 是拓扑空间 X 上的层，而且对任一开集 $U\subset X$, 限制映射 $\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(U)$ 都是全射(即任一局部切口都可拓展为一整体切口)，则称 $\mathscr{F}$ 为脆弱的 (flabby).

定理 2.9　超函数层是脆弱的.

证　设 $\mathscr{B}(\Omega)\ni f(x)=[F(z)]$, $F(z)\in\mathscr{O}(U\backslash\Omega)$. 由前述超函数定义中 Ω 的复邻域之可以任意选择可知，我们可以取 $U=\mathbf{C}\backslash\partial\Omega$ ($\partial\Omega$ 表示 Ω 在 $\mathbf{R}$ 中的边缘). 从而 $U\backslash\Omega=\mathbf{C}\backslash\bar{\Omega}$, 而 $F(z)\in\mathscr{O}(\mathbf{C}\backslash\bar{\Omega})\subset\mathscr{O}(\mathbf{C}\backslash R)$. 于是 $[F(z)]$ 也代表 $\mathscr{B}(R)$ 中的超函数 $g(x)$. 很明显 $\operatorname{supp} g\subset\bar{\Omega}$, 而且 $g|_\Omega=f$. g 就是 f 在 R 上的支集最小的拓展.

上面涉及超函数的许多基本定理的证明都是以Mittag-Leffler定理为基础的. 那么后者的实质是什么呢？Mittag-Leffler 原来是要解决如下的问题：给定一个无极限点的点集 $\{z_k\}\subset\mathbf{C}$, 并在每点给定一个主部 $P_k(z)=\sum\limits_{j=1}^{N_k}a_{kj}(z-z_k)^{-j}$, 求一个 $\mathbf{C}$ 上的半纯函数 $f(z)$, 使在 z_k 点具有指定的主部 $P_k(z)$. 为方便计，作 $\mathbf{C}$ 的一个复盖（设为局部有限的）$\{U_\lambda\}$, 使每个 U_λ 中至多有一个 z_k (记作 z_λ), 则这个问题的局部解是不足道的，例如在 U_λ 中令 $f(z)=P_\lambda(z)$ (若 $z_\lambda\in U_\lambda$) 即可. 但是它们不能粘成一个整体的半纯函数. 为此需要对 P_λ 加上一个解析部分 $-h_\lambda$, 使在 $U_\lambda\cap U_\mu$ 中

$$P_\lambda-h_\lambda=P_\mu-h_\mu\qquad\text{或 } P_\lambda-P_\mu=h_\lambda-h_\mu.$$

但是在 $U_\lambda\cap U_\mu$ 中或者没有 z_λ 或者 $z_\lambda=z_\mu\in U_\lambda\cap U_\mu$ (否则在 U_λ 或 U_μ 中将有两个指定点 z_λ、z_μ). 而在这两种情况下 $P_\lambda-P_\mu\in\mathscr{O}(U_\lambda\cap U_\mu)$. 记 $P_\lambda-P_\mu=f_{\lambda\mu}(z)$, 于是 Mittag-Leffler 的问题成为：若已给 $f_{\lambda\mu}(z)\in\mathscr{O}(U_\lambda\cap U_\mu)$ 而且适合上循环条件

$$f_{\lambda\mu}=-f_{\mu\lambda}\qquad z\in U_\lambda\cap U_\mu,$$
$$f_{\lambda\mu}+f_{\mu\nu}+f_{\nu\lambda}=0\qquad z\in U_\lambda\cap U_\mu\cap U_\nu,$$

是否一定存在 $h_\lambda(z)\in\mathcal{O}(U_\lambda)$ 使 $f_{\lambda\mu}(z)=h_\lambda(z)-h_\mu(z)$? Mittag-Leffler 定理对此给了肯定的回答.

可是 Mittag-Leffler 定理回答的是一种很常见类型的问题：由局部解答合并成整体解答. 这样作有时是会遇到障碍 (obstruction) 的. 这种障碍在数学中十分常见的情况下由一个上同调群来刻划. 一个上同调群消失 (vanishing 即为零) 时，常表示障碍的消失. Mittag-Leffler 定理就是这样一个上同调消失定理 (vanishing theorem of cohomology).

现在粗略介绍一下Čech上同调的概念. 设 $\{U_\alpha\}$ 是开集 $U\subset\mathbf{C}$ 的一个开复盖. 记 $U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}=U_{\alpha_0}\cap U_{\alpha_1}\cap\cdots\cap U_{\alpha_p}$. 于是定义函数族 $\{f_{\alpha_0\cdots\alpha_p}\in\mathcal{O}(U_{\alpha_0\cdots\alpha_p})\}$ 为一个 p 维上链 (cochain). 它构成一个 Abel 群 $C^p(U,\mathcal{O})$. 这里我们规定 $f_{\alpha_0\cdots\alpha_p}$ 对下标为反对称的，而且当 $U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}=\phi$ 时 $f_{\alpha_0\cdots\alpha_p}=0$. 在 p 维上链群之间定义上边缘算子 $\delta: C^p(U,\mathcal{O})\to C^{p+1}(U,\mathcal{O})$，使得若 $f\in C^p(U,\mathcal{O})$，则

$$(\delta f)_{\alpha_0\cdots\alpha_{p+1}}=\sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k f_{\alpha_0\cdots\hat{\alpha}_k\cdots\alpha_{p+1}}|U_{\alpha_0\cdots\alpha_{p+1}}.$$

