Vol. 2, No. 2, 1982

数学研究与评论

JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

Hilbert 空间中流形上泛函极小值点的寻找方法

I 流形的恢复算子和近似曲线*

费景高

(北京市 142 信箱 213 分箱 2 号)

摘　　要

本文首先构造了 Hilbert 空间中流形的一类恢复算子，讨论了它的一些性质。然后利用恢复算子构造性地建立了流形的局部参数表示，为在 Hilbert 空间中寻找流形上泛函的极小值点提供构造计算方法和实现算法的依据。

另外，本文还构造了一类流形的近似曲线，利用它可以将通常的直线寻找改换成曲线寻找。为算法的实现提供一个工具。

§1 流形的恢复算子

令 H 和 H_1 均是实可分 Hilbert 空间，$f(\cdot)$ 是定义在 H 上的泛函数，$\varphi(\cdot)$ 为定义在 H 上而值域含在 H_1 内的算子。所有满足方程

$$\varphi(x)=\theta \tag{1.1}$$

的空间 H 的点 x 全体组成 H 的一个流形 N，其中 θ 为空间 H_1 中的零元。以后将用 θ 表示相应各空间中的零元。

许多集中参数或分布参数系统的最优控制问题均可以归结成下述的 Hilbert 空间中的极值问题。求点 $x^*\in N$，使对于 x^* 的某个邻域内的 N 的所有点 x 均成立不等式

$$f(x)\geqslant f(x^*).$$

称 $f(\cdot)$ 为目标泛函，(1.1)为约束方程，N 为约束流形。N 中的点称作能行点。可将上述问题简写成

$$\min\{f(x)\,|\,\varphi(x)=\theta\}. \tag{1.2}$$

* 1981 年 6 月 29 日收到。

点 x^* 称作问题(1.2)的局部解.

为了确定 $f(\cdot)$ 在流形 N 上的极小值点，许多数值方法均要沿着 N 进行寻找. 但是在一般的情形，为确定流形 N 上的一个点就需要大量的计算. 因此，为了实现这些算法，需要对流形 N 进行有效的处理. 另一方面，为了将无约束的算法推广到具约束的问题(1.2)，也需要建立 N 的有效表示. 在[4]中，我们摘要地报导了对有限维空间中的曲面的一些处理. 本文将这些结果进行改进，并将其推广到 Hilbert 空间的情形. 使它成为在 Hilbert 空间中构造算法和实现算法的依据. 在这一节，定义并构造流形 N 的恢复算子. 在 §2 中利用恢复算子构造性地建立流形 N 的局部参数表示. 由它可以将具约束的问题(1.2)转换成局部无约束问题. 在 §3 中构造了流形 N 的一类近似曲线，利用它可将通常的直线寻找改换成曲线寻找，为算法的实现提供依据. §4 给出一个简单的应用.

通常精确地确定流形 N 是困难的. 可以先构造与 N 有一定近似程度，而又容易计算确定的近似流形，然后在这近似流形上进行寻找. 当然，这样得到的点不一定在流形 N 上，可以通过 N 的恢复算子将其恢复到 N 上去.

所谓流形 N 的恢复算子 $R(\cdot)$ 是指由含 N 的一个区域 $D\subset H$ 到 H 中的一个映象，使得若 $x_0\in D$，则由迭代

$$x_{i+1}=R(x_i),\quad i=0,1,\cdots$$

构造的序列 $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ 将收敛到流形 N 上的点.

下面来构造流形 N 的一个恢复算子. 设映象 $\varphi(\cdot)$ 为 Fréchet 可微分，$\varphi'(x)$ 是在 x 处的导算子. 若点 $x\in H$ 使 $\varphi'(x)$ 将空间 H 映射到整个 H_1 上，称 x 为映象 $\varphi(\cdot)$ 的正常点，并称 $\varphi'(x)$ 是非奇的. 令 $T_0(x)$ 为满足

$$\varphi'(x)h=\theta$$

的所有元 $h\in H$ 组成的集合，则 $T_0(x)$ 为 H 的一个子空间，称作映象 $\varphi(\cdot)$ 在 x 处的切子空间. 令 $T_1(x)$ 为 $T_0(x)$ 在空间 H 中的正交补. 若线性算子 $\varphi'(x)$ 是非奇的，则它将 $T_1(x)$ 一一映射到整个空间 H_1 上. 这时若令 $\varphi'(x)^*$ 是 $\varphi'(x)$ 的伴随算子，则它将 H_1 一一映射到整个 $T_1(x)$ 上. 这表示算子 $\varphi'(x)\varphi'(x)^*$ 有逆算子 $[\varphi'(x)\varphi'(x)^*]^{-1}$. 若限制在 $T_1(x)$ 上考虑，则算子 $\varphi'(x)^*\varphi'(x)$ 也有逆算子 $[\varphi'(x)^*\varphi'(x)]^{-1}$.

作下面的假定.

假定1.1 对映象 $\varphi(\cdot)$ 设下列条件成立:

1° 对于正数 ε_φ，在含集合 $D=\{x\mid\|\varphi(x)\|\leqslant\varepsilon_\varphi\}$ 的空间 H 的一个凸域 D_c 中，映象 $\varphi(\cdot)$ 具有有界连续的一阶和二阶 Fréchet 导算子 $\varphi'(\cdot)$ 和 $\varphi''(\cdot)$，它们的范数在 D_c 上的界分别为 $N_{\varphi 1}$ 和 $N_{\varphi 2}$.

2° 二阶导算子 $\varphi''(\cdot)$ 在 D_c 上满足常数为 L_φ 的 Lipschitz 条件.

3° D_c 中的元 x 均是映象 $\varphi(\cdot)$ 的正常点，并且存在正数 β，使对所有 $x\in D_c$，逆算子 $[\varphi'(x)\varphi'(x)^*]^{-1}$ 和 $[\varphi'(x)^*\varphi'(x)]^{-1}$ 均有估计

$$\|[\varphi'(x)\varphi'(x)^*]^{-1}\|\leqslant\beta,\quad\|[\varphi'(x)^*\varphi'(x)]^{-1}\leqslant\beta.$$

构造恢复算子实际上是要构造一个从任意点 $x_0\in D$ 开始的求满足方程(1.1)的点 x 的迭代程序. 假设已求得点 x_i，并且 $\varphi(x_i)\neq\theta$. 现在要求校正量 $h\in H$，使有 $\varphi(x_i+h)=\theta$. 应用牛顿法的推导思想，将其线性化，得方程

$$\varphi(x_i+h)\approx\varphi(x_i)+\varphi'(x_i)h=\theta. \tag{1.3}$$

取(1.3)中的 h 具有形式

$$h=\varphi'(x_i)^*g, \tag{1.4}$$

其中 $g\in H_1$，代入方程(1.3)，解得

$$g=-[\varphi'(x_i)\varphi'(x_i)^*]^{-1}\varphi(x_i),$$

则

$$h=-\varphi'(x_i)^*[\varphi'(x_i)\varphi'(x_i)^*]^{-1}\varphi(x_i).$$

令

$$x_{i+1}=x_i+h=x_i-\varphi'(x_i)^*[\varphi'(x_i)\varphi'(x_i)^*]^{-1}\varphi(x_i). \tag{1.5}$$

仿照[2]中对牛顿法的证明，在适当条件下，程序(1.5)构造的序列 $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ 确实收敛到 N 上的点. 因此可以取流形 N 的一个恢复算子 $R(\cdot)$ 为

$$R(x)=x-\varphi'(x)^*[\varphi'(x)\varphi'(x)^*]^{-1}\varphi(x). \tag{1.6}$$

若 h 不取形式(1.4)，还可以建立其它形式的恢复算子. 例如，若将 h 选成有形式

$$h=A(x)\varphi'(x)^*g, \tag{1.7}$$

其中 $A(x)$ 是在 $T_1(x)$ 上为正定的空间 H 的自伴线性算子，则我们可导出形式为

$$R(x)=x-A(x)\varphi'(x)^*[\varphi'(x)A(x)\varphi'(x)^*]^{-1}\varphi(x) \tag{1.8}$$

的恢复算子.

在实际计算中，若使用恢复迭代(1.5)，必须对每个 x_i 计算 $\varphi'(x_i)$，$\varphi'(x_i)^*$ 及有关的逆，计算量可能是很大的. 可以选取一个不依赖于 x_i 的由 H_1 到 H 中的线性映象 G 来代替(1.5)中的映象 $\varphi'(x_i)^*[\varphi'x_i)\varphi'(x_i)^*]^{-1}$，构造迭代

$$x_{i+1}=x_i-G\varphi(x_i). \tag{1.9}$$

例如取映象 G 为

$$G=\varphi'(\bar{x})^*[\varphi'(\bar{x})\varphi'(\bar{x})^*]^{-1}=G(\bar{x}), \tag{1.10}$$

其中 $\bar{x}$ 是 D 中的某个元. 这时若记

$$R(x;\bar{x})=x-\varphi'(\bar{x})^*[\varphi'(\bar{x})\varphi'(\bar{x})^*]^{-1}\varphi(x), \tag{1.11}$$

则迭代(1.9)(1.10)可记成

$$x_{i+1}=R(x_i;\bar{x}). \tag{1.12}$$

这一节的其余部分证明下面的定理，它建立了迭代(1.12)的收敛性和收敛速度.

