

## 逼近论发展史简述(一)\*

沈燮昌

(北京大学)

函数逼近论是数学中一个很重要的分支,它与数学中其它学科如代数、泛函分析、计算方法、微分方程、概率统计等都有密切的联系.它也可以用来解决自动控制、信号处理、无线电、物理探矿、地震勘探、遥测遥感、晶体结构X光衍射、机械理论等多方面所提出的实际问题.如果追溯它的历史,П.Л.Чебышев在1852年发表他的国外出差报告到现在,已有100多年的历史了.

Чебышев以前,在十八世纪及十九世纪初, Euler、Laplace、Fourier、Poncelet等从制图、测地、应用力学、代数方程等出发,就已经将一些实际问题归结为最佳逼近某些具体函数的个别问题,但是没有提出一般的问题及一般的理论.在这些问题的解决过程中,便逐渐地形成数学中的新分支——函数逼近论的萌芽.

此外,1784年Watt用实验方法发明了蒸汽机,但是没有从理论上加以说明.由于出现使活塞保持直线运动的双向蒸汽机,Watt的平行四边形就应用到生活中来了.考虑简化平行四边形(图1),其中 $AB$ 是摇臂, $A$ 是摇臂的旋转点, $CD$ 是导杆, $D$ 是导杆的旋转点. $BC$ 是联接杆,在 $BC$ 上适当地选一点 $E$ ,上面放上活塞杆.这里, $AB$ 、 $BC$ 是已知的,要求确定 $CD$ 的长度、 $D$ 的位置及 $E$ 的位置,使得活塞联接杆的接触点 $E$ 作近似直线运动,如果考虑完全四边形(图2),同样,导杆 $AD$ 已知,其自由部份 $AB$ 及联接杆 $BG = DH$ 的

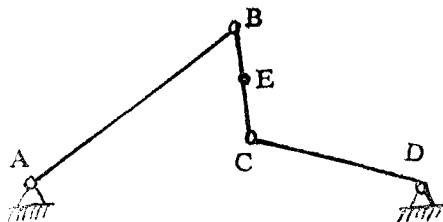


图 1

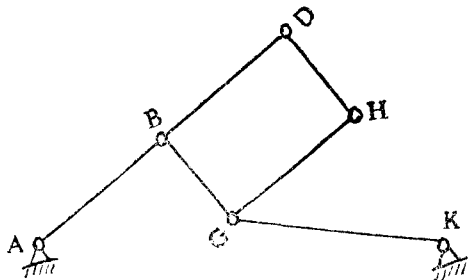


图 2

长度也已知,且 $BD = GH$ 要求确定导杆 $GK$ 的长度及旋转点 $K$ 的位置,使得摇臂 $AD$ 在

\* 1981年4月7日收到.

某一个范围内转动时,  $H$  作出近似直线运动.

解决这个问题的原则是: 在活塞(图 1 中的  $E$  或图 2 中的  $H$ ) 运动的开始、中间及終了时, 活塞联接杆的接触点  $H$  (或  $E$ ) 位于一条给定的直线上. Watt 选择  $GK = AB = BD = \frac{1}{2}AD$ , 且  $K$  选择得使摇臂  $AD$  在水平位置时,  $GK$  也在水平位置, 且  $DH \perp AD$ . 当  $AD$  在某一个范围内变化时,  $H$  的运动是最接近某条垂直线的, 其位置是  $AD$  绕  $A$  旋转从某个角度  $-\alpha$  到  $\alpha$  时, 相应的  $D$  作出的圆弧在  $\alpha = 0$  处的切线. 后来, 1790 年 Cr. Prony、1835 年 T. Tredgold、1854 年 А.С. Ершов、1876 年 J. Weisbach 都作了理论及实际的研究. 他们对于不同尺寸的另件, 得到  $H$  (或  $E$ ) 运动的轨迹, 并以各种程度接近各种垂直线. 从当时的实际要求来看, 需要构造大功率的机器. 但是 Watt 平行四边形的构造中以及机器的其他另件(如离心调节器)有缺点, 如侧压力较大, 这对机器磨损及使用寿命来说都是不利的. 尽管上述学者曾经作了一些研究, 并且得到了改进, 但是这种改进是否“最好”以及如何设计“最好”的机器问题就很自然地会提出来. П.Л. Чебышев 与 И.А. Вышнеградский 作了认真的理论研究(前者研究活塞运动, 后者在 1876 年对作出直线运动的调节器作了研究, 奠定了自动调节理论的基础). Чебышев 提出了本质的问题: 要求选择上面提到的垂直线, 使得机械运动的精确性最大, 即活塞离开此垂直线在一定范围内的最大偏差相对于其他的垂直线而言是最小的. 这就是最佳逼近的问题. 由此看出 Чебышев 在继承前人的基础上, 特别是由于当时实际的需要, 创立了数学中的新分支——函数逼近论.