若 $\delta f=0$, 则称 f 为一个 p 维上循环. 它组成 $C^p(U,\mathcal{O})$ 的子群 $Z^p(U,\mathcal{O})$. 又由 $f_{\alpha_0\cdots\alpha_p}$ 对指标的反对称性容易看到 $\delta^2 f=\delta(\delta f)=0$. 因此，若 $f\in C^{p-1}(U,\mathcal{O})$，则 $\delta f\in C^p(U,\mathcal{O})$ 必为上循环. 这种由 $p-1$ 维上链的上边缘算子的象构成的上循环, 称为 p 维上边缘 (coboundary). 它构成 $Z^p(U,\mathcal{O})$ 的子群 $B^p(U,\mathcal{O})$. 我们定义商群 $Z^p(U,\mathcal{O}/B^p(U,\mathcal{O})$ 为 U 的 p 维 Čech 上同调群或层系数的上同调群，记作 $H^p(U,\mathcal{O})$. 用它来看 Mittag-Leffler 定理，$\{f_\alpha(z)\in\mathcal{O}(U_\alpha)\}$ 是 0 维上链，它的上边缘是

$$(\delta f)_{\alpha\beta}=f_\alpha(z)-f_\beta(z)\qquad z\in U_\alpha\cap U_\beta.$$

一个一维上链成为上循环的条件是

$$(\delta f)_{\alpha\beta\gamma}=f_{\beta\gamma}-f_{\alpha\gamma}+f_{\alpha\beta}=f_{\alpha\beta}+f_{\beta\gamma}+f_{\gamma\alpha}=0\qquad z\in U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma.$$

$f_{\alpha\beta}=-f_{\beta\alpha}$ 由上链对于指标的反对称性得知, 因此，Mittag-Leffler 定理即是：若某个一维上链为上循环，则它一定是上边缘：

$$Z^1(U,\mathcal{O})=B^1(U,\mathcal{O}).$$

定理 2.10 (Mittag-Leffler)

$$H^1(U,\mathcal{O})=0. \tag{2.2}$$

关于 Čech 上同调理论的进一步知识可以参看[7].

§3　微局部分析

七十年代以来，线性偏微分方程理论的最重要的进展之一是人们认识到应该在一个微分流形的余切丛上考虑问题. 将微分算子 $\frac{1}{i}\partial_x$ 看成一个形式变量 ξ $\left(\frac{1}{i}\partial_x\sim\xi\right.$ 这个对应关系可以通过Fourier变换来实现$\left.\right)$，从而线性偏微分算子 $P\left(x,\frac{1}{i}\partial_x\right)$ 变成 ξ 的多项式 $p(x,\xi)$. 但是 x 和 ξ 其实是不平等的. 对 ξ 只能让它在全空间 “自由地” 变化，除了对

它进行诸如乘法和微分这些最简单的运算而外，人们对它是“无可奈何”的．然而七十年代以来，情况发生了很大的变化．人们发现 (x,ξ) 是某个微分流形的余切丛中的变量，可以“相当自由地”对 x 和 ξ 进行种种运算．在余切丛上考察一个微分算子等等，这就是微局部分析．数学中出现微局部分析也是由两个途径产生的，即由广义函数方面与超函数方面，而其共同的问题之一即所谓奇异性的谱分析．请先从广义函数方面开始．众所周知，一个 $\mathscr{S}$ 函数的Fourier变换仍然在 $\mathscr{S}$ 中，即若 $\hat{f}(\xi)=(Ff)(\xi)$，$f(x)\in\mathscr{S}$，则 $\hat{f}(\xi)$ 对 ξ 是急减的．反之，若 $\hat{f}(\xi)$ 对 ξ 急减，$f(x)$ 必定属于 $\mathscr{S}$，从而是“很好的”函数．因此，若 $\hat{f}(\xi)$ 不必急减而只是在包含某个方向 $t\xi_0(t>0)$ 的锥中急减，我们就可以认为由射线 $\{t\xi_0\}$ 所表示的方向是“好”的方向，反之则是“坏”的方向．Hörmander由这个想法开始，得到了波前集的概念，可以说是在广义函数范畴中对奇异性进行谱分析的结果．那么在超函数范畴中对奇异性进行谱分析也应该有相应的结果．这就是佐籐本人的开创性工作，他的工作其实早于Hörmander的工作，而由此得出了微函数理论也可以认为是开始了超函数理论的新阶段．本节中的内容就是对超函数的奇异性进行谱分析．