定理1.2 设假定1.1成立，并且凸域 D_c 含有 D 的 $N_{\varphi1}\beta\varepsilon_\varphi$ 邻域. 任意选定大于 $N_{\varphi2}N_{\varphi1}\beta$ 的正数 A_0. 令 $A=\min\left\{\dfrac{A_0-N_{\varphi2}N_{\varphi1}\beta}{A_0^2},\ \dfrac{1}{A_0}\right\}$，则当初值 $x_0\in D$ 和点 $\bar{x}\in D_c$ 满足不等式

$$N_{\varphi1}\beta\|\varphi(x_0)\|+\|x_0-\bar{x}\|<A \tag{1.13}$$

时，由迭代(1.12)构造的序列 $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ 收敛，其极限点 $x^*\in N$，并且成立估计式

$$\|x_i - x^*\| \leqslant \frac{N_{\varphi 1}\beta}{1-q(x_0,\bar{x})}\|\varphi(x_i)\| \tag{1.14}$$

和

$$\|\varphi(x_i)\| \leqslant q^i(x_0,\bar{x})\|\varphi(x_0)\|, \tag{1.15}$$

其中

$$q(x_0,\bar{x}) = \frac{N_{\varphi 2}N_{\varphi 1}\beta[N_{\varphi 1}\beta\|\varphi(x_0)\| + \|x_0-\bar{x}\|]}{1-A_0[N_{\varphi 1}\beta\|\varphi(x_0)\| + \|x_0-\bar{x}\|]}. \tag{1.16}$$

证明 由不等式(1.13)和 A 的取法，有

$$\frac{N_{\varphi 2}N_{\varphi 1}\beta}{1-A_0[N_{\varphi 1}\beta\|\varphi(x_0)\| + \|x_0-\bar{x}\|]} \leqslant A_0. \tag{1.17}$$

两边乘 $N_{\varphi 1}\beta\|\varphi(x_0)\| + \|x_0-\bar{x}\|$，得

$$q(x_0,\bar{x}) \leqslant A_0[N_{\varphi 1}\beta\|\varphi(x_0)\| + \|x_0-\bar{x}\|] < 1. \tag{1.18}$$

由假定 1.1 和 $G(\bar{x})$ 的定义(1.10)，立即可得估计

$$\|G(\bar{x})\| \leqslant N_{\varphi 1}\beta. \tag{1.19}$$

于是有

$$\|x_1 - x_0\| \leqslant N_{\varphi 1}\beta\|\varphi(x_0)\| \leqslant N_{\varphi 1}\beta\varepsilon_\varphi, \tag{1.20}$$

即有 $x_1\in D_c$. 由迭代(1.12)，

$$\begin{aligned}\varphi(x_1) &= \varphi(x_1) - \varphi(x_0) - \varphi'(\bar{x})(x_1-x_0)\\ &= \int_0^1 [\varphi'(x_0+t(x_1-x_0)) - \varphi'(\bar{x})](x_1-x_0)dt.\end{aligned}$$

于是由假定 1.1 得估计式

$$\begin{aligned}\|\varphi(x_1)\| &\leqslant N_{\varphi 2}[\|x_1-x_0\| + \|x_0-\bar{x}\|]\|x_1-x_0\|\\ &\leqslant N_{\varphi 2}N_{\varphi 1}\beta[N_{\varphi 1}\beta\|\varphi(x_0)\| + \|x_0-\bar{x}\|]\|\varphi(x_0)\|\\ &< q(x_0,\bar{x})\|\varphi(x_0)\|,\end{aligned} \tag{1.21}$$

所以 $x_1\in D$，$x_2\in D_c$. 由(1.21)的第二个不等号及(1. 0)，

$$\begin{aligned}\|x_2 - x_1\| &\leqslant N_{\varphi 2}N_{\varphi 1}\beta[N_{\varphi 1}\beta\|\varphi(x_0)\| + \|x_0-\bar{x}\|]\|x_1-x_0\|\\ &< q(x_0,\bar{x})\|x_1-x_0\|.\end{aligned} \tag{1.22}$$

应用归纳法. 假定对所有满足 $0<i<j$ 的整数 i 已证得估计式(1.15)和

$$\|x_{i+1}-x_i\| < q(x_0,\bar{x})\|x_i - x_{i-1}\|, \tag{1.23}$$

于是对所有 $0\leqslant i\leqslant j$ 的 i 均有 $x_i\in D_c$. 由归纳假定，(1.16)和(1.18)，类似于估计式(1.21)，得到

$$\begin{aligned}\|\varphi(x_j)\| &= \|\varphi(x_j)-\varphi(x_{j-1})-\varphi'(\bar{x})(x_j-x_{j-1})\| \\ &\leqslant \int_0^1 \|\varphi'(x_{j-1}+t(x_j-x_{j-1}))-\varphi'(\bar{x})\|dt\|x_j-x_{j-1}\| \\ &\leqslant N_{\varphi 2}\left[\sum_{i=0}^{j-1}\|x_{i+1}-x_i\|+\|x_0-\bar{x}\|\right]\|x_j-x_{j-1}\| \\ &\leqslant N_{\varphi 2}\left[\left(\sum_{i=0}^{j-1}q^i(x_0,\bar{x})\right)\|x_1-x_0\|+\|x_0-\bar{x}\|\right]\|x_j-x_{j-1}\| \\ &\leqslant \frac{N_{\varphi 2}[\|x_1-x_0\|+\|x_0-\bar{x}\|]}{1-q(x_0,\bar{x})}\|x_j-x_{j-1}\| \\ &\leqslant q^{j-1}(x_0,\bar{x})\frac{N_{\varphi 2}[\|x_1-x_0\|+\|x_0-\bar{x}\|]}{1-q(x_0,\bar{x})}\|x_1-x_0\| \\ &< q^j(x_0,\bar{x})\|\varphi(x_0)\|. \end{aligned} \tag{1.24}$$

所以有 $x_j\in D$ 和 $x_{j+1}\in D_{\xi}$. 应用(1.24)的最后第三个不等式，得

$$\begin{aligned}\|x_{j+1}-x_j\| &\leqslant N_{\varphi 1}\beta\|\varphi(x_j)\| \\ &\leqslant \frac{N_{\varphi 2}N_{\varphi 1}\beta[\|x_1-x_0\|+\|x_0-\bar{x}\|]}{1-q(x_0,\bar{x})}\|x_j-x_{j-1}\| \\ &< q(x_0,\bar{x})\|x_j-x_{j-1}\|. \end{aligned} \tag{1.25}$$

由压缩映象原理，立即可得定理的结论.

§2　流形的局部参数化

由定理 1.2, (1.11)定义的映象 $R(\cdot;\cdot)$是流形N的一种恢复算子. 这一节利用它来构造性地建立流形N的局部参数表示，并且讨论这种表示的一些性质.

设 x^0 是流形N上的任意点. 令流形N在 x^0 点的线性切向流形为集合

$$T_{x^0}=\{x^0+h\,|\,h\in T_0(x^0)\}, \tag{2.1}$$

其中 $T_0(x^0)$是映象 $\varphi(\cdot)$在 x^0 处的切子空间. 在子空间 $T_0(x^0)$ 中取完全法正交组 $e_1(x^0),e_2(x^0),\cdots$, 则 T_{x^0} 中的任何元 x 可表示成

$$\begin{aligned}x=x_0(\mu;x^0)&=x^0+\mu^1e_1(x^0)+\mu^2e_2(x^0)+\cdots \\ &=x^0+E(x^0)\mu,\end{aligned} \tag{2.2}$$

其中 $\mu=(\mu^1,\mu^2,\cdots)$是某个 Hilbert 空间 $l_0(x^0)$ 中的元，$E(x^0)$是由 $l_0(x^0)$到 $T_0(x^0)$ 上的线性算子. 在 $l_0(x^0)$中的内积定义成：对于任何 $\mu_1,\mu_2\in l_0(x^0)$，有

$$\langle\mu_1,\mu_2\rangle=\langle E(x^0)\mu_1,E(x^0)\mu_2\rangle. \tag{2.3}$$

在本文中，我们将用$\langle\cdot,\cdot\rangle$泛指 Hilbert 空间中的内积. μ 称作 $T_0(x^0)$ 中点的参数，而 $l_0(x^0)$ 称作参数空间.

由假定1.1，容易证明，若$\mu\in l_0(x^0)$满足$\frac{1}{2}N_{\varphi 2}\|\mu\|^2\leqslant\varepsilon_\varphi$，则点$x_0(\mu, x^0)\in D$，并且有估计式

$$\|\varphi(x_0(\mu,x^0))\|\leqslant\frac{1}{2}N_{\varphi 2}\|\mu\|^2. \tag{2.4}$$

事实上，对于这样的μ，有

$$\begin{aligned}\varphi(x_0(\mu,x^0))&=\varphi(x^0+E(x^0)\mu)-\varphi(x^0)-\varphi'(x^0)E(x^0)\mu\\&=\int_0^1[\varphi'(x^0+tE(x^0)\mu)-\varphi'(x^0)]E(x^0)\mu dt.\end{aligned} \tag{2.5}$$

再进行估计，即得(2.4)．在迭代(1.12)中，选取$\bar{x}=x^0$，$x_0=x_0(\mu,x^0)$，则从$x_0(\mu,x^0)$出发，得到迭代

$$x_{i+1}(\mu;x^0)=R(x_i(\mu,x^0);x^0). \tag{2.6}$$

由定理1.2，立即得到下面的定理．

定理2.1 设定理1.2的条件成立．令

$$D_\mu=\left\{\mu\in l_0(x^0)\left|\frac{1}{2}N_{\sigma 2}\|\mu\|^2\leqslant\varepsilon_\varphi,\frac{1}{2}N_{\varphi 2}N_{\varphi 1}\beta\|\mu\|^2+\|\mu\|<A\right.\right\}. \tag{2.7}$$