开始时, 只研究多项式的最佳逼近. 后来由于进一步研究机械运动, 需要研究有理函数以及无理函数的最佳逼近问题.

函数逼近论, 或者按照 С.Н. Бернштейн 的称呼, 函数构造论, 在近二三十年中由于理论及实际(包括计算技术)需要, 得到蓬勃的发展. 据粗略的估计, 目前世界上大约有数千人直接从事于这方面的研究, 其中美国、苏联占了很大的比例, 此外西德、匈牙利、瑞士等也有不少数学家从事于这个领域的研究. 很多有影响的杂志经常刊登这方面的工作, 发表了大量的文章, 其中有很多综合性介绍的论文. 从 1968 年起, 美国还出版专门研究逼近论的杂志 (Journal of Approximation Theory). 只是近一、二十年就出版了数十本有关逼近论的书籍. 各种国际性会议上都有逼近论方面的报告. 此外, 逼近论专业会议也较频繁. 美国与苏联曾多次召开过国际逼近论会议, 几乎每年在西德都有逼近论专业会议, 并邀请各国学者参加. 匈牙利、保加利亚、加拿大等国也召开这样的会议及讨论班. 每次会议后都出版有文集. 我国曾先后在杭州及厦门召开过两次全国逼近论会议, 取得了不少可喜的成果. 在四个现代化建设过程中, 可以预料, 逼近论无论在理论上还是在实际上必将有进一步的发展.

## §1 Чебышев 以前有关逼近论的问题

Чебышев 在 1852 年从国外出差回国后的报告中说: “当我从平行四边形机械性质直接推导出其构造规则时, 我遇到了分析中过去知道得很少的问题.” 这里所说的问题就是函数最佳逼近问题. 这句话是非常正确的: 一方面说明, 在过去不是一点也不知道, 事实上, 下面将谈到的在 Euler、Laplace、Fourier、Poncelet 的工作中确实已有这样的一些问题,

但只是逼近一些个别函数; 另一方面, 知道得很少, 因为没有明确地提出、系统地研究最佳逼近的一般问题以及将最佳逼近问题系统地用到实际问题中去。

### 1. 制图问题

大家知道, 地球是近似椭圆的, 那末如何把上面的国家画到平面上去呢? 因为角锥是一个可展曲面, 因此自然地想到把地球投影到角锥上去。锥投影的方法是: 将地球画在某个地球仪上, 再将此地球仪投影到锥面上。

为此, 将此锥的轴与地轴重合, 并将此地球的子午线用一点出发的直线, 即锥的母线表示, 而纬线则用同心圆周表示。此外, 锥可以与球相切, 也可以不相切而只是相割 (图 3)。

用  $\lambda$  记地球上两条子午线之间的夹角, 而  $\delta$  记在锥投影上此角的对应角。设图 3 中锥切球于纬度为  $\varphi_0$  的纬度圆周上, 则此圆周的半径  $\rho = R \cos \varphi_0$ , 其中  $R$  为地球的半径。由于  $A_0 B_0 = \lambda \rho = \lambda R \cos \varphi_0$ , 又因  $S_0 B = R \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right) = R \operatorname{ctg} \varphi_0$ , 由此得到  $\delta = \frac{A_0 B_0}{S_0 B} = \lambda \sin \varphi_0$ , 即  $\delta = \alpha \lambda$ , 这里  $\alpha = \sin \varphi_0$  为比例常数, 或称为锥投影指数。对于一般的锥投影, 也有这类线性关系式, 其中  $\alpha$  跟  $S_0$  的位置及锥与球相割位置有关。一般说来,