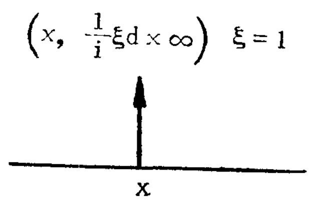

图8

一个超函数 $f(x)=F_+(x+i0)-F_-(x-i0)$，若 $F_\pm(x\pm i0)$ 均可越过实轴向另一侧解析拓展，则 $f(x)$ 将是实解析的（甚至为0），而是“很好”的函数．若 $F_+(x+i0)$ 可以解析拓展到实轴下方则，因 $F_-(x-i0)$ 在实轴下方原来就是解析的，所以可以说实轴下方是“好”方向．这样，方向的概念进入了超函数性态的讨论．为了表示这个方向，我们引入在实轴上 x 点处的法向量 ξ．因为 x 点实轴的法向量只有两个方向：向上或向下，相应地取 $\xi=\pm1$．如果 $F_\pm(x\pm i0)$ 均可在 x 点附近解析拓展到实轴上（下）侧，就说 $(x,\pm1)$ 是“好”的．于是我们现在已经不只在实轴 $\mathbf{R}$ 上考察超函数，而是在乘积空间 $\{(x,\xi)\}=R\times S^0$ 中考察它．$\{(x,\xi)\}$ 并不是 $\mathbf{R}^2$ 空间 $\{(x,y)\}$，实际上，实轴上（下）侧可以由 $\xi\cdot y>0(\xi=\pm1)$ 来表示．众所周知，$\mathbf{R}^2$ 空间的切平面仍是 $\mathbf{R}^2$，所以 ξ 其实生成了切空间上的线性形式，因而 ξ 是一个余向量．这样看来，$\{(x,\xi)\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 空间 $\{(x,y)\}$ 的子流形实轴的余法丛．准确些说是余法球丛，因为我们规定了 $\xi=\pm1$，即向量 ξ 之长 $|\xi|=1$，而此向量表示了 $1-1=0$ 维单位球面 S^0．为了表征 ξ 的这个几何特征，我们不写 (x,ξ) 而写 $\left(x,\frac{1}{i}\xi dx\infty\right)=(x,-i\xi dx\infty)$．这当然只是一个记号，$\frac{1}{i}$ 表征了它是法线方向的，dx 表示它是余向量（因为切向量的基底可取为 $\frac{\partial}{\partial x}$，余向量的基底可取为 dx），最后添加 ∞ 是表示以后将把余向量作用在无穷小切向量 $iy\frac{\partial}{\partial x}0$ 上，所以可以说 ∞ 是一个正规化因子．于是余法向量在无穷小切向量 $iy\frac{\partial}{\partial x}0$ 上之值是 $\left\langle\frac{1}{i}\xi dx\infty,iy\frac{\partial}{\partial x}0\right\rangle=\xi\cdot y\left\langle dx,\frac{\partial}{\partial x}\right\rangle=\xi\cdot y$．由此可见 $\left(x,\frac{1}{i}\xi dx\infty\right)$ 这个记号的合理性．当然，为简单起见，我们有时也就写作 (x,ξ)．

定义 3.1 若 $f(x)=F_+(x+i0)-F_-(x-i0)$ 的 $F_\pm(x\pm i0)$ 在 x 附近均可拓展到 $\left\langle \frac{1}{i}\xi dx\infty, iy\frac{\partial}{\partial x}0 \right\rangle=\xi\cdot y>0$ 处，就说 $f(x)$ 在 $\left(x,\frac{1}{i}\xi dx\infty\right)$ 处是微解析的．$f(x)$ 的微解析点集是乘积空间（余法球丛）$\mathbf{R}\times S^0$ 的开子集．

定义 3.2 $f(x)$ 的微解析点集在乘积空间 $\mathbf{R}\times S^0$ 中的余集称为 $f(x)$ 的奇谱，记作 $S.S.f(x)$，它是 $\mathbf{R}\times S^0$ 的闭子集．

令 π: $\mathbf{R}\times S^0\to\mathbf{R}$ 是投影映射 $(x,\xi)\longmapsto x$，有

命题 3.3 $\pi(S.S.f)=\operatorname{sing\,supp} f$.

证 若 $x\notin\operatorname{sing\,supp} f$，则 $f(x)=F_+(x+i0)-F_-(x-i0)$ 在 x 附近是实解析的，从而 $F_\pm(x\pm i0)$ 都可以解析拓展到实轴对方，即 $f(x)$ 在 $\left(x,\pm\frac{1}{i}dx\infty\right)$ 为微解析，从而 $\left(x,\pm\frac{1}{i}dx\infty\right)\notin S.S.f$，$x\notin\pi(S.S.f)$．反之，亦可证明当 $x\notin\pi(S.S.f)$ 时，f 在 $\left(x,\pm\frac{1}{i}dx\infty\right)$ 附近为微解析，即 $f(x)$ 在 x 附近是实解析的，亦即 $x\notin\operatorname{sing\,supp} f$.

命题 3.4 实解析系数偏微分算子不会扩大超函数的奇谱．

很容易看一些例子

例
$$S.S.\delta=\left\{\left(0,\pm\frac{1}{i}dx\infty\right)\right\}.$$
$$S.S.Y=\left\{\left(0,\pm\frac{1}{i}dx\infty\right)\right\}.$$
$$S.S.\frac{1}{x+io}=\{(0,idx\infty)\}.$$

奇谱有很多应用，其中之一是它能解决超函数的相乘问题．这里我们有

定理 3.5 设 f、g 是两个超函数，而 $S.S.f\cap(S.S.g)^a=\phi$，则可以定义其积 $f\cdot g$．这里 $(S.S.g)^a$ 是 $S.S.g$ 的对径映射之象：$(x,\xi)^a=(x,-\xi)$.

证 可以分别几种情况：

1) f 在 $\left(x,\frac{1}{i}\xi dx\infty\right)$ 附近是微解析的，而 $\left(x,-\frac{1}{i}\xi dx\infty\right)\in S.S.f$．不妨看 $\xi=1$ 的情况．这时 $f(x)$ 的边值表示中 $F_-(x-i0)$ 可以拓展到实轴上侧，即在 x 附近解析．于是用 $F(z)-F_-(z)$ 作为 $f(x)$ 的定义函数，可设 $F_-=0$，即 $f(x)=F_+(x+i0)$ 由假设，$\left(x,\frac{1}{i}dx\infty\right)\notin S.S.g$，而 g 在 $\left(x,\frac{1}{i}dx\infty\right)$ 附近微解析．和上面一样．可取 $g(x)=G_+(x+i0)$．于是我们可以定义 $fg=(F_+G_+)(x+i0)$.

2) 若 $\left(x,\pm\frac{1}{i}dx\infty\right)\in S.S.f$，则 g 在 x 为实解析，而我们可以定义 $fg=(gF_+)(x+i0)-(gF_-)(x-i0)$.