则当$\mu\in D_\mu$时，由(2.6)构造的序列$\{x_i(\mu,x^0)\}_{i=0}^\infty$收敛到$N$上的点．记这极限点为$x(\mu,x^0)$，则成立估计式

$$\|x_i(\mu,x^0)-x(\mu,x^0)\|\leqslant\frac{N_{\varphi 1}\beta}{1-q(\mu)}\|\varphi(x_0(\mu,x^0))\| \tag{2.8}$$

和

$$\|\varphi(x_i(\mu,x^0))\|\leqslant\frac{N_{\varphi 2}}{2}q^i(\mu)\|\mu\|^2, \tag{2.9}$$

其中

$$q=q(\mu)=\frac{N_{\varphi 2}\ N_{\varphi 1}\beta\left[\frac{1}{2}N_{\varphi 2}N_{\varphi 1}\beta\|\mu\|^2+\|\mu\|\right]}{1-A_0\left[\frac{1}{2}N_{\varphi 2}N_{\varphi 1}\beta\|\mu\|^2+\|\mu\|\right]}. \tag{2.10}$$

定理2.1中的$x(\mu,x^0)$定义了由空间$l_0(x^0)$中的集合D_μ到流形N中的一个映象．下面的定理2.2将给出映象$x(\mu,x^0)$的微分性质．为书写简单起见．在不引起混淆时将省去$x_i(\mu,x^0)$，$x(\mu,x^0)$中的变量x^0，而简记成$x_i(\mu)$，$x(\mu)$．为叙述定理2.2，先引进一些记号．

$$q_0=N_{\varphi 2}N_{\varphi 1}\beta, \tag{2.11}$$

$$q_1=q_1(\mu)=q_0\left[\frac{1}{2}\frac{q_0}{1-q}\|\mu\|^2+\|\mu\|\right], \tag{2.12}$$

$$A_{10}=A_{10}(\mu)=\frac{1}{2}q_0\|\mu\|^2, \tag{2.13}$$

$$A_{11}=A_{11}(\mu)=q_0\|\mu\|, \tag{2.14}$$

$$B_1 = B_1(\mu) = \left(\frac{A_{11}}{1-q_1}+1\right) \Big/ \left[1-\frac{q_0 A_{10}}{(1-q_1)(1-q)}\right], \tag{2.15}$$

$$B_2 = B_2(\mu) = \left[\frac{q_0}{1-q_1}+\frac{2q_0 B_1 A_{11}}{(1-q_1)^2}+\left(\frac{L_\varphi N_{\varphi 1}\beta B_1^2}{(1-q_1)(1-q)}+\frac{2q_0^2 B_1^2}{(1-q_1)^2(1-q)}\right)A_{10}\right]$$

$$\cdot\left[1-\frac{q_0 A_{10}}{(1-q_1)(1-q)}\right]^{-1}, \tag{2.16}$$

$$Q_{1i} = Q_{1i}(\mu) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-q_1)(1-q)}, & i=0,1, \\ \dfrac{1}{(1-q_1)(1-q)}\left[\displaystyle\sum_{j=1}^{i} q_1^{i-j}q^{j-1} - q_1 q \sum_{j=1}^{i-1} q_1^{i-j-1}q^{j-1}\right], & i>1, \end{cases} \tag{2.17}$$

$$Q_{2i} = Q_{2i}(\mu) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-q_1)^2}, & i=0, \\ \left[\dfrac{i-1}{1-q_1}+\dfrac{1}{(1-q_1)^2}\right]q_1^{i-1}, & i>0, \end{cases} \tag{2.18}$$

$$Q_{3i} = Q_{3i}(\mu) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-q_1)^2(1-q)}, & i=0,1,2, \\ \dfrac{1}{1-q_1}\displaystyle\sum_{j=2}^{i-1}(i-j)q_1^{i-j}q^{j-2} + \dfrac{1}{(1-q_1)^2}\sum_{j=2}^{i-1} q_1^{i-j}q^{j-2} \\ \quad + \dfrac{q^{i-2}}{(1-q_1)^2(1-q)}, & i>2, \end{cases} \tag{2,19}$$

$$L_x = L_x(\mu) = \frac{1}{1-q_1}\left[3N_{\varphi 2}N_{\varphi 1}\beta B_1 B_2 + L_\varphi N_{\varphi 1}\beta B_1^3\right], \tag{2.20}$$

$$D_{\mu 1} = D_\mu \cap \left\{\mu \in l_0(x^0) \,\middle|\, q_1(\mu)<1, \frac{q_0 A_{10}(\mu)}{(1-q_1(\mu))(1-q(\mu))}<1\right\}. \tag{2.21}$$

定理2.2 设定理 2.1 的条件成立，则当$\mu \in D_{\mu 1}$时，映象 $x(\cdot, x^0)$在μ处二阶 Fréchet 可微，序列$\left\{\dfrac{\partial x_i(\mu)}{\partial \mu}\right\}_{i=0}^{\infty}$和$\left\{\dfrac{\partial^2 x_i(\mu)}{\partial\mu\partial\mu}\right\}_{i=0}^{\infty}$分别收敛到$\dfrac{\partial x(\mu, x^0)}{\partial \mu}$和$\dfrac{\partial^2 x(\mu, x^0)}{\partial\mu\partial\mu}$，并且有估计式

$$\left\|\frac{\partial x(\mu, x^0)}{\partial \mu}-\frac{\partial x_i(\mu)}{\partial \mu}\right\| \leqslant \frac{q_1^i}{1-q_1}\left\|\frac{\partial x_1(\mu)}{\partial \mu}-\frac{\partial x_0(\mu)}{\partial \mu}\right\|$$

$$+q_0 B_1 Q_{1i}\|x_1(\mu)-x_0(\mu)\|, \tag{2.22}$$

$$\left\|\frac{\partial^2 x(\mu, x^0)}{\partial\mu\partial\mu}-\frac{\partial^2 x_i(\mu)}{\partial\mu\partial\mu}\right\| \leqslant \frac{q_1^i}{1-q_1}\left\|\frac{\partial^2 x_1(\mu)}{\partial\mu\partial\mu}-\frac{\partial^2 x_0(\mu)}{\partial\mu\partial\mu}\right\| + 2q_0 B_1 Q_{2i}\cdot$$

$$\left\|\frac{\partial x_1(\mu)}{\partial \mu}-\frac{\partial x_0(\mu)}{\partial \mu}\right\| + [q_0 B_2 Q_{1i} + L_\varphi N_{\varphi 1}\beta B_1^2 Q_{1i} + 2q_0^2 B_1^2 Q_{3i}]\|x_1(\mu)-x_0(\mu)\|. \tag{2.23}$$

对任意固定的$\mu^*\in D_{\mu 1}$，映象$x(\cdot,x^0)$的二阶Fréchet导算子$\frac{\partial^2 x(\cdot,x^0)}{\partial\mu\partial\mu}$对于$\|\mu\|\leqslant\|\mu^*\|$满足常数为$L_x(\mu^*)$的Lipschitz条件，即对任意的$\|\mu_1\|\leqslant\|\mu^*\|$ $\|\mu_2\|\leqslant\|\mu^*\|$有

$$\left\|\frac{\partial^2 x(\mu_1,x^0)}{\partial\mu\partial\mu}-\frac{\partial^2 x(\mu_2,x^0)}{\partial\mu\partial\mu}\right\|\leqslant L_x(\mu^*)\|\mu_1-\mu_2\|. \tag{2.24}$$

证明 由（2.6）式对μ求Frèchet导算子，得

$$\frac{\partial x_{i+1}(\mu)}{\partial\mu}=\frac{\partial x_i(\mu)}{\partial\mu}-G(x^0)\varphi'(x_i(\mu))\frac{\partial x_i(\mu)}{\partial\mu}. \tag{2.25}$$

将相邻二个i的式子（2.25）相减，有

$$\frac{\partial x_{i+1}(\mu)}{\partial\mu}-\frac{\partial x_i(\mu)}{\partial\mu}=\frac{\partial x_i(\mu)}{\partial\mu}-\frac{\partial x_{i-1}(\mu)}{\partial\mu}-G(x^0)\varphi'(x_i(\mu))$$

$$\cdot\left[\frac{\partial x_i(\mu)}{\partial\mu}-\frac{\partial x_{i-1}(\mu)}{\partial\mu}\right]-G(x^0)[\varphi'(x_i(\mu))-\varphi'(x_{i-1}(\mu))]\frac{\partial x_{i-1}(\mu)}{\partial\mu}. \tag{2.26}$$

由于$G(x^0)=\varphi'(x^0)^*[\varphi'(x^0)\varphi'(x^0)^*]^{-1}$是由$H_1$到$T_1(x^0)$上的线性映象，迭代(2.6)只改变$x_i(\mu)$的属于$T_1(x^0)$中的部分。因此$x_{i+1}(\mu)-x_i(\mu)\in T_1(x^0)$和$\frac{\partial x_i(\mu)}{\partial\mu}-\frac{\partial x_{i-1}(\mu)}{\partial\mu}$是由$l_0(x^0)$到$T_1(x^0)$中的线性算子。利用在$T_1(x^0)$上$G(x^0)$是$\varphi'(x^0)$的左逆，由(2.26)得

$$\frac{\partial x_{i+1}(\mu)}{\partial\mu}-\frac{\partial x_i(\mu)}{\partial\mu}=-G(x^0)[\varphi'(x_i(\mu))-\varphi'(x^0)]\left[\frac{\partial x_i(\mu)}{\partial\mu}-\frac{\partial x_{i-1}(\mu)}{\partial\mu}\right]$$

$$-G(x^0)[\varphi'(x_i(\mu))-\varphi'(x_{i-1}(\mu))]\frac{\partial x_{i-1}(\mu)}{\partial\mu}. \tag{2.27}$$