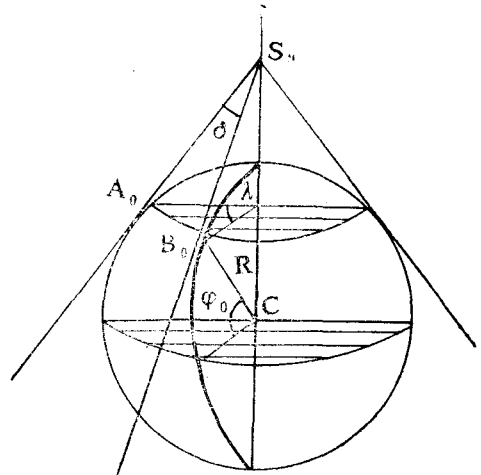


图 3

对应在纬度  $\varphi$  处, 纬线在锥上投影得到的圆周半径  $\rho$  是  $\varphi$  的函数, 记作  $\rho = F(\varphi)$ . 因此给出了锥投影就相当于给出了  $\alpha$  与  $F(\varphi)$ , 即刻划子午线与纬线的投影。

过去, 经常在锥投影中取相切锥, 取上述  $\varphi_0$  为需要投影国家的平均纬度 (主纬线)。这种投影的根本缺点在于: 当国家的其他纬线离开主纬线越远时, 则投影比例尺的偏差越大。大家知道, 在等距离投影中, 偏差越小, 地图就越精确。

法国天文学家与制图学家 De Lisliana 建议用新的投影法: 考虑二次相割的锥投影作为相割的纬线, 他建议对俄国用离开俄国主纬线及其两条边界线都是等距离的两条纬线。这样一来, 上述偏差是缩小了一些, 但是比例差的偏差仍是很本质的: 位于两条相割纬线之间的纬线投影后的比例尺偏差比其他处的纬线的偏差来得小。在更适当地选择相割纬线时, 这些偏差就可以减少。Euler 正是注意到了这一点。

根据 De Lisliana 的请求, Euler 在 1735 年参加了彼得堡科学院的制图工作。Euler 在 1777 年发表工作中, 建议用新的等距离锥投影, 即 Euler 投影。其本质在于要求地球纬度的弧长 (画在地球仪上) 对其在地图上投影的最大偏差最小。通过计算可以知道, 此即要求函数  $f(x) = \cos x$  被一次多项式  $P_1(x) = a(b-x)$  在区间  $0 < a \leq x \leq \beta < \frac{\pi}{2}$  上逼近时的最佳逼近值:

$$\min_{a, b} \max_{a \leq x \leq \beta} |\cos x - a(b-x)|.$$

他证明, 当  $\cos x - a(b-x)$  在端点  $x = \alpha, x = \beta$  以及中点  $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$  上以变动的符号取到绝对值的最大值时, 就能够得到最小值. 因为系数  $a$  与  $b$  跟相割的纬线有关, 所以在确定了  $P_1(x) = a(b-x)$  以后, 就确定了此锥.

## 2. 地球形状问题

Laplace 长期以来就研究地球形状, 遇到了一致逼近问题. 他在 1776 年在“天体力学”一书上写道: “在球形之外, 椭球形是最简单的形状. …… , 我们应该确定一个椭球, 使得测得的 (地球) 弧长对它的最大偏差比对于其他椭球的偏差而言是最小的. 并且观察一下, 这个偏差是否处在所许可的误差范围内.”

他假定的子午线上以一度为单位的弧长可以用  $z + py$  表示, 其中  $p$  是对应度数为  $\varphi$  的正弦平方, 即  $\sin^2 \varphi$ ,  $z$  与  $y$  是需要确定的未知数. 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是在不同度数上经过测量后得到的以一度为单位的子午线弧长. 用  $x_1, x_2, \dots, x_n$  表示测得的长度与  $z + py$  的差. Laplace 得到

$$x_i = a_i - z - p_i y \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

其中  $p_i, 1 \leq i \leq n$ , 为上升序列,  $n$  为测量次数.

Laplace 提出问题: 从所有满足这些方程的误差中选择一个方程组, 使其最大误差按其绝对值而言, 相对于其他组来说是最小的, 即求

$$\min_{z, y} \max_{1 \leq i \leq n} |a_i - z - p_i y|$$

或者

$$\min_{q_1, q_2} \max_{\varphi \in M} |a(\varphi) - (q_1 + q_2 \sin^2 \varphi)|,$$

这里  $M \in [\alpha, \beta], 0 \leq \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ . 达到最小值的“多项式”  $q_1^0 + q_2^0 \sin^2 \varphi$  应该使  $a(\varphi) - (q_1^0 + q_2^0 \sin^2 \varphi)$  在三个点上变号地达到绝对值的最大值.