由此可见，实解析函数作为一个超函数或者作为一个乘子与超函数相乘，其结果是一致的．

奇谱也就是波前集，它有许多重要的应用．我们推荐读者读一下[9]．Hörmander 提出的波前集的定义与运算可见[8]．还有一本关于微局部分析的论文集[6]，其中有许多文献．

正如超函数作为一个 mod 解析函数的等价类可以说是解析函数边值的奇异性的一种"结晶"一样。我们也可以 mod 微解析函数而在纯粹的形态下在余法球丛上考察超函数的奇异性，这就是微函数的概念。但在此，我们需要更多的有关层的知识。

有关层的问题，有一些是要在其局部切口上考察的，有一些则需要在另一个水平上加以考察，这就需要芽的概念。

设有一点 $x\in X$。取包含 x 的开集族 $\{U_\alpha\}$。若 $f_\alpha\in\mathscr{F}(U_\alpha)$，$f_\beta\in\mathscr{F}(U_\beta)$，而在 $V=U_\alpha\cap U_\beta$ 上 $f_\alpha|_V=f_\beta|_V$，就说这两个切口是等价的。这个说法是很合理的，例如考虑解析函数层：$f_\alpha\in\mathscr{F}(U_\alpha)$，即 U_α 上的解析函数，从复变函数论我们知道，若 $f_\alpha|_V=f_\beta|_V$，则 f_α 和 f_β 互为解析拓展而为 x 附近的解析函数。就这一点言，f_α 与 f_β 当然是等价的。对一般的层，将 $\{\mathscr{F}(U)\}U\ni x$ 中的切口按以上等价关系分类，每一个等价类称为该切口在 x 点的芽。粗略而直观地说，芽就是切口在 x 附近的"一小片"，这个"附近"可以是很小的，甚至越来越小，但总是 x 的邻域而不止是 x 一点本身。这个等价类称为切口 f_α 在 $x\in U_\alpha$ 条件下的"归纳极限"，记作 $f_x=\varinjlim_{x\in U_\alpha} f_\alpha$，也记作 $f(x)$。正如切口是线性空间的元素一样，芽也构成线性空间。因为对两个芽 f_x 和 g_x 以及复数 λ 和 μ，必有 x 的邻域 U_α、U_β，使 f_x 和 g_x 之代表元各为 $f_\alpha\in\mathscr{F}(U_\alpha)$，$g_\beta\in\mathscr{F}(U_\beta)$。取另外的代表元 $f_\alpha|_V$，$g_\beta|_V$，$V=U_\alpha\cap U_\beta$，则 $\lambda f_\alpha|_V+\mu g_\beta|_V\in\mathscr{F}(V)$。我们定义它所决定的在 x 点的芽为 $\lambda f_x+\mu g_x$。所以芽也构成线性空间 $\mathscr{F}_x$，即 $\mathscr{F}(U)$ 对 $x\in U$ 的归纳极限。于是我们有

定义 3.6　设 $\mathscr{F}$ 为（前）层，$x\in X$。我们称

$$\mathscr{F}_x=\varinjlim_{x\in U}\mathscr{F}(U)$$

为 $\mathscr{F}$ 在 x 处的茎。它是一个线性空间。

前层一般地还不是层，但是可以利用茎 $\mathscr{F}_x$ 由它生成层。这里我们有

定义与定理 3.7　设 $\mathscr{F}$ 是 X 上的前层。对 $U\subset X$ 作切口空间 $\overline{\mathscr{F}}(U)$ 如下：

$$\overline{\mathscr{F}}(U)=\{s:\ U\to\bigsqcup_{x\in U}\mathscr{F}_x;\ \forall x\in U,\ \exists V\ni x\text{ 以及}\tag{3.1}$$
$$t\in\mathscr{F}(V)\text{ 使对 }\forall y\in V,\ s(y)=t(y)\}$$

$\{\overline{\mathscr{F}}(U)\}=\overline{\mathscr{F}}$ 称为 $\mathscr{F}$ 的伴随层．

在证明之前，先解释它的意义．直观地说，前层之所以不是层，是由于切口的小片"粘合起来"并不一定是大片的切口．因此我们就把这些"粘合而成"的"东西"集合起来，称为某一个新的层（需要证明它确实是层）的切口．这个新的层就叫做伴随层．从(3.1)看，伴随层的切口 s 在每一点 $x\in U$ 的附近（即在 V 中）即 $\mathscr{F}(V)$ 的切口 t．从(3.1)还看到，$\overline{\mathscr{F}}$ 在 x 的芽与 $\mathscr{F}$ 在 x 的芽完全相同：$s(x)=t(x)$，所以茎也相同：$\overline{\mathscr{F}}_x=\mathscr{F}_x$，但 $\overline{\mathscr{F}}$ 包含了多得多的切口．因为若 $\dot{S}$ 是 $\mathscr{F}$ 的切口，则由(3.1)，

"$s: U\longmapsto\bigsqcup_{x\in U}\mathscr{F}_x$；$\forall x\in U,\ \exists V\ni x$（即取 $V=U$）

以及 $\mathscr{F}(V)$ 的一个切口（即取为 $\dot{S}$）使

$s(y)=\dot{S}(y),\ y\in V=U$"