应用假定1.1，得到递推式

$$\left\|\frac{\partial x_{i+1}(\mu)}{\partial\mu}-\frac{\partial x_i(\mu)}{\partial\mu}\right\|\leqslant N_{\varphi2}N_{\varphi1}\beta\|x_i(\mu)-x^0\|\left\|\frac{\partial x_i(\mu)}{\partial\mu}-\frac{\partial x_{i-1}(\mu)}{\partial\mu}\right\|$$

$$+N_{\varphi2}N_{\varphi1}\beta\left\|\frac{\partial x_{i-1}(\mu)}{\partial\mu}\right\|\|x_i(\mu)-x_{i-1}(\mu)\|. \tag{2.28}$$

由假定1.1和定理2.1，有

$$\|x_i(\mu)-x^0\|\leqslant\|x_i(\mu)-x_0(\mu)\|+\|x_0(\mu)-x^0\|\leqslant\frac{1}{2}\frac{N_{\varphi2}N_{\varphi1}\beta}{1-q}\|\mu\|^2+\|\mu\|. \tag{2.29}$$

由(2.28)（2.29）得

$$\left\|\frac{\partial x_{i+1}(\mu)}{\partial\mu}-\frac{\partial x_i(\mu)}{\partial\mu}\right\|\leqslant q_1\left\|\frac{\partial x_i(\mu)}{\partial\mu}-\frac{\partial x_{i-1}(\mu)}{\partial\mu}\right\|+N_{\varphi2}N_{\varphi1}\beta$$

$$\cdot\left\|\frac{\partial x_{i-1}(\mu)}{\partial\mu}\right\|\|x_i(\mu)-x_{i-1}(\mu)\|. \tag{2.30}$$

利用估计式

$$\left\|\frac{\partial x_1(\mu)}{\partial\mu}-\frac{\partial x_0(\mu)}{\partial\mu}\right\|\leqslant A_{11}(\mu), \tag{2.31}$$

$$\|x_1(\mu)-x_0(\mu)\|\leqslant A_{10}(\mu), \tag{2.32}$$

及(2.15)，通过归纳法，可证得对 $i=1,2,\cdots$ 有

$$\left\|\frac{\partial x_i(\mu)}{\partial\mu}\right\|\leqslant 1+(1+q_1+\cdots+q_1^{i-1})\left\|\frac{\partial x_1(\mu)}{\partial\mu}-\frac{\partial x_0(\mu)}{\partial\mu}\right\|$$

$$+\frac{q_0B_1}{q_1-q}\left[(1+q_1+\cdots+q_1^{i-1})-(1+q+\cdots+q^{i-1})\right]\|x_1(\mu)-x_0(\mu)\|$$

$$\leqslant 1+\frac{A_{11}}{1-q_1}+\frac{q_0A_{10}}{(1-q_1)(1-q)}B_1=B_1 \tag{2.33}$$

和

$$\left\|\frac{\partial x_{i+1}(\mu)}{\partial\mu}-\frac{\partial x_i(\mu)}{\partial\mu}\right\|\leqslant q_1^i\left\|\frac{\partial x_1(\mu)}{\partial\mu}-\frac{\partial x_0(\mu)}{\partial\mu}\right\|$$

$$+q_0B_1Q_{1i}\|x_1(\mu)-x_0(\mu)\|. \tag{2.34}$$

由此立即可得序列 $\left\{\frac{\partial x_i(\mu)}{\partial\mu}\right\}_{i=0}^{\infty}$ 的收敛性．由(2.34)式可推出：若 $\mu_1\in D_{\mu 1}$，则当 $\|\mu\|\leqslant\|\mu_1\|$ 时，这种收敛性是一致的．于是映象 $x(\cdot,x^0)$ 对 $D_{\mu 1}$ 中的 μ Fréchet 可微，并有估计式(2.22)．

对(2.25)的 μ 求 Fréchet 导数，得

$$\frac{\partial^2 x_{i+1}(\mu)}{\partial\mu\partial\mu}=\frac{\partial^2 x_i(\mu)}{\partial\mu\partial\mu}-G(x^0)\varphi'(x_i(\mu))\frac{\partial^2 x_i(\mu)}{\partial\mu\partial\mu}-G(x^0)\varphi''(x_i(\mu))$$

$$\cdot\frac{\partial x_i(\mu)}{\partial\mu}\frac{\partial x_i(\mu)}{\partial\mu}. \tag{2.35}$$

将相邻二个 i 得到的公式相减，并进行与一阶导数相同的处理，有

$$\frac{\partial^2{}_{i+1}(\mu)}{\partial\mu\partial\mu}-\frac{\partial^2 x_i(\mu)}{\partial\mu\partial\mu}=-G(x^0)[\varphi'(x_i(\mu))-\varphi'(x^0)]\left[\frac{\partial^2 x_i(\mu)}{\partial\mu\partial\mu}-\frac{\partial^2 x_{i-1}(\mu)}{\partial\mu\partial\mu}\right]$$

$$-G(x^0)[\varphi'(x_i(\mu))-\varphi'(x_{i-1}(\mu))]\frac{\partial^2 x_{i-1}(\mu)}{\partial\mu\partial\mu}$$

$$-G(x^0)[\varphi''(x_i(\mu))-\varphi''(x_{i-1}(\mu))]\frac{\partial x_i(\mu)}{\partial\mu}\frac{\partial x_i(\mu)}{\partial\mu}$$

$$-G(x^0)\varphi''(x_{i-1}(\mu))\left[\frac{\partial x_i(\mu)}{\partial\mu}\frac{\partial x_i(\mu)}{\partial\mu}-\frac{\partial x_{i-1}(\mu)}{\partial\mu}\frac{\partial x_{i-1}(\mu)}{\partial\mu}\right] \tag{2.36}$$

由假定1.1，定理2.1及上面证明的结果，得估计

$$\left\|\frac{\partial^2 x_{i+1}(\mu)}{\partial\mu\partial\mu}-\frac{\partial^2 x_i(\mu)}{\partial\mu\partial\mu}\right\|\leqslant q_1\left\|\frac{\partial^2 x_i(\mu)}{\partial\mu\partial\mu}-\frac{\partial^2 x_{i-1}(\mu)}{\partial\mu\partial\mu}\right\|+N_{\varphi 2}N_{\varphi 1}\beta\left\|\frac{\partial^2 x_{i-1}(\mu)}{\partial\mu\partial\mu}\right\|\|x_i(\mu)-x_{i-1}(\mu)\|+L_\varphi N_{\varphi 1}\beta B_1^2\|x_i(\mu)-x_{i-1}(\mu)\|+2N_{\varphi 2}N_{\varphi 1}\beta B_1\left\|\frac{\partial x_i(\mu)}{\partial\mu}-\frac{\partial x_{i-1}(\mu)}{\partial\mu}\right\|. \quad (2.37)$$

再利用估计

$$\left\|\frac{\partial^2 x_1(\mu)}{\partial\mu\partial\mu}-\frac{\partial^2 x_0(\mu)}{\partial\mu\partial\mu}\right\|\leqslant q_0, \quad (2.38)$$

通过归纳法，对 $i=0,1,\cdots$ 得

$$\left\|\frac{\partial^2 x_i(\mu)}{\partial\mu\partial\mu}\right\|\leqslant B_2(\mu), \quad (2.39)$$

$$\left\|\frac{\partial^2 x_{i+1}(\mu)}{\partial\mu\partial\mu}-\frac{\partial^2 x_i(\mu)}{\partial\mu\partial\mu}\right\|\leqslant q_1^i\left\|\frac{\partial^2 x_1(\mu)}{\partial\mu\partial\mu}-\frac{\partial^2 x_0(\mu)}{\partial\mu\partial\mu}\right\|+2iq_0B_1q_1^{i-1}\cdot\left\|\frac{\partial x_1(\mu)}{\partial\mu}-\frac{\partial x_0(\mu)}{\partial\mu}\right\|+\left\{(q_0B_2+L_\varphi N_{\varphi 1}\beta B_1^2)\sum_{j=1}^{i}q_1^{i-j}q^{j-1}+2q_0^2B_1^2\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j}q_1^{i-k}\cdot q^{k-1}\right\}\|x_1(\mu)-x_0(\mu)\|. \quad (2.40)$$