## 3. 制造天文表的问题

在制造天文表时需要一些条件, 而表达这些条件有一些方程, 因此就需要解出这些方程. 这里就遇到要寻找一些未知数值, 使这些未知数代入后, 这些方程所表示的函数值的绝对值中最大者为最小, 或者其平均误差, 即绝对值误差之和除以这些方程的个数得到的值尽可能地最小. 这些方程是未知数的线性函数所成, 但方程组的个数可以多于未知数个数. Fourier 在 1789 年研究这个问题, 他只考虑两个未知数  $x$  与  $y$  的情况, 并用几何方法进行的研究. 他用  $x, y$  表示平面上点的坐标, 用  $z$  表示线性函数的取值. 这样, 每一个线性函数就对应着三维空间中的一张平面. 对应于每一张这种平面, 作一张关于  $xy$  平面对称的平面. 这样就得到一些平面, 它们的个数是原来方程组中方程个数的二倍. 现在我们只考虑这些平面位于  $xy$  平面上方的那些部份, 它们构成一个壶, 即这些平面的包线. 它的形状是一个多面体, 其中凸部指向  $xy$  平面. 此壶的最低点坐标就是未知值  $X, Y, Z$ , 其中  $Z$  就是最大误差的最小值.  $X$  与  $Y$  是给出这个最小值的  $x$  与  $y$  的解, 当然也可能相差一个符号.

用这样的几何方法来解决这一类问题也很富有启发性. 近代的数值逼近就是利用这个思想来设法寻找最低点的.

#### 4. 机械问题

法国 Poncelet 在 1826 年研究一些最简单机械平衡条件遇到形如  $\sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\sqrt{x^2 - y^2}$ ,  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  的函数需要用线性函数来近似表达的问题. 他对函数  $\sqrt{x^2 + y^2}$  令  $k = \frac{x}{y}$ , 取  $k = 0, 1, \dots, 10$  给出了近似线性表达式  $ax + \beta y$  及其简单的算法. 他指出, 这样的代替, 有时比用级数展开式或连分式来代替更有利. 但是, 他没有精确地提出问题.

考虑相对误差

$$\begin{aligned} v &= \frac{ax + \beta y - \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{ax + \beta y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 \\ &= \frac{a\left(\frac{x}{y}\right) + \beta}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}} - 1 = \frac{au + \beta}{\sqrt{1 + u^2}} - 1, \end{aligned}$$

其中  $u = \frac{x}{y}$ . 问题是如何选择  $\alpha$  与  $\beta$ , 使它在  $0 \leq k \leq u < \infty$  中的绝对值的最大值取最小值:

$$\min_{\alpha, \beta} \max_{0 \leq k \leq u < +\infty} \left| \frac{au + \beta}{\sqrt{1 + u^2}} - 1 \right|.$$

现在我们来看看 Poncelet 是如何解决这个问题的. 首先, 他认为函数  $v(u)$  在所考虑的区间上确实可以取到极值. 为此, 他先找局部极值. 容易证明, 它在  $u = \frac{\alpha}{\beta}$  处达到, 且其值为  $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - 1$ . 至于它是否是最大值, 还是最小值, 要用  $\alpha$  与  $\beta$  的符号来决定. 在区间的两个端点  $u = k$  与  $u = +\infty$  上, 我们有

$$v(k) = \frac{\alpha k + \beta}{\sqrt{1 + k^2}} - 1, \quad v(+\infty) = \lim_{u \rightarrow +\infty} v(u) = \alpha - 1.$$

“因此, 如果预先知道上面找到的最大值位于给定的区间上, 那么对未知数  $\alpha$  与  $\beta$  而言, 其比  $\frac{\alpha}{\beta}$  为正且大于  $k$ . 剩下来只要确定这些值, 使得这三个误差的代数值尽可能地接近于零. 这样一来, 就要使绝对值的最大者尽可能地最小. 容易看出, 这仅在这些误差相等时才出现.” 这个思想实际上就是大家知道的 Чебышев 交错点的思想. 由于这里用一次多项式来逼近, 因此就有三个交错点.