也是$\overline{\mathscr{F}}$的切口。但很明显$s=\mathring{s}$，所以$\mathscr{F}\subset\overline{\mathscr{F}}$。但$\overline{\mathscr{F}}$中的切口更多，否则$\overline{\mathscr{F}}=\mathscr{F}$而$\mathscr{F}$已经是层了。如果看一个例子，设$X=\mathbf{R}^n$。$\mathscr{F}(U)$是开集$U\subset X$上的可积函数空间。$\mathscr{F}$是前层而不是层，因为在一切开集$|x|<R$上的可积函数（例如$f(x)\equiv 1$）粘合成$f(x)\equiv 1, x\in\mathbf{R}^n$，它在$\mathbf{R}^n$上不可积。相应的伴随层即局部可积函数之层。

定理 3.7 的证明 先应证$\overline{\mathscr{F}}(U)$是线性空间。因为对$s_1$、$s_2\in\overline{\mathscr{F}}$，我们定义$\lambda s_1+\mu s_2$为$(\lambda s_1+\mu s_2)(y)=\lambda t_1(y)+\mu t_2(y)$，这里符号的意义自明。由此还看到，若(3.1)中的s适合$s(x)=0$，$\forall x\in U$，则s是$\overline{\mathscr{F}}(U)$的零元：$s=0$，

验证 FI。设$s\in\overline{\mathscr{F}}(U)$，$\bigcup_\lambda U_\lambda=U$而$s|_{U_\lambda}=0$，则任一点$x\in U$必含于某$U_\lambda$中由$s|_{U_\lambda}=0$有$s(x)=0$。由定义$s=0$。

验证 $F\text{II}$。将构成s_λ的$\mathscr{F}(U_\lambda)$的各小片$t(y)$对一切$y\in U_\lambda$及一切λ粘合，即得$\overline{\mathscr{F}}(U)$之元$s$，而显然$s|_{U_\lambda}=s_\lambda$。

现在我们来看由线性空间的映射产生的一些概念怎样移植到层中来。设$h:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$是$X$上层之间的射，即层同态。于是有线性映射

$$h_U:\mathscr{F}(U)\to\mathscr{G}(U). \tag{3.2}$$

这时$\ker h_U$也是U上的线性空间

$$U\longmapsto \ker h_U. \tag{3.3}$$

很容易验证它是$\mathscr{F}$的子层，称为h的核层，记作$\ker h$。于是$(\ker h)(U)=\ker h_u$。$Image\ h_U$也是U上的线性空间。但是

$$U\longmapsto Image\ h_U \tag{3.4}$$

只是前层而一般不是层。我们称其伴随层为其象层，记作$Image\ h$。因此$(Image\ h)(U)\neq Image\ h_U$。左边是由右边补充了许多切口而成的。

如果$\mathscr{F}$是$\mathscr{G}$的子层，则对开集$U\subset X$对应一个线性空间一商空间$\mathscr{G}(U)/\mathscr{F}(U)$，又可得一前层

$$U\longmapsto\mathscr{G}(U)/\mathscr{F}(U), \tag{3.5}$$

其伴随层称为商层，记作$\mathscr{G}/\mathscr{F}$。和上面一样一般$(\mathscr{G}/\mathscr{F})(U)\neq\mathscr{G}(U)/\mathscr{F}(U)$。

以上我们看到，在切口水平上，象与商都只构成前层，还要补充新的切口才能成层。但是在芽的水平上却是完全一样的，即有

$$(\ker h)_x=\ker h_x,\ (Image\ h)_x=Image\ h_x,\ (\mathscr{G}/\mathscr{F})_x=\mathscr{G}_x/\mathscr{F}_x. \tag{3.6}$$

有了核、象、商等概念以后，就可以把线性空间的恰当序列（exact sequence）这个重要概念移植到层中来。我们说线性空间列的映射

$$A\xrightarrow{h}B\xrightarrow{k}C$$

在B处是恰当的，即$Image\ h=\ker h$。一种特别重要的恰当序列称为短恰当序列：

$$0\to A\xrightarrow{h}B\xrightarrow{k}C\to 0, \tag{3.7}$$

即指在 A、B、C 处都恰当．这时很容易看到 h 一定是单射，k 一定是全射，而且 $C\simeq B/A$．反过来也是对的．把这些概念移植到层，我们有

定义 3.8 设有 X 上层 $\mathscr{F}$、$\mathscr{G}$、$\mathscr{H}$ 及其射 h、k：$\mathscr{F}\xrightarrow{h}\mathscr{G}\xrightarrow{k}\mathscr{H}$．若 $\mathrm{Image}\,h=\ker k$，就说这个序列在 $\mathscr{G}$ 处恰当．特别是若 $0\to\mathscr{G}\xrightarrow{k}\mathscr{H}$，$\mathscr{F}\xrightarrow{h}\mathscr{G}\to 0$ 在 $\mathscr{G}$ 处恰当，则 k 是单射，h 是全射．

很容易看到，对于层的恰当序列，$\mathscr{F}_x\xrightarrow{h_x}\mathscr{G}_x\xrightarrow{k_x}\mathscr{H}_x$ 也是恰当的．但是对于开集 $U\subset X$，$\mathscr{F}(U)\xrightarrow{h_U}\mathscr{G}(U)\xrightarrow{k_U}\mathscr{H}(U)$ 一般就不是恰当的．

现在把这些概念应用于层 $\mathscr{B}$ 及其子层实解析函数层 $\mathscr{A}$，我们有

定理 3.9 $\mathscr{B}/\mathscr{A}$ 是脆弱层，而且对任一开集 $\Omega\subset X$，$(\mathscr{B}/\mathscr{A})(\Omega)=\mathscr{B}(\Omega)/\mathscr{A}(\Omega)$，并且 sing supp f、$(f\in\mathscr{B}(\Omega))$ 与 f 在 $(\mathscr{B}/\mathscr{A})(\Omega)=\mathscr{B}(\Omega)/\mathscr{A}(\Omega)$ 中所代表的元的支集相等．