于是可推得映象 $x(\cdot,x^0)$ 对 $D_{\mu 1}$ 中的 μ 是二阶 Fréchet 可微，并有估计式(2.23)。

对于任意固定的 $\mu^*\in D_{\mu 1}$，将任意满足 $\|\mu_1\|\leqslant\|\mu^*\|$ 和 $\|\mu_2\|\leqslant\|\mu^*\|$ 的 μ_1，μ_2 代入(2.35)，相减并进行简单的运算，得

$$\frac{\partial^2 x_{i+1}(\mu_1)}{\partial\mu\partial\mu}-\frac{\partial^2 x_{i+1}(\mu_2)}{\partial\mu\partial\mu}=-G(x^0)[\varphi'(x_i(\mu_1))-\varphi'(x^0)]\left[\frac{\partial^2 x_i(\mu_1)}{\partial\mu\partial\mu}-\frac{\partial^2 x_i(\mu_2)}{\partial\mu\partial\mu}\right]-G(x^0)[\varphi'(x_i(\mu_1))-\varphi'(x_i(\mu_2))]\frac{\partial^2 x_i(\mu_2)}{\partial\mu\partial\mu}-G(x^0)[\varphi''(x_i(\mu_1))-\varphi''(x_i(\mu_2))]\frac{\partial x_i(\mu_1)}{\partial\mu}\frac{\partial x_i(\mu_1)}{\partial\mu}-G(x^0)[\varphi''(x_i(\mu_2))]\left[\frac{\partial x_i(\mu_1)}{\partial\mu}\frac{\partial x_i(\mu_1)}{\partial\mu}-\frac{\partial x_i(\mu_2)}{\partial\mu}\frac{\partial x_i(\mu_2)}{\partial\mu}\right]. \quad (2.41)$$

应用定理2.1及前面证明的结果，由(2.41)得到估计

$$\left\|\frac{\partial^2 x_{i+1}(\mu_1)}{\partial\mu\partial\mu}-\frac{\partial^2 x_{i+1}(\mu_2)}{\partial\mu\partial\mu}\right\|\leqslant q_1(\mu^*)\left\|\frac{\partial^2 x_i(\mu_1)}{\partial\mu\partial\mu}-\frac{\partial^2 x_i(\mu_2)}{\partial\mu\partial\mu}\right\|+(3N_{\varphi 2}N_{\varphi 1}\beta B_1(\mu^*)B_2(\mu^*)+L_\varphi N_{\varphi 1}\beta B_1^3(\mu^*))\|\mu_1-\mu_2\|\leqslant q_1^i(\mu^*)\left\|\frac{\partial^2 x_1(\mu_1)}{\partial\mu\partial\mu}-\frac{\partial^2 x_1(\mu_2)}{\partial\mu\partial\mu}\right\|+\frac{1-q_1^i(\mu^*)}{1-q_1(\mu^*)}(3N_{\varphi 2}N_{\varphi 1}\beta B_1(\mu^*)B_2(\mu^*)+L_\varphi N_{\varphi 1}\beta B_1^3(\mu^*))\|\mu_1-\mu_2\|. \quad (2.42)$$

取极限，得估计式(2.24)．定理得证．

我们称在点 $x^0\in N$ 的一个 ε_{x^0} 邻域 $\delta(x^0,\varepsilon_{x^0})=\{x\,|\,\|x-x^0\|\leqslant\varepsilon_{x^0}\}$ 内，流形 N 可以以 x^0 为基点 μ 参数化，是指可以在 x^0 处按定理 2.1 的方式构造由 $l_0(x^0)$ 的集合到 H 中的映象 $x(\cdot,x^0)$，使得邻域 $\delta(x^0,\varepsilon_{x^0})$ 中流形 N 的每个点 x，均可找到唯一的 $\mu\in l_0(x^0)$，有

$$x=x(\mu,x^0).\tag{2.43}$$

称映象 $x(\cdot,x^0)$ 为流形 N 的 μ 参数化，而邻域 $\delta(x^0,\varepsilon_{x^0})$ 称为可 μ 参数化邻域．

利用隐函数定理[1]，可以证明下面的定理．

定理2.3　设假定1.1成立，则对流形 N 上的每个点 x^0，存在正数 ε_{x^0} 和由邻域 $\delta(x^0,\varepsilon_{x^0})$ 到 $l_0(x^0)$ 中的连续二阶 Fréchet 可微映象 $\mu(x)$，满足 $\mu(x^0)=\theta$ 和当 $x\in N\cap\delta(x^0,\varepsilon_{x^0})$ 时，有

$$x(\mu(x),x^0)=x,\tag{2.44}$$

即在邻域 $\delta(x^0,\varepsilon_{x^0})$ 内，流形 N 可以以 x^0 为基点 μ 参数化．

证明　设 x^0 是流形 N 上的任意点．除在 $T_0(x^0)$ 中取完全法正交组 $e_1(x^0),e_2(x^0),\cdots$ 外，再在 $T_1(x^0)$ 中取完全法正交组 $d_1(x^0),d_2(x^0),\cdots$ 则 $T_1(x^0)$ 中的任何点 x 可以表成

$$x=\xi^1d_1(x^0)+\xi^2d_2(x^0)+\cdots=D(x^0)\xi,\tag{2.45}$$

其中 $\xi=(\xi^1,\ \xi^2,\cdots)$ 是某个 Hilbert 空间 $l_1(x^0)$ 中的元，$D(x^0)$ 是由 $l_1(x^0)$ 到 $T_1(x^0)$ 中的线性算子．$l_1(x^0)$ 中的内积定义成：对于任何 $\xi_1,\xi_2\in l_1(x^0)$，有

$$\langle\xi_1,\xi_2\rangle=\langle D(x^0)\xi_1,\ D(x^0)\xi_2\rangle.\tag{2.46}$$

现在空间 H 中的任何元 x 可以表成

$$x=x^0+E(x^0)\eta+D(x^0)\xi=x_1(\eta,\xi),\ \ \eta\in l_0(x^0),\ \ \xi\in l_1(x^0).\tag{2.47}$$

将其代入 $\varphi(x)$，得到由 $l_0(x^0)\times l_1(x^0)$ 到 H_1 中的映象

$$\varphi_1(\eta,\xi)=\varphi(x_1(\eta,\xi)).\tag{2.48}$$

求 $\varphi_1(\eta,\xi)$ 对 ξ 的 Fréchet 导算子，得

$$\frac{\partial\varphi_1(\eta,\xi)}{\partial\xi}=\varphi'(x_1(\eta,\xi))D(x^0).$$

由定理的假定，线性算子 $\left.\frac{\partial\varphi_1(\eta,\xi)}{\partial\xi}\right|_{\eta=\theta,\xi=\theta}=\varphi'(x^0)D(x^0)$ 具有逆算子，并且 $\varphi_1(\theta,\theta)=\theta$．由隐函数定理，存在正数 τ_0,τ_1 和唯一的二阶 Fréchet 可微算子 $\psi(\cdot)$，使当 $\|\eta\|\leqslant\tau_0$ 和 $\|\xi\|\leqslant\tau_1$ 时，$\xi=\psi(\eta)$ 与方程

$$\varphi_1(\eta,\xi)=\theta\tag{2.49}$$

等价．这表示在 x^0 的充分小的邻域中，N 上的点 x 可唯一地表示成

$$x=x^0+E(x^0)\eta+D(x^0)\psi(\eta).\tag{2.50}$$

另一方面，如在以前指出的，迭代(2.6)只改变 $x_i(\mu)$ 的属于 $T_1(x^0)$ 中的部分．因此可将 $x(\mu,x^0)$ 表示成

$$x(\mu,x^0)=x^0+E(x^0)\mu+D(x^0)\xi(\mu),\tag{2.51}$$

其中 $\xi(\mu)$ 是由 $l_0(x^0)$ 的集合 $D_{\mu 1}$ 到 $l_1(x^0)$ 中的二阶 Fréchet 可微映象．并且由(2.8)，有估计

$$\|\xi(\mu)\| \leqslant \|x_0(\mu) - x(\mu, x^0)\| \leqslant \frac{1}{2}\frac{N_{\varphi 2}N_{\varphi 1}\beta}{1-q(\mu)}\|\mu\|^2. \tag{2.52}$$

因此，当 $\mu \in D_{\mu 1}$，且 $\|\mu\| \leqslant \tau_0$ 时，将有 $\xi(\mu) \equiv \psi(\mu)$．即在 x^0 的一个邻域 $\delta(x^0, \varepsilon_{x^0})$ 中 N 的点 x 可唯一地表示成(2.51)的形式．立即可得函数

$$\mu = E(x^0)^*(x - x^0) = \mu(x), \tag{2.53}$$

其中 $E(x^0)^*$ 是线性算子 $E(x^0)$ 的伴随算子．定理得证．

将 $x = x(\mu, x^0)$ 代入问题(1.2)中的函数 $f(x)$ 中，得到 μ 的函数 $F(\mu, x^0) = f(x(\mu, x^0))$．这时具约束的问题(1.2)转化成局部无约束的极小化问题

$$\min_{\mu \in l_0(x^0)} F(\mu, x^0). \tag{2.54}$$

通过问题 (2.54)的过渡，可以将许多无约束极小化算法移植来处理具约束的问题 (1.2)．另外，流形 N 的参数表示 $x(\mu, x^0)$ 是构造性地得到的．由 (2.6)得到的 $x_i(\mu, x^0)$ 是它的近似参数表示．若将 $x_i(\mu, x^0)$ 代入 $f(x)$，得到近似的局部无约束极小化问题

$$\min_{\mu \in l_0(x^0)} F_i(\mu, x^0), \tag{2.55}$$

其中 $F_i(\mu, x^0) = f(x_i(\mu, x^0))$．

上面构造参数表示 $x(\mu, x^0)$ 的思想是将 H 中的元 x 表示成 (2.47) 的形式，然后由方程(1.1)消去变量 ξ．这种思想与既约梯度法中的消元是类似的，但这里不需要选取基本变量和独立变量．利用这里的处理思想，也可以建立既约梯度算法中约束曲面的近似．

§3　流形的近似曲线

为了寻找流形上泛函的极小值点，许多算法需要沿着流形上的曲线进行寻找．要精确地实现这一点是有困难的，而且一般说来是不可能的．可以构造流形的近似曲线，先在这近似曲线上进行寻找，然后根据需要进行精确化．在这一节中，我们构造了一类近似曲线，研究了它的收敛性质，并且给出研究极小化算法时所需要的一些其它性质．