但是,  $\alpha$  与  $\beta$  是任意的且根本不知道其比值是多少? Poncelet 首先设两个端点的误差为零, 即

$$\alpha - 1 = 0, \quad \frac{\alpha k + \beta}{\sqrt{1 + k^2}} - 1 = 0,$$

由此得到  $\alpha = 1$ ,  $\beta = \sqrt{1 + k^2} - k$ . 因而有.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2} - k} = \sqrt{1 + k^2} + k > k,$$

这表示极值误差在此区间上可以达到,且在此情况下,  $u = \frac{\alpha}{\beta}$  是达到整个区间上的最大值的.

将  $\alpha = 1$ ,  $\beta = \sqrt{1+k^2} - k$  记作  $\alpha_0$  与  $\beta_0$ , 则最大误差  $\sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2} - 1$  为正. 现在再令  $\alpha$  与  $\beta$  连续地变动, 则相对误差值

$$\alpha - 1, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - 1, \frac{\alpha k + \beta}{\sqrt{1+k^2}} - 1$$

也连续地变化. 显然当  $\alpha$  与  $\beta$  分别比  $\alpha_0$  与  $\beta_0$  小时, 这三个值都变化, 但此时  $\alpha - 1$  与  $\frac{\alpha k + \beta}{\sqrt{1+k^2}} - 1$  取负值, 即其绝对值是变大了. 当  $\alpha$  与  $\beta$  在  $\alpha_0$  与  $\beta_0$  附近变化时, 这两个值的绝对值仍比  $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - 1$  来得小, 但是以后就可能超过它. 既然问题是要选择  $\alpha$  与  $\beta$ , 使得其绝对值的最大值为最小, 因此 Poncelet 根据上面分析, 令

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - 1 = 1 - \alpha = 1 - \frac{\alpha k + \beta}{\sqrt{1+k^2}},$$

即极值误差在这三个点上的绝对值相等, 但其数值可以依次有不同符号. 这样就得到了

$$\alpha = \frac{2}{1 + \sqrt{2(1+k^2) - 2k\sqrt{1+k^2}}}, \quad \beta = \frac{2(\sqrt{1+k^2} - k)}{1 + \sqrt{2(1+k^2) - 2k\sqrt{1+k^2}}},$$

以及

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2} - k} = \sqrt{1+k^2} + k > k.$$

因此, 误差的最大值确实在  $k \leq u < +\infty$  中, 而误差值为

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 1 - \alpha = 1 - \frac{\alpha k + \beta}{\sqrt{1+k^2}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - 1 \\ &= \frac{\sqrt{2k(1+k^2) - 2k\sqrt{1+k^2}} - 1}{\sqrt{2k(1+k^2) - 2k\sqrt{1+k^2}} + 1}. \end{aligned}$$

此即用  $ax + \beta y$  在  $k \leq \frac{x}{y} < +\infty$  中逼近  $\sqrt{x^2 + y^2}$  时的相对误差.

Poncelet 给出了  $0 \leq k \leq 10$  的 11 个整数值, 列出了表格. 可以知道, 当  $x$  比  $y$  越大时, 其近似值越好.

Poncelet 还用几何方法对这个问题作出了研究. 方程  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  表示一个以原点为顶点的圆锥面, 而方程  $z = ax + \beta y$  表示一张通过原点的平面. 因此, 问题在于要确定  $\alpha$  与  $\beta$ , 使得通过  $oxy$  平面上点  $(x, y)$  所作出的平行于  $z$  轴的垂线与平面交点及与锥面交点的距离的最大者尽可能地最小, 其中点  $(x, y)$  满足条件  $0 \leq k \leq \frac{x}{y} < +\infty$ , 即  $(x, y)$  位于  $Ox$  轴与直线  $Om$  所包含的角域内(图 4). 我们将此角记作  $\psi$ , 则  $\psi = \text{tg}^{-1} \frac{1}{k}$ .

作通过  $Oz$  的平面, 它与圆锥  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  及平面  $z = ax + \beta y$  相交在两条直线  $op'$  及  $op''$  上. 取  $oxy$  平面上直线  $od$  上的点  $p$ , 通过点  $p$  作垂线, 它与  $op'$  交于  $p'$ , 与  $op''$  交于  $p''$ . 用  $pp''$  代替  $pp'$ , 其绝对误差为  $p'p''$ , 相对误差为  $\frac{p'p''}{pp'}$ . 这就是我们所要求的相对误差(图 5).