证 因为 $(\mathscr{B}/\mathscr{A})(\Omega)$ 比 $\mathscr{B}(\Omega)/\mathscr{A}(\Omega)$ 包含更多的切口，所以只要证明自然的嵌入映射 $\mathscr{B}(\Omega)/\mathscr{A}(\Omega)\to(\mathscr{B}/\mathscr{A})(\Omega)$ 是全射即可．任取 $f\in(\mathscr{B}/\mathscr{A})(\Omega)$，今证必有 $\mathscr{B}(\Omega)$ 中的元 $\tilde{f}$，使 $[\tilde{f}]$ 对应于 f．因为 $(\mathscr{B}/\mathscr{A})(\Omega)$ 的芽 f_x 与 $\mathscr{B}(\Omega)/\mathscr{A}(\Omega)$ 的芽相同，所以在每一点 $x\in\Omega$ 都有一个邻域 Ω_λ 使 f 在其中可用 $f_\lambda\in\mathscr{B}(\Omega_\lambda)$ 为代表．但 $\cup\Omega_\lambda\supset\Omega$，又因

$$g_{\lambda\mu}=f_\lambda|_{\Omega_\lambda\cap\Omega_\mu}-f_\mu|_{\Omega_\lambda\cap\Omega_\mu}\in\mathscr{A}(\Omega_\lambda\cap\Omega_\mu)$$

适合上循环条件

$$g_{\lambda\mu}=-g_{\mu\lambda},\quad g_{\lambda\mu}+g_{\mu\nu}+g_{\nu\lambda}=0. \tag{3.8}$$

当然也可以取 Ω_λ 的复邻域 U_λ 使在其上上述关系仍成立，且 $\{U_\lambda\}$ 可取为局部有限的．因此由 Mittag-Leffler 定理可知，必存在 $g_\lambda\in\mathscr{A}(\Omega_\lambda)$（实际上 $g_\lambda\in\mathscr{O}(U_\lambda)$）使 $g_{\lambda\mu}=g_\lambda-g_\mu$，从而 $f_\lambda-g_\lambda=f_\mu-g_\mu$．$[f]$ 在 Ω_λ 上也可以用 $f_\lambda-g_\lambda\in\mathscr{B}(\Omega_\lambda)$ 代表．但因 $\mathscr{B}(\Omega_\lambda)$ 是层，可以将 $f_\lambda-g_\lambda$ 粘合成 $\mathscr{B}(\Omega)$ 的元 $\tilde{f}$，它在 $\mathscr{B}(\Omega)/\mathscr{A}(\Omega)$ 中的等价类 $[\tilde{f}]$ 自然嵌入在 $(\mathscr{B}/\mathscr{A})(\Omega)$ 中成 f．又因 $\mathscr{B}(\Omega)$ 是脆弱层，所以 $\tilde{f}$ 可以拓展到 Ω 外，从而 $[\tilde{f}]\simeq f$ 也可以拓展到 Ω 外．

关于奇支集的论述由定义直接可知．

$\mathscr{B}/\mathscr{A}$ 当然表示了超函数的奇异性，但是还没有把奇异性的谱分析放进去，从而还未得到更精确的分析．为了得到这方面的结果，还需要以下两个概念．

设 f：$X\to Y$ 是拓扑空间之间的连续映射，X 或 Y 上的层在 f 之下会发生什么变化？若 $\mathscr{F}$ 是 X 上的层，$V\subset Y$ 为开集，则 $f^{-1}(V)\subset X$ 也是开集，因而 $\mathscr{F}[f^{-1}(V)]$ 有意义，把它写成 $(\mathscr{F}\circ f^{-1})(V)$，即得 V 上的一个线性空间．

定义 3.10 $\{(\mathscr{F}\circ f^{-1})(V)\}$ 是 Y 上的层，称为 X 在 f 下的顺象（direct image），记作 $f\mathscr{F}$．

当然应该验证它确实是层而不只是前层，但是这是很容易的，所以略去．

若有 Y 上的层 $\mathscr{G}$，对于开集 $U\subset X$，如何在 X 上作一个相应于 U 的切口空间？问题在于 $f(U)\subset Y$ 一般不一定是开的（但当 f 是开映射时确是开的），所以这时处理方法与定义 3.10 的略有不同．

定义3.11 对于U对应的线性空间$\varinjlim_{V\supset f(U)}\mathscr{G}(V)$得一个前层，其伴随层称为$\mathscr{G}$在$f$下的逆象(inverse image)，记作$f^{-1}\mathscr{G}$.

$\varinjlim_{V\supset f(U)}\mathscr{G}(V)$是归纳极限．它的意义是：若$V_1$、$V_2\supset f(U)$，则$V=V_1\cap V_2\supset f(U)$仍为开集．如果$\rho_{VV_1}\mathscr{G}(V_1)=\rho_{VV_2}\mathscr{G}(V_2)$，就说$\mathscr{G}(V_1)$与$\mathscr{G}(V_2)$等价：$\mathscr{G}(V_1)\sim\mathscr{G}(V_2)$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathscr{G}(V_1) & \sim & \mathscr{G}(V_2) \arrow[dl, "\rho_{VV_2}"] \\ & \mathscr{G}(V) \arrow[ul, "\rho_{VV_1}"] & \end{tikzcd}$$