设 x_0 是空间 H 中的点．它不一定在流形 N 上，但离 N 有一定的精度．它与 N 的近似程度由量 $\|\varphi(x_0)\|$ 来度量．方向 $h \in H$ 满足 $\varphi'(x_0)h = \theta$．作直线

$$x^0(t) = x_0 + th. \tag{3.1}$$

它是流形 N 的最简单的近似曲线．为提高 $x^0(t)$ 的近似程度，我们用迭代(1.9)将其恢复一次，得曲线

$$x^1(t) = x^0(t) - G(x_0)\varphi(x^0(t)), \tag{3.2}$$

其中 $G(x)$ 由(1.10)给出．通常若量 $\|\varphi(x_0)\|$ 较小，曲线 $x^1(t)$ 可以满足我们的需要．但应用它来寻找是不方便的，因为需要计算大量的 $\varphi(x^0(t))$．我们设法将其简化，但仍能保持其适当的精度．

由于

$$\varphi(x^0(t)) = \varphi(x_0) + t^2\int_0^1 (1-\tau)\varphi''(x_0+\tau th)hhd\tau, \tag{3.3}$$

我们将其近似地表成

$$\varphi(x^0(t)) \approx \varphi(x_0) + a_\varphi t^2. \tag{3.4}$$

其中 $a_\varphi \in H_1$ 可以这样来确定．选取充分小的 $\tilde{t}>0$，计算 $\varphi(x^0(\tilde{t}))$，令

$$a_\varphi = \frac{1}{\tilde{t}^2}[\varphi(x^0(\tilde{t}) - \varphi(x_0)] = \int_0^1 (1-\tau)\varphi''(x_0+\tau\tilde{t}h)hhd\tau. \tag{3.5}$$

定义 $x^1(t)$ 的近似曲线为

$$x^{R0}(t) = x_0 - G(x_0)\varphi(x_0) + th + at^2, \tag{3.6}$$

其中 $a = -G(x_0)a_\varphi$．它与 $x^1(t)$ 之间的差为

$$x^{R0}(t) - x^1(t) = t^2\int_0^1 (1-\tau)G(x_0)[\varphi''(x_0+\tau th) - \varphi''(x_0+\tau\tilde{t}h)]hhd\tau. \tag{3.7}$$

利用假定 1.1，可得到估计

$$\|x^{R0}(t) - x^1(t)\| \leqslant \frac{1}{6}L_\varphi N_{\varphi 1}\beta\|th\|^2\|(t-\tilde{t})h\|. \tag{3.8}$$

对于量 $\varphi(x^{R0}(t))$，我们有下面的引理．

引理 3.1　设定理 1.2 的条件成立，则对于任意给定的满足

$$N_{\varphi 1}\beta\varepsilon_{\varphi 1} + \varepsilon_{h1} + \frac{1}{2}N_{\varphi 2}N_{\varphi 1}\beta\varepsilon_{h1}^2 \leqslant N_{\varphi 1}\beta\varepsilon_\varphi \tag{3.9}$$

的正数 $\varepsilon_{\varphi 1}$ 和 ε_{h1}，存在与 x_0 和 h 无关的正数 $A_{\varphi 0}, A_{\varphi 1}$ 和 $A_{\varphi 2}$，使当 x_0 和 th 满足 $\|\varphi(x_0)\| \leqslant \varepsilon_{\varphi 1}$ 和 $\|th\| \leqslant \varepsilon_{h1}$ 时，有估计

$$\|\varphi(x^{R0}(t))\| \leqslant A_{\varphi 0}[\|\varphi(x_0)\|^2 + \|\varphi(x_0)\|\|th\| + \|th\|^3 + \|th\|^2\|(t-\tilde{t})h\|] = E_0(x_0,h,t), \tag{3.10}$$

$$\left\|\frac{d\varphi(x^{R0}(t))}{dt}\right\| \leqslant A_{\varphi 1}[\|\varphi(x_0)\| + \|th\|^2 + \|th\|\|(t-\tilde{t})h\|]\|h\| = E_1(x_0,h,t), \tag{3.11}$$

$$\left\|\frac{d^2\varphi(x^{R0}(t))}{dt^2}\right\| \leqslant A_{\varphi 2}[\|\varphi(x_0)\| + \|th\| + \|(t-\tilde{t})h\|]\|h\|^2 = E_2(x_0,h,t). \tag{3.12}$$

证明　由定理的假定及条件 (3.9)，当 x_0 和 th 满足 $\|\varphi(x_0)\| \leqslant \varepsilon_{\varphi 1}$ 和 $\|th\| \leqslant \varepsilon_{h1}$ 时，$x^0(t)$，$x^1(t)$，$x^{R0}(t)$ 将都在凸域 D_c 中，可进行下述的估计．容易得到

$$\|x^1(t) - x^0(t)\| \leqslant N_{\varphi 1}\beta[\mu\|\varphi(x_0)\| + \frac{1}{2}N_{\varphi 2}\|th\|^2] \tag{3.13}$$

和

$$\begin{aligned}\|\varphi(x^1(t)\| &= \|\varphi(x^1(t)) - \varphi(x^0(t)) - \varphi^1(x_0)[x^1(t) - x^0(t)]\| \\ &\leqslant \int_0^1 \|[\varphi'(x^0(t) + \tau(x^1(t) - x^0(t))) - \varphi'(x_0)]\|\,\|x^1(t) - x^0(t)\|d\tau \\ &\leqslant N_{\varphi 2}[\|th\| + \frac{1}{2}\|x^1(t) - x^0(t)\|]\|x^1(t) - x^0(t)\|\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}N_{\varphi 2}N_{\varphi 1}^{2}\beta^{2}\|\varphi(x_0)\|^{2}+[N_{\varphi 2}N_{\varphi 1}\beta+\frac{1}{2}N_{\varphi 2}^{2}N_{\varphi 1}^{2}\beta^{2}\|th\|]\|\varphi(x_0)\|\|th\|$$

$$+\left[\frac{1}{2}N_{\varphi 2}^{2}N_{\varphi 1}\beta+\frac{1}{8}N_{\varphi 2}^{3}N_{\varphi 1}^{2}\beta^{2}\|th\|\right]\|th\|^{3}. \qquad (3.14)$$

由(3.8)和(3.14)，并令

$$A_{\varphi 0}=\max\left\{\frac{1}{2}N_{\varphi 2}N_{\varphi 1}^{2}\beta^{2},N_{\varphi 2}N_{\varphi 1}\beta+\frac{1}{2}N_{\varphi 2}^{2}N_{\varphi 1}^{2}\beta^{2}\varepsilon_{h1},\frac{1}{2}N_{\varphi 2}^{2}N_{\varphi 1}\beta+\right.$$

$$\left.\frac{1}{8}N_{\varphi 2}^{3}N_{\varphi 1}^{2}\beta^{2}\varepsilon_{h1},\frac{1}{6}L_{\varphi}N_{\varphi 1}^{2}\beta\right\},$$

得

$$\begin{aligned}\|\varphi(x^{R0}(t))\| &\leqslant \|\varphi(x^{1}(t))\|+\|\varphi(x^{R0}(t))-\varphi(x^{1}(t))\|\\ &\leqslant \|\varphi(x^{1}(t))\|+N_{\varphi 1}\|x^{R0}(t)-x^{1}(t)\|\\ &\leqslant A_{\varphi 0}[\|\varphi(x_0)\|^{2}+\|\varphi(x_0)\|\|th\|+\|th\|^{3}+\|th\|^{2}\|(t-\tilde{t})h\|].\end{aligned}$$

对于$\frac{d\varphi(x^{R0}(t))}{dt}$，有

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi(x^{R0}(t))}{dt} &=\varphi'(x^{R0}(t))h+2\varphi'(x^{R0}(t))at\\ &=[\varphi'(x^{R0}(t))-\varphi'(x^{0}(t))]h+[\varphi'(x^{0}(t))-\varphi'(x_0)]h\\ &\quad+2\varphi'(x_0)at+2[\varphi'(x^{R0}(t))-\varphi'(x_0)]at. \qquad (3.15)\end{aligned}$$

对于（3.15）右边的第二和第三项有

$$[\varphi'(x^{0}(t))-\varphi'(x_0)]h+2\varphi'(x_0)at=t\int_0^1\varphi''(x_0+\tau th)hhd\tau-2t\int_0^1(1-\tau)\varphi''(x_0+t\tilde{t}h)$$

$$hhd\tau=2t\int_0^1\int_0^1(1-\tau_1)[\varphi''(x_0+\tau th)-\varphi''(x_0+\tau_1\tilde{t}h)]hhd\tau d\tau_1.$$

对这式的右边部分及(3.15)右边的其余二项进行估计，可得(3.11).

类似地，可得到$\frac{d^{2}\varphi(x^{R0}(t))}{dt^{2}}$的估计式(3.12). 证完.

对近似曲线$x^{R0}(t)$进行恢复，得到流形N的近似曲线的序列：

$$x^{Rk+1}(t)=x^{Rk}(t)-G(x_0)\varphi(x^{Rk}(t)),\ k=0,1,\cdots, \qquad (3.16)$$

由定理1.2和引理3.1，立即得到下面的定理. 它给出序列$\{x^{Rk}(t)\}_{k=0}^{\infty}$的收敛性质.