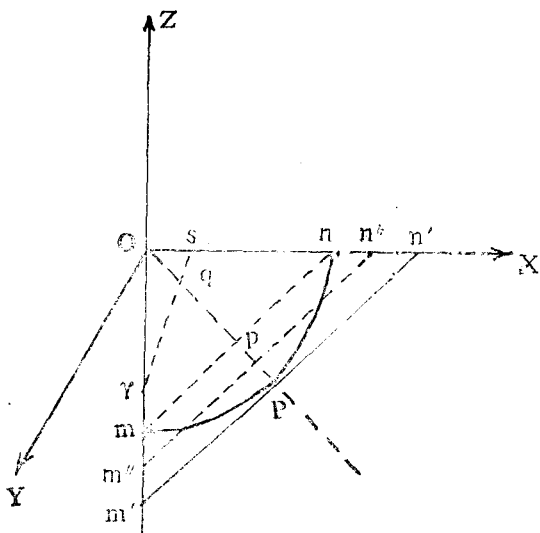


图 4

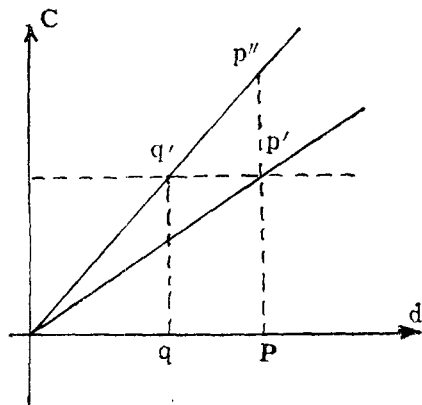


图 5

从相似三角形的性质看出,  $\frac{p'p''}{pp'}$  不依赖于  $od$  上点  $P$  的位置. 因此, 我们只考虑任意一个高为  $z_0$ , 平行于  $oxy$  的平面  $S$ , 它与锥面相交为圆周, 上面的点记作  $p'$ , 此圆周在  $oxy$  平面上所考虑的角域内的投影是弧  $mpn$  (图 4). 平面  $S$  与平面  $z = ax + \beta y$  的交线在  $oxy$  平面上所考虑的角域内的投影为直线  $sqr$  (图 4), 其方程为  $z_0 = ax + \beta y$ .

现在再考虑通过  $oz$  轴的平面与它们的截线. 设  $q'$  是平面  $S$  上对应于锥面上点  $p'$  而位于平面  $z = ax + \beta y$  上的点,  $q$  与  $p$  是  $q'$  与  $p'$  在  $oxy$  平面上的投影, 显然有

$$\frac{p'p''}{pp'} = \frac{pq}{oq}.$$

我们要选择平面  $z = ax + \beta y$ , 即选择直线  $sqr$ , 使得圆弧  $mpn$  上任意点  $p$  对应的量  $\frac{pq}{oq}$  的绝对值的最大值为最小. 显然, 未知直线段  $sqr$  应该是  $m''n''$ , 它平行于弦  $mn$  及  $mpn$  在其中点的切线  $m'n'$  且位于  $mn$  与  $m'n'$  的中间. 此时, 从相似三角形容易看出

$$\frac{nn''}{On''}, \frac{pp''}{Op''}, \frac{mm''}{Om''}$$

的绝对量相等.

显然  $m''n''$  与  $Ox$  轴的交角为  $\frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2}$ , 这样就容易确定  $m''n''$  的方程  $z_0 = ax + \beta y$  中的系数. 事实上, 由

$$\frac{\alpha}{\beta} = \cotg \frac{\psi}{2}, \quad on'' = \frac{On + On'}{2} = \frac{1}{2} \left( z_0 + \frac{z_0}{\cos \frac{\psi}{2}} \right) = \frac{z_0}{\alpha},$$

可以得到

$$\alpha = \frac{2 \cos \frac{\psi}{2}}{1 + \cos \frac{\psi}{2}} = 1 - \tg^2 \frac{\psi}{4},$$

$$\beta = \frac{\sin \frac{\psi}{2}}{1 + \cos \frac{\psi}{2}} = 2 \tg \frac{\psi}{4},$$

而最小误差为

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{nn'}{On''} = \frac{1}{2} \left( \frac{z_0}{\cos \frac{\psi}{2}} - z_0 \right) / \frac{z_0}{a} = \operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{4}.$$

