1982年 第2卷 第8期
Vol.2, No.3, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

$A_{m\times n}$矩阵的加边矩阵的奇异性问题*

程 志 斌

(华中工学院自控系)

提 要

给定$m\times n$阶矩阵A，我们给出了它的加边矩阵

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & O \end{pmatrix} \tag{1}$$

为非奇的充分必要条件．其中O为$r_1\times r_2$阶零矩阵．把M的逆矩阵记为分块形式

$$M^{-1}=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$$

其中C_1为$n\times m$、C_2为$n\times r_1$、C_3为$r_2\times m$、C_4为$r_2\times r_1$阶矩阵．在一定条件下，我们证明了其中的C_1为A的广义逆矩阵A^+．

引 言

对奇异矩阵的加边矩阵的奇异性问题已有的讨论是：当A为$n\times n$对称阵，即$A'=A$时，其加边阵为

$$M=\begin{pmatrix} A & K \\ K' & O \end{pmatrix}$$

的情形，其中K是$n\times r$阶矩阵．文章[1]讨论了M的奇异性问题，文章[2]推广了[1]的结果，把条件$A'=A$放宽到$N(A')=N(A)$，这里$N(A)=\{X:AX=O\}$，其中X为$n\times 1$向量．继后文章[3]又把M的形式推广为

$$M=\begin{pmatrix} A & K \\ H & O \end{pmatrix} \tag{2}$$

* 1981年6月6日收到．

其中A为 $n\times n$ 阶矩阵，K和H分别为 $n\times r$ 和 $r\times n$ 阶矩阵。在条件 $N(H)=N(K')$ 下推广了［2］中的结果，同时也证明了，若形式（2）的矩阵M是非奇的，则其逆的分块矩阵是A的广义逆之一。

本文在此基础上又进行了推广，证明了对任意 $m\times n$ 阶矩阵A，条件*

$$\mu_c(A)\cap\mu_c(B)=\{O\};\ \mu_r(A)\cap\mu_r(C)=\{O\},$$

是形如（1）的加边矩阵M非奇的充分必要条件，同时也证明了在M非奇异的时候，只要满足上述条件之一，则加边矩阵M的逆矩阵的分块可以用来计算A的广义逆 A^+。

主 要 结 果

在给出定理之前，首先介绍几个引理。

引理一 秩 $(A,B)=$ 秩 $(A)+$ 秩 (B) 的充分必要条件是 $\mu_c(A)\cap\mu_c(B)=\{O\}$。

引理二 秩 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=$ 秩 $(A)+$ 秩 (B) 的充分必要条件是 $\mu_r(A)\cap\mu_r(B)=\{O\}$。

对这两个引理，只要注意到线性空间的维数公式及 $\mu_c(A)\cup\mu_c(B)=\mu_c(A,B)$、$\mu_r(A)\cup\mu_r(B)=\mu_r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$，那么结论是显然的。

另外，我们设 $M=\begin{pmatrix}A & B\\C & O\end{pmatrix}$，其中A为 $m\times n$、B为 $m\times r_2$、C为 $r_1\times n$ 阶矩阵，O为 $r_1\times r_2$ 阶零矩阵。秩 $A=q$，秩 $B=r_2=m-q$，秩 $C=r_1=n-q$，$m+r_1=n+r_2$。则在此条件下，我们有如下定理：

定理一 矩阵M非奇的充要条件是

$$\mu_c(A)\cap\mu_c(B)=\{O\},\ \mu_r(A)\cap\mu_r(C)=\{O\}$$

证明 充分性。由条件及引理一、二容易知道秩 $(A,B)=m$，秩 $\begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix}=n$。进而考察，$\begin{pmatrix}A & B\\C & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\-k_2\end{pmatrix}=O$ 其中 k_1 为任意的 $n\times1$ 向量，$-k_2$ 为任意的 $r_2\times1$ 向量由此可得

$$Ak_1=Bk_2,\ \begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix}k_1=\begin{pmatrix}B\\O\end{pmatrix}k_2.$$

根据 $Ak_1\in\mu_c(A)$、$Bk_2\in\mu_c(B)$ 及条件 $\mu_c(A)\cap\mu_c(B)=\{O\}$，可以得到 $Ak_1=Bk_2=O$。因为秩 $B=r_2$，故有 $k_2=O$。于是就有 $\begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix}k_1=O$。又由所设与引理2知秩 $\begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix}=n$，由此有 $k_1=O$，从而 $\begin{pmatrix}k_1\\-k_2\end{pmatrix}=O$。据此，M为非奇。