这个等价类就称为$\mathscr{G}(V)$对于$V\supset f(U)$的归纳极限．它当然仍是一个线性空间．

现在把这个概念用于投影映射：π：$\mathbf{R}\times S^0\to\mathbf{R}$. 因为$S^0=\{1,-1\}$，所以$\mathbf{R}\times S^0$是实轴$\mathbf{R}$取两次，即其上下岸：$\mathbf{R}\times S^0=\mathbf{R}\times\{idx\infty\}\cup\mathbf{R}\times\{-idx\infty\}$，其中的开集一般可表为$\Omega_1\times\{idx\infty\}\cup\Omega_2\{-idx\infty\}$. 这样就解释为$\pi$：$\Omega_1\times\{idx\infty\}\cup\Omega_2\times\{-idx\infty\}\to\Omega_1\cup\Omega_2$. 考虑$\Omega_1\cup\Omega_2$上的超函数$\mathscr{B}(\Omega_1)\oplus\mathscr{B}(\Omega_2)$，其逆象应为

$$(\pi^{-1}\mathscr{B})(\Omega_1\times\{idx\infty\}\cup\Omega_2\times\{-idx\infty\})=\mathscr{B}(\Omega_1)\oplus\mathscr{B}(\Omega_2). \tag{3.9}$$

它当然是一个层而不只是前层．先作$\pi^{-1}\mathscr{B}$的一个子层$\mathscr{A}^*$：

$$\begin{aligned}&\mathscr{A}^*(\Omega_1\times\{idx\infty\}\cup\Omega_2\{-idx\infty\})\\&=\{f\in\mathscr{B}(\Omega_1);S.S.f\cap\Omega_1\times\{idx\infty\}=\phi\}\oplus\{f\in\mathscr{B}(\Omega_2);\\&\quad S.S.f\cap\Omega_2\times\{-idx\infty\}=\phi\}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

直观地说，$\mathscr{A}^*$中的元其实是一对元，其中一个在实轴下岸$\mathbf{R}\times\{idx\infty\}$没有奇谱，而为微解析的，即是$F_-(x-i0)$.另一个则在上岸是微解析的，即$F_+(x+i0)$. 或者说$\mathscr{A}^*=\{F_-(x-i0)\}\oplus\{F_+(x+i0)\}$. 从$\pi^{-1}\mathscr{B}$中"抹去"$(mod)\mathscr{A}^*$，即将上、下岸的微解析的"东西"抹去，余下的"东西"就可以用来表示带有方向性的奇异性．这样，佐藤就给出了

定义3.12 商层$\mathscr{C}=\pi^{-1}\mathscr{B}/\mathscr{A}^*$的元称为微函数(microfunction)；

由定义可知，有恰当序列

$$0\to\mathscr{A}^*\to\pi^{-1}\mathscr{B}\to\mathscr{C}\to0 \tag{3.11}$$

注意，微函数是余法球丛$\mathbf{R}\times S^0$上的对象，而不是$\mathbf{R}$上的对象．那么微函数在$\mathbf{R}$上相应的又是什么呢？由π：$\mathbf{R}\times S^0\to\mathbf{R}$作$\mathscr{C}$的顺象$\pi_x\mathscr{C}$即可得出．首先，我们应该注意$\pi_x\pi^{-1}\mathscr{B}$是$\mathbf{R}$上的层，其切口$(\pi_x\pi^{-1}\mathscr{B})(\Omega)=(\pi^{-1}\mathscr{B})(\pi^{-1}(\Omega))=(\pi^{-1}\mathscr{B})(\Omega\times\{idx\infty\}\cup\Omega\times\{-idx\infty\})=\mathscr{B}(\Omega)\oplus\mathscr{B}(\Omega)$. 于是可以将一些自然的映射组合起来而有

定义3.13 sp：$\mathscr{B}(\Omega)\to\mathscr{C}(\pi^{-1}\Omega))$定义如下：

$$\begin{aligned}&\mathscr{B}(\Omega)\to\pi_x\pi^{-1}\mathscr{B}(\Omega)=\mathscr{B}(\Omega)\oplus\mathscr{B}(\Omega)\\&\to\mathscr{B}(\Omega)\bmod\mathscr{A}^*(\Omega\times\{idx\infty\})\oplus\mathscr{B}(\Omega)\bmod\mathscr{A}^*(\Omega\times\{-idx\infty\}),\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}&f\longmapsto f\oplus f\\&\longmapsto f\bmod\mathscr{A}^*(\Omega\times\{idx\infty\})\oplus f\bmod\mathscr{A}^*(\Omega\times\{-idx\infty\})\\&=F_+(x+i0)\oplus F_-(x-i0).\end{aligned} \tag{3.13}$$

至此可以给出本节的基本定理：

定理3.14 $\mathscr{C}$为脆弱层，$\mathscr{C}(U)=\pi^{-1}\mathscr{B}(\Omega)/\mathscr{A}^*(U)$即

$$0\to\mathscr{A}^*(U)\to\pi^{-1}\mathscr{B}(U)\to\mathscr{C}(U)\to 0 \tag{3.14}$$

为恰当序列．这里U是$\mathbf{R}\times S^0$的开子集．

$$0\to\mathscr{A}(\Omega)\to\mathscr{B}(\Omega)\xrightarrow{sp}\mathscr{C}(\pi^{-1}(\Omega))\to 0 \tag{3.15}$$

也是恰当序列．从而可得佐藤恰当序列

$$0\to\mathscr{A}\to\mathscr{B}\xrightarrow{sp}\pi_x\mathscr{C}\to 0. \tag{3.16}$$