这个结果与上面用分析方法所得到的结果完全一样，并且还给出了各个量的几何解释。

这个方法还可以进一步推广，这里就不再作介绍了。

## §2 Watt平行四边形理论发展的简单介绍

Watt 平行四边形是在 1784 年作为保持活塞直线运动的机械，随着双向蒸汽机的发明而产生的。单向 Watt 发动机在工作时有猛烈的冲击，因此作为要求保持圆周运动、保持均匀性以及高速度运转的机器是不合适的。这就有必要创造双向的机器（活塞有两个过程）。将活塞与摇臂通过铰链直接灵活地联结起来对于双向发动机是不利的，因为活塞可以很好地推动，同样也可以很好地牵引。为了传递功，当活塞向上运动时，需要将活塞与摇臂坚固地联结起来。但直接联结摇臂与活塞杆是不可能的，因为活塞是作直线运动的，而摇臂的端点却作圆周运动。这是个复杂的问题。

Watt 经过反复试验，用图 1 的三环体，即简化平行四边形才达到要求。但从实用的观点来看也有缺点：摇臂与导杆的旋转轴之间的距离太大，这就需要增加机器零件的尺寸。几个月后，Watt 进一步提出了用全完平行四边形（图 2），此时活塞放在  $H$  上，这才符合对机器各个零件的要求。

在图 2 的平行四边形中，Watt 通过试验取导杆长  $GK = \frac{1}{2}AD$  ( $AD$  是摇臂长)， $BD = \frac{1}{2}AD$ ，且当  $AD$  成水平时，平行四边形构成直角，此时  $H$  的位置即导杆旋转轴的位置。他完全用几何直觉，没有用分析方法就得到活塞运动的轨迹。

六年后，1790 年法国工程师 Prony 作了一些理论研究。他在总结他的研究时写道“看来，为了要使机器运动正常以及使机器零件不损坏，需要将摇臂及导杆放在汽缸上的某个位置，使得活塞联接杆固定点所描述的曲线在活塞运动时是一个最接近于某条垂线的曲线的一部分。这是多么重要的事啊！”这样，Prony 对 Watt 的平行四边形就有了进一步的认识。他要求平行四边形所构成的系统在绕摇臂的固定点  $A$  转动时，点  $H$  离开某条垂线  $QH$  的偏差不大（图 6），且  $H$  三次位于垂线上（两次在两个极端位置，即摇臂的最高位置与最低位置，它们是对称的，一次是中间位置）。 $H$  的三个位置对应了  $G$  的三个位置，通过这三个位置画一个圆周所得到的圆心即  $K$ 。半径  $GK$  就是导杆的长度。这个半径满足条件，即调节  $H$  的运动，使  $H$  三次在一条垂线上，而在其他情况下，点  $H$  离此垂线的偏差不大，但是需要确定其间的比例。至于如何确定这个比例，这在当时是没有解决的。

很多设计师就开始研究上述的“三点原则”。应该指出，Prony 没有说明这三个点应该在什么直线上才是最好的。从 Prony 的工作可以推出，他的直线就是平均分割摇臂端点所描述的弧指针，即  $AD - AH = AH - AD_1$ （图 7）。



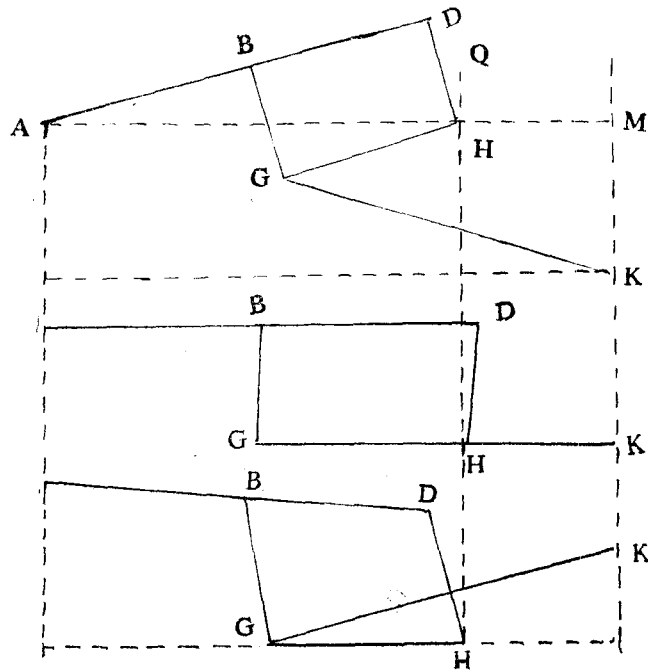


图 6

Prony 虽然提出了重要的问题,但是没有彻底地解决. 在谈到“三点原则”时,上述的结论是否正确? 如何确定  $AD-AH$  与  $AH-AD_1$  的比例最合适以及如何确定机械零件之间的最好关系? 这些问题都值得进一步研究.