* 记号 $\mu_c(A)$ 表示A的列向量张成的右线性空间，$\mu_r(A)$ 表示A的行向量张成的左线性空间。

必要性．已知$M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & O\end{pmatrix}$非奇，则应有秩$(A,B)=m$，秩$\begin{pmatrix}A\\ C\end{pmatrix}=n$，而在此处，已知秩$B=m-q$，秩$C=n-q$，秩$A=q$，所以有秩$(A,B)=$秩$A+$秩$B$，秩$\begin{pmatrix}A\\ C\end{pmatrix}=$秩$A+$秩$C$成立．因此，由引理1、2立即可得

$$\mu_C(A)\cap\mu_C(B)=\{O\},\ \mu_r(A)\cap\mu_r(C)=\{O\}.$$

定理二　设M非奇，且$M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & O\end{pmatrix}$，其中A为$m\times n$、B为$m\times r_2$、C为$r_1\times n$阶矩阵，O为$r_1\times r_2$阶零矩阵．如果条件

$$\mu_C(A)\cap\mu_C(B)=\{O\},\ \mu_r(A)\cap\mu_r(C)=\{O\}$$

当中只要有一个成立，则其逆M^{-1}分块形式中的C_1可以作为矩阵A的广义逆矩阵A^+，

证明　记$M^{-1}=\begin{pmatrix}C_1 & C_2\\ C_3 & C_4\end{pmatrix}$，其中$C_1$为$n\times m$、$C_2$为$n\times r_1$、$C_3$为$r_2\times m$、$C_4$为$r_2\times r_1$阶矩阵，则有

$$MM^{-1}=\begin{pmatrix}AC_1+BC_3 & AC_2+BC_4\\ CC_1 & CC_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_m & O\\ O & I_{r_1}\end{pmatrix}$$

$$M^{-1}M=\begin{pmatrix}C_1A+C_2C & C_1B\\ C_3A+C_4C & C_3B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_n & O\\ O & I_{r_2}\end{pmatrix}.$$

由此即有

$$AC_1+BC_3=I_m \tag{3}$$

$$C_1A+C_2C=I_n \tag{4}$$

$$C_1B=O \tag{5}$$

$$CC_1=O \tag{6}$$

设条件$\mu_C(A)\cap\mu_C(B)=\{O\}$成立，由(3)式，得$AC_1A+BC_3A=A$，即

$$A(C_1A-I_n)=B(-C_3A).$$

由条件知$A(C_1A-I_n)=B(-C_3A)=O$，故

$$AC_1A=A \tag{7}$$

又由(3)式，得$C_1AC_1+C_1BC_3=C_1$．根据(5)式$C_1B=O$，知

$$C_1AC_1=C_1 \tag{8}$$

由(7)、(8)式知道C_1为A的广义逆A^+．

完全类似地可证在条件$\mu_r(A)\cap\mu_r(C)=\{O\}$时$C_1$亦为$A$的广义逆$A^+$．

参考文献

[1] Goldman, A. J. and Zenlen, M. Weak generalized, inverse and Minimum Variance Linear Unbiased estimation, *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect.* B 688 (1964).

[2] Hearon, John Z. On the Singularity of a Certain Bordered Matrix, *SIAM* J. 15 No. 6, 1967.

[3] 林春土，加边矩阵的奇异性问题，浙江大学学报，1 (1981).

On Singularity of Bordered Matrix of any Matrix $A_{m\times n}$

By Cheng Zhibin (程志斌)

Abstract

In this paper the sufficient and necessary conditions of the nonsingularity of M are to be given. $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & O \end{pmatrix}$ is the bordered matrix of any $m\times n$ order matrix A, where O is the zero matrix. The inverse matrix of M is experessed as the blocked form: $M^{-1}=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$, where C_1 is $n\times m$ order matrix, C_2 is $n\times r_1$ order matrix, C_3 is $r_2\times m$ order matrix, C_4 is $r_2\times r_1$ order matrix. Under certain conditions, we prove that C_1 is the generalized inverse matrix of A, which defined as A^+.