而且若$f\in\mathscr{B}(\Omega)$，$sp(f)\in(\pi_x\mathscr{C})(\Omega)$，则

$$S.S.f=supp\,sp(f). \tag{3.17}$$

证 先证(3.15)的恰当性．为此只需证明在$\mathscr{C}(U)$处为全射．因为$\mathbf{R}\times S^0=\mathbf{R}\cup\mathbf{R}$，我们不妨即设$U=\Omega\times\{idx\infty\}$．设$\{\Omega_\lambda\}$是$\Omega$的局部有限复盖．对$f\in\mathscr{C}(U)$，应证明它是$\pi^{-1}\mathscr{B}(U)$中某个元（仍记为$f$）的象．但现在$\pi^{-1}\mathscr{B}(\Omega)=\mathscr{B}(\Omega)$，而因$\mathscr{C}(U)$是层，故$f\in\mathscr{C}(U)$可由$f_\lambda\bmod\mathscr{A}^*(\Omega_\lambda\times\{idx\infty\})$来定义，这里$f_\lambda\in\mathscr{B}(\Omega_\lambda)$，而且$f_{\lambda\mu}=f_\lambda-f_\mu\in\mathscr{A}^*(\Omega_\lambda\cap\Omega_\mu\times\{id\pi\infty\})$．今证可对$f_\lambda$加一个适当的$\mathscr{A}^*(\Omega_\lambda\times\{idx\infty\})$之元以构成$\mathscr{B}(\Omega)$之元$\tilde{f}$．$f\in\mathscr{C}(U)$即是其象．

由$\mathscr{A}^*$的定义知$f_\lambda\equiv F_\lambda(x+i0)\bmod\mathscr{A}^*(\Omega\times\{idx\infty\})$．而$f_{\lambda\mu}=F_\lambda(x+i0)-F_\mu(x+i0)\in\mathscr{A}^*(\Omega_\lambda\cap\Omega_\mu\times\{idx\infty\})$，这表示它可以拓展到实轴上成为实解析函数．显然$f_{\lambda\mu}=-f_{\mu\lambda}$，$f_{\lambda\mu}+f_{\mu\nu}+f_{\nu\lambda}=0$，故仿Mittag-Leffler定理的证明知有$g_\lambda\in\mathscr{A}(\Omega_\lambda)$使$f_\lambda-f_\mu=g_\lambda-h_\mu$．用$f_\lambda-g_\lambda$代替$f_\lambda$即可拚成$\mathscr{B}(\Omega)$（现在即$\pi^{-1}\mathscr{B}(U)$）的元$\tilde{f}$．

又因我们已证$\mathscr{B}(\Omega)$的脆弱性，所以上面的$\tilde{f}\in\pi^{-1}\mathscr{B}(U)=\mathscr{B}(\Omega)$可以拓展．因此它在$\mathscr{C}(U)$中的象也可拓展．这就是微函数层$\mathscr{C}(U)$的脆弱性．

最后证明(3.15)的恰当性．这里也只需证明sp是全射．对$f\in\mathscr{C}(\pi^{-1}(\Omega))$，由上述证明必有$g$、$h\in\mathscr{B}(\Omega)$分别在$\Omega\times\{\pm idx\infty\}$中微解析，使

$$f|_{\Omega\times\{idx\infty\}}=g \bmod\mathscr{A}^*(\Omega\times\{idx\infty\}),$$

$$f|_{\Omega\times\{-idx\infty\}}=h\bmod\mathscr{A}^*(\Omega\times\{-idx\infty\}).$$

于是$g=G(x-i0)$，$h=H(x+i0)$，$H(x+i0)+G(x-i0)$即f在$\mathscr{B}(\Omega)$中的原象．至于(3.16)的恰当性利用$\mathscr{B}(\Omega)/\mathscr{A}(\Omega)=(\mathscr{B}/\mathscr{A})(\Omega)$即可得知．

$S.S.f=supp\,sp(f)$由定义是明显的．例如设$(x,idx\infty)\notin S.S.f$，则$f$在该点微解析，从而在该点$spf\in\mathscr{A}^*(x,\ idx\infty)$，即$spf=0$，从而$(x,\ idx\infty)\notin supp\,sp(f)$．反之亦然．

关于参考文献

作为超函数论的入门书，我们愿推荐金子晃的新作[14]．这是根据他在Grenoble的讲义[15]写成的．此外可以看[16]第三章和[22]，前者只讲了单变量的情况，后者是比较系统的，但较多地用到线性拓扑空间．Cerezo-Piriou-Chazarain[4]是1973年在Nice一次讨

论会上为物理学家们作的介绍报告，说理清晰，简单明了，后来许多介绍(包括本文)都是按它的格式写成的，但可惜许多重要结论没有证明。Schapira [24]则是按另一风格写成的。

如果想进一步了解超函数在偏微分方程上的应用，可以看 Bony 在Orsay 的讲义[1]和小松彦三郎在东京大学的讲义[17]。近年来有人开始把超函数向工程技术人员介绍，例如今井功的讲座连载[10]，对单变量超函数作了十分详细的介绍。

关于超函数的原始论文，首先应提出佐藤最早的两篇文章。第一篇是讲单变量情况的，很好读。第二篇多变量情况的就不易懂了。1971年在坚田(Katata)召开的讨论会记录[18]是十分重要的。其中一篇长文[18]占了近一半篇幅，即著名的S—K—K，虽然十分难读，但据超函数论的专家介绍，有志于斯者花一些精力至少大体上懂得它，是十分值得的。最近出版的柏原正树等的[19]是一本重要的著作，读者如果愿对以上同调理论为基础的代数解析学，特别是它在偏微分方程上的应用有所了解，是很应该读一下的。

参 考 文 献

见本刊上期本文(一)文后(编辑部注)。