以后,英国工程师 T. Tredgold 在 1835 年从实用的角度来研究 Watt 平行四边形. 为了保持机械能更均匀地运动,他要求在初始位置时,杆  $AB$  与  $CD$  平行;在活塞运动终了时,杆  $BC$  应位于垂直位置(图 8),这样可以减少活塞运动终了时的打击力. 这里,同样需要确定  $BD$  上的点  $E$ ,使得它在机械的三个位置上(两个极端位置及一个中间位置)位于同一条垂线上. 当  $AB=CD$  时,容易证明  $BE = \frac{1}{2}BD$ ,即  $E$  位于  $BD$  的中点.

他还考虑 Watt 的完全平行四边形. 当已知摇臂长度、其自由部分长度以及活塞长度时,要求确定导杆的长度. 这里,象上面一样,要求平行四边形的一点在活塞运动的初始及最终位置上位于一条垂直线上. 容易看出,此时活塞杆运动所对应的直线是摇臂所描述的弧的弦.

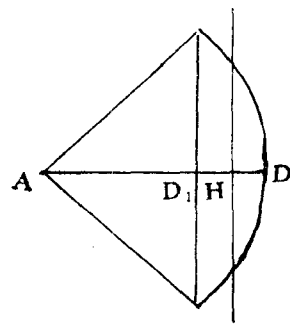


图 7

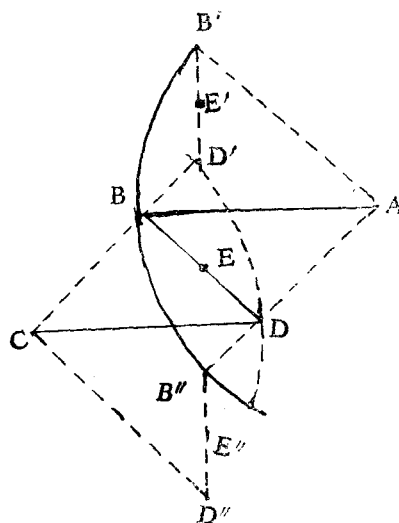


图 8

A. C. Ершов 在 1854 年出版了“动力学基础”一书。这本书比较完整地叙述了 Watt 平行四边形理论的发展概况。他也考虑各种平行四边形，给出了数值解法。在他的机械中也是要求活塞杆的固定点三次位于通过弧指针的中心直线上。

此外，J. Weisbach 在 1867 年出版的“工程与机械力学”一书中也对 Watt 平行四边形作了研究。他的研究方法与 Prony 的方法也很类似。

总结上面的介绍可以看出：在设计 Watt 的平行四边形中，基本问题在于：给定了摇臂、其自由部分以及联接杆的尺寸，要求确定导杆的长度及其旋转轴的位置，使得活塞联接杆固定点能作出最接近于直线的运动。解决这个问题的基本原则在于，在活塞运动的开始、中间以及终了时，联在平行四边形上的固定点应该位于一条垂线上。这就可以单值地来确定导杆的长度及旋转轴的位置。但是在前面所介绍的这几个人的工作中，没有解决这个垂线的最好位置的问题（这里指的是在运动时，活塞固定点对此垂线的偏差值尽可能地小）。各人有各人的选法：Prony 与 Ершов 选取通过摇臂所描述的弧指针的中心垂直位置，Tredgold 是选择这段弧的弦，而在 Watt 本人的机器上，此垂直线是这段弧的中心点处的切线。

在过渡到构造更大功率及更高速运转的机器时，发现了 Watt 平行四边形及其机器其他零件的缺点。尽管如此，在这些机器的运转过程中，活塞固定点离开某条垂直线的偏差“不大”，但是这些量决不能忽视，因为这会产生很大的侧压力而损伤机器的零件。Чебышев 就严肃地对这个问题进行了认真的理论研究。