定理 3.2 设定理1.2的条件成立，正数$\varepsilon_{\varphi 1}$和ε_{h1}满足(3.9)，正数A_0,A按定理1.2给出. 令

$$C=C(x_0,h,t)=N_{\varphi 1}\beta E_0(x_0,h,t)+N_{\varphi 1}\beta\|\varphi(x_0)\|+\|th\|+\frac{1}{2}N_{\varphi 2}N_{\varphi 1}\beta\|th\|^{2} \qquad (3.17)$$

和集合

$$D_R=\{(x_0,h,t)\mid\|\varphi(x_0)\|\leqslant\varepsilon_{\varphi 1},\|th\|\leqslant\varepsilon_{h1},C(x_0,h,t)<A\}, \qquad (3.18)$$

则当$(x_0,h,t)\in D_R$时，序列$\{x^{Rk}(t)\}_{k=0}^{\infty}$收敛到$N$上的点. 令这个点为$x^{R}(t)$，有估计式

$$\|x^{Rk}(t)-x^{R}(t)\|\leqslant\frac{N_{\varphi 1}\beta}{1-q_R}\|\varphi(x^{Rk}(t))\| \qquad (3.19)$$

和
$$\|\varphi(x^{Rk}(t))\|\leqslant q_R^k\|\varphi(x^{R0}(t))\|,\tag{3.20}$$
其中
$$q_R=q_R(x_0,h,t)=\frac{N_{\varphi2}N_{\varphi1}\beta C(x_0,h,t)}{1-A_0C(x_0,h,t)}.\tag{3.21}$$

$x^R(t)$ 是流形 N 上的曲线．为叙述它的微分性质，先引进一些记号，其中沿用了引理 3.1 和定理 3.2 中的记号．

$$q_{R0}=N_{\varphi2}N_{\varphi1}\beta,\tag{3.22}$$

$$q_{R1}=q_{R1}(x_0,h,t)=N_{\varphi2}N_{\varphi1}\beta\Big[\frac{1}{1-q_R}N_{\varphi1}\beta E_0(x_0,h,t)+N_{\varphi1}\beta\|\varphi(x_0)\|+\|th\|+\frac{1}{2}N_{\varphi2}N_{\varphi1}\beta\cdot\|th\|^2\Big],\tag{3.23}$$

$$A_{R0}=A_{R0}(x_0,h,t)=N_{\varphi1}\beta E_0(x_0,h,t),\tag{3.24}$$

$$A_{R1}=A_{R1}(x_0,h,t)=N_{\varphi1}\beta E_1(x_0,h,t),\tag{3.25}$$

$$A_{R2}=A_{R2}(x_0,h,t)=N_{\varphi1}\beta E_2(x_0,h,t),\tag{3.26}$$

$$B_{R1}=B_{R1}(x_0,h,t)=\Big[\frac{A_{P1}}{1-q_{R1}}+(1+q_{R0}\|th\|)\|h\|\Big]\Big/\Big[1-\frac{q_{R0}A_{R0}}{(1-q_{R1})(1-q_R)}\Big],\tag{3.27}$$

$$B_{R2}=B_{R2}(x_0,h,t)=\Big[\frac{A_{R2}}{1-q_{R1}}+\frac{2q_{R0}B_{R1}A_{R1}}{(1-q_{R1})^2}+\Big(\frac{L_\varphi N_{\varphi1}\beta B_{R1}^2}{(1-q_{R1})(1-q_R)}+\frac{2q_{R0}^2B_{R1}^2}{(1-q_{R1})^2(1-q_R)}\Big)A_{R0}+q_{R0}\|h\|^2\Big]\Big/\Big[1-\frac{q_{R0}A_{R0}}{(1-q_{R1})(1-q_R)}\Big],\tag{3.28}$$

$$Q_{R1k}=Q_{R1k}(x_0,h,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-q_{R1})(1-q_R)}, & k=0,1,\\ \dfrac{1}{(1-q_{R1})(1-q_R)}\Big[\sum\limits_{j=1}^{k}q_{R1}^{k-j}q_R^{j-1}-q_{R1}q_R\sum\limits_{j=1}^{k-1}q_{R1}^{k-j-1}q_R^{j-1}\Big], & k>1,\end{cases}\tag{3.29}$$

$$Q_{R2k}=Q_{R2k}(x_0,h,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-q_{R1})^2}, & k=0,\\ \Big[\dfrac{k-1}{1-q_{R1}}+\dfrac{1}{(1-q_{R1})^2}\Big]q_{R1}^{k-1}, & k>0,\end{cases}\tag{3.30}$$

$$Q_{R3k}=Q_{R3k}(x_0,h,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-q_{R1})^2(1-q_R)}, & k<2\\ \dfrac{1}{1-q_{R1}}\sum\limits_{j=2}^{k-1}(k-j)q_{R1}^{k-j}q_R^{j-2}+\dfrac{1}{(1-q_{R1})^2}\sum\limits_{j=2}^{k-1}q_{R1}^{k-j}q_R^{j-2}+\dfrac{q_R^{k-2}}{(1-q_{R1})^2(1-q_R)}, & k\geqslant2,\end{cases}\tag{3.31}$$

$$L_{Rx}=L_{Rx}(x_0,h,t)=\frac{1}{1-q_{R1}}[3q_{R0}B_{R1}B_{R2}+L_\varphi N_{\varphi1}\beta B_{R1}^3],\tag{3.32}$$

$$D_{R1}=D_R\cap\Big\{(x_0,h,t)\,|\,q_{R1}<1,\ \frac{q_{R0}A_{R0}}{(1-q_{R1})(1-q_R)}<1\Big\},\tag{3.33}$$

类似于定理 2.2，得到下面的定理．

定理3.3 设定理3.2的条件成立，则当$(x_0,h,t)\in D_{R1}$时，曲线$x^R(t)$在t处二阶连续可微，序列$\left\{\frac{dx^{Rk}(t)}{dt}\right\}_{k=0}^{\infty}$和$\left\{\frac{d^2x^{Rk}(t)}{dt^2}\right\}_{k=0}^{\infty}$分别收敛到$\frac{dx^R(t)}{dt}$和$\frac{d^2x^R(t)}{dt^2}$，有估计式

$$\left\|\frac{dx^{Rk}(t)}{dt}-\frac{dx^R(t)}{dt}\right\|\leqslant\frac{q_{R1}^k}{1-q_{R1}}\left\|\frac{dx^{R1}(t)}{dt}-\frac{dx^{R0}(t)}{dt}\right\|+q_{R0}B_{R1}Q_{R1k}\|x^{R1}(t)-x^{R0}(t)\|,\tag{3.34}$$

$$\left\|\frac{d^2x^{Rk}(t)}{dt^2}-\frac{d^2x^R(t)}{dt^2}\right\|\leqslant\frac{q_{R1}^k}{1-q_{R1}}\left\|\frac{d^2x^{R1}(t)}{dt^2}-\frac{d^2x^{R0}(t)}{dt^2}\right\|+2q_{R0}B_{R1}Q_{R2k}\cdot\left\|\frac{dx^{R1}(t)}{dt}-\frac{dx^{R0}(t)}{dt}\right\|+[q_{R0}B_{R2}Q_{R1k}+L_\varphi N_{\varphi1}\beta B_{R1}^2Q_{R1k}+2q_{R0}^2B_{R1}^2Q_{R3k}]\|x^{R1}(t)-x^{R0}(t)\|,\tag{3.35}$$

并且当$|t_1|,|t_2|\leqslant|t|$时，二阶导数满足常数为L_{Rx}的Lipschitz条件，即有

$$\left\|\frac{d^2x^R(t_1)}{dt^2}-\frac{d^2x^R(t_2)}{dt^2}\right\|\leqslant L_{Rx}|t_1-t_2|.\tag{3.36}$$

假定已按照§2建立了流形N的局部参数表示$x(\mu,x^0)$，并将问题(1.2)转化成局部无约束极小化问题(2.54)。但是由于表示$x(\mu,x^0)$是通过迭代(2.6)构造的，不能精确得到。因而通过问题(2.54)构造的许多算法只能看成是理论算法。在具体实现时必须对这些理论算法进行摄动。下面考虑对一维寻找的直线的摄动。

对问题(2.54)构造的许多算法要求沿着空间$l_0(x^0)$中的直线寻找泛函$F(\mu,x^0)$的局部极小值点。设这直线为

$$\bar\mu(t)=\bar\mu+t\bar h_\mu.\tag{3.37}$$

它对应到流形N上是曲线

$$\bar x(t)=x(\bar\mu(t),x^0).\tag{3.38}$$

$\bar x(t)$是由线性切向流形T_{x^0}上的直线通过迭代(2.6)得到的。通常不可能精确地得到。因此直接沿$\bar\mu(t)$寻找是不易实现的。我们构造$\bar x(t)$的近似曲线，用在近似曲线上的寻找来代替沿$\bar x(t)$的寻找。$\bar x(t)$的最简单的近似曲线为切线

$$\bar x^0(t)=\bar x+t\bar h,\tag{3.39}$$

其中$\bar x=x(\bar\mu,x^0)$，$\bar h=\frac{\partial x(\bar\mu,x^0)}{\partial\mu}\bar h_\mu$。但$\bar x$和$\bar h$也是很难得到的。通常在构造的算法中容易得到它们的近似。设x_0是点$\bar x$的近似，h是$\bar h$的近似，并且$h\in H$满足$\varphi'(x_0)h=\theta$。作$\bar x^0(t)$的近似直线

$$x^0(t)=x_0+th,\tag{3.40}$$

再通过本节所述的构造过程，从$x^0(t)$出发，可以构造近似曲线的序列$\{x^{Rk}(t)\}_{k=0}^{\infty}$。然后沿着这些近似曲线寻找。序列$\{x^{Rk}(t)\}_{k=0}^{\infty}$的极限为流形$N$上的曲线$x^R(t)$，其对应的参数表示为

$$\mu^R(t)=E(x^0)^*(x^R(t)-x^0)=\mu(x^R(t)).\tag{3.41}$$

下面来估计$\mu^R(t)$与$\bar\mu(t)$之间的差别。

定理 3.4　设假定 1.1 成立，则存在正数 $\varepsilon_\mu,\varepsilon_x,\varepsilon_h$ 和 $A_{\mu 0},A_{\mu 1},A_{\mu 2}$，使当 $\|\bar{\mu}\|\leqslant\varepsilon_\mu$，$\|x_0-x^0\|\leqslant\varepsilon_x$，$\|th_\mu\|\leqslant\varepsilon_h$，$\|th\|\leqslant\varepsilon_h$ 时，有表示式

$$\mu^R(t)=\bar{\mu}(t)+O_R(t), \tag{3.42}$$

其中函数 $O_R(\cdot)$ 对 t 是二次连续可微的，并且有估计式

$$\|O_R(t)\|\leqslant A_{\mu 0}[\|\varphi(x_0)\|+\|th\|^2+\|x_0-\bar{x}\|+\|t(h-\bar{h})\|+\|th_\mu\|^2], \tag{3.43}$$

$$\left\|\frac{dO_R(t)}{dt}\right\|\leqslant A_{\mu 1}[\|\varphi(x_0)\|\|h\|+\|th\|\|h\|+\|h-\bar{h}\|+\|th_\mu\|\|h_\mu\|], \tag{3.44}$$

$$\left\|\frac{d^2O_R(t)}{dt^2}\right\|\leqslant A_{\mu 2}[\|h\|^2+\|h_\mu\|^2]. \tag{3.45}$$

证明　我们有

$$\mu^R(t)-\bar{\mu}(t)=E(x^0)^*(x^R(t)-\bar{x}(t)) \tag{3.46}$$

和

$$\|x^R(t)-\bar{x}(t)\|\leqslant\|x^R(t)-x^{R0}(t)\|+\|x^{R0}(t)-x^1(t)\|+\|x^1(t)-x^0(t)\|$$
$$+\|x^0(t)-\bar{x}^0(t)\|+\|\bar{x}^0(t)-\bar{x}(t)\|. \tag{3.47}$$

应用 §2 和这一节中的结果，对(3.46)和(3.47)右边的每一项进行估计，立即可得(3.43)。同样可得(3.44)和(3.45)。

特别当 $x^R(0)=\bar{x}$ 和有估计 $\|h-\bar{h}\|\leqslant\min\{\varepsilon_h^1,\varepsilon_h^2\|\bar{h}\|\}\|\bar{h}\|$ 和 $\|\varphi(x_0)\|\leqslant\varepsilon_\varphi^1\|\bar{h}\|$ 时，有表示式

$$\mu^R(t)=\bar{\mu}(0)+th_{\mu 1}+O_{R1}(t), \tag{3.48}$$

其中 $h_{\mu 1}=h_\mu+O_h(\|h_\mu\|)$。在定理 3.4 的条件下有估计式

$$\|O_h(\|h_\mu\|)\|\leqslant A_h\|h_\mu\|^2,$$
$$\|O_{R1}(t)\|\leqslant C_\mu\|th_\mu\|^2,$$
$$\left\|\frac{dO_{R1}(t)}{dt}\right\|\leqslant C_{\mu 1}\|th_\mu\|\|h_\mu\|,$$
$$\left\|\frac{d^2O_{R1}(t)}{dt^2}\right\|\leqslant C_{\mu 2}\|h_\mu\|^2.$$

这样，通过恢复迭代，近似寻找曲线 $x^{Rk}(t)$ 对应到流形 N 上的曲线可以看成是由直线 $\mu(t)$ 经函数 $O_R(t)$ 或 $O_{R1}(t)$ 摄动产生的。上述公式中的 $\varepsilon_h^1,\varepsilon_h^2,\varepsilon_\varphi^1,A_h,C_\mu,C_{\mu 1},C_{\mu 2}$ 均是适当的正数。

§4　例　子

考虑连续的受控系统，其运动轨道及控制满足常微分方程组

$$\dot{z}=f(z,u,t),\ \ z(t_0)=z_0, \tag{4.1}$$

其中$z=(z^1,z^2,\cdots,z^n)^T\in R^n$是系统的状态变量，$u=(u^1,u^2,\cdots,u^r)^T\in R^r$为系统的控制变量，$f=(f^1,\cdots,f^n)^T$是$n$维向量值函数，$t_0$是运动的起始时刻，$z_0$是系统运动的初始状态，$t_f$是运动的终结时刻．为简单起见，假定$t_0,z_0,t_f$都是给定的．

把定义在区间$[t_0,t_f]$上而在R^r中取值的每一个平方可积函数$u(t)=(u^1(t),u^2(t),\cdots,u^r(t))^T$称作系统(4.1)的一个控制．所有这样的控制的集合组成一个Hilbert空间H，其中的内积是这样定义的：设$a(t)=(a^1(t),\cdots,a^r(t))^T\in H$，$b(t)=(b^1(t),\cdots,b^r(t))^T\in H$为$H$的任何二个元，则令

$$\langle a,b\rangle=\int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{r}a^i(t)b^i(t)dt. \tag{4.2}$$

给定系统(4.1)的一个控制$u(t)$，代入(4.1)的右端，并且进行积分，得到对应于控制$u(t)$的轨道$z(t)=z(t,u)$．许多最优控制问题和轨道计算问题要求轨道$z(t)$的终点值$z(t_f)$满足约束条件

$$\varphi_j(z)=0,\quad j=1,2,\cdots,m, \tag{4.3}$$

其中$\varphi_j(\cdot)$是由R^n到R^1中的连续可微映象．由于$z(t_0)$给定时，$z(t_f)$由控制$u(t)$唯一确定，$\varphi_j(z(t_f))$可以看成是u的泛函数，记为$\varphi_j(u)$．这样，

$$\varphi(u)=(\varphi_1(u),\varphi_2(u),\cdots,\varphi_m(u))^T \tag{4.4}$$

确定一个由H到R^m中的映象．等式约束(4.3)可以改写成

$$\varphi(u)=\theta. \tag{4.5}$$

它确定空间H中的一个流形N．为了应用§1—§3中的结果，关键是要建立$\varphi(u)$的导算子$\varphi'(u)$的计算公式．设已给出系统(4.1)的控制$u(t)$，积分(4.1)得到对应的轨道$z(t,u)=z(t)$．引进共轭函数$\lambda(t)=(\lambda_1(t),\lambda_2(t),\cdots,\lambda_n(t))^T$，$t\in[t_0,t_f]$，并作Hamilton函数

$$H(z,\lambda,u,t)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(z,u,t). \tag{4.6}$$

$\lambda(t)$由共轭方程组

$$\dot\lambda(t)=-\left[\frac{\partial H(z,\lambda,u,t)}{\partial z}\right]^T\Bigg|_{\substack{z=z(t,u)\\u=u(t)\\\lambda=\lambda(t)}} \tag{4.7}$$

来确定．若取组(4.7)的终端条件为

$$\lambda(t_f)=\left[\frac{\partial\varphi_j(z)}{\partial z}\right]^T\Bigg|_{z=z(t_f,u)}, \tag{4.8}$$

积分(反积)组(4.7)得$\lambda(t)$，$t\in[t_0,t_f]$，并将其代入(4.6)中，则$\varphi_j(u)$对u的导算子$\varphi_j'(u)$为

$$\varphi_j'(u)(t)=\left[\frac{\partial H(z,\lambda,u,t)}{\partial u}\right]\Bigg|_{\substack{z=z(t,u)\\u=u(t)\\\lambda=\lambda(t)}}. \tag{4.9}$$

它是定义在 $[t_0, t_f]$ 上而在 r 维空间（行向量）中取值的向量值函数。于是 $\varphi'(u)$ 可以表示成

$$\varphi'(u) = \begin{pmatrix} \varphi_1'(u) \\ \varphi_2'(u) \\ \vdots \\ \varphi_m'(u) \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

它是定义在 $[t_0, t_f]$ 上取 m×r 矩阵值的函数。

参 考 文 献

[1] A. A. 刘斯铁尔尼克等，泛函分析概要，科学出版社，1955.

[2] 关肇直，林群，非线性函数方程的近似解法，“泛函分析”附录，李文清著，科学出版社，1960.

[3] 费景高，计算运动系统最优控制函数的梯度法，计算机应用与应用数学，1974 年第 5 期，1—14.

[4] 费景高，梯度投影下降算法，计算数学，3:2(1981)152—164.

Computational Methods for Finding Minimum Point of a Functional over a Manifold in Hilbert Space

Part 1. Restoration Operators and Approximate Curves of a Manifold

By Fei Jinggao (费景高)

Abstract

In this paper, we first construct a class of restoration operators of a manifold in Hilbert space, anc discuss some properties of them. Secondly, the local parameter presentation of the manifold is built constructively by the restoration operators. This presentation will enable us to construct and implement the computational methods for finding minimum point of a functional over the manifold. Finally, this paper also constructs a class of approximate curves of the manifold, which providea a tool for obtaining implementoble algorithms. In these algorithms, we can apply the search along curvilinear paths rather than straight lines.