1982年 第2卷 第3期
Vol.2, No.3, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

Bellman-Bihari积分不等式的一个推广

张炳根

（山东海洋学院）

在微分方程与积分方程解的定性研究中，积分不等式是一个有效的工具，用它解决问题有时比用李雅普诺夫第二方法更为有用，因为利用积分不等式不仅可以得到解的有界性、稳定性一类的定性结论，而且往往可以得到解的估计。

由于积分不等式的重要性，近年来不断有人发表这方面的文章，特别是Gronwall-Bellman不等式的各种各样的推广。

在这篇短文中，主要贡献在于改进U. D.Dhongade[1]等建立的Bellman-Bihari型积分不等式的估计精度。我们举例说明本文建立的不等式的精度是最佳的；其次，作为该不等式的应用，我们研究一类非线性微分差分方程解的有界性、稳定性问题。得到的结果也改进或包括了文[3][4]中的部份结果。

在文[1]中Dhongade建立了并在文[4]中又重新证明了一个积分不等式，我们以引理方式把该结果叙述如下。

引理 假设

(i) $\theta(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$: $[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是连续的；

(ii) $\Omega(u)$是非负变元的非负单调非减连续函数，且 $\Omega(xy)\leqslant\Omega(x)\Omega(y)$。

若

$$\theta(t)\leqslant c_1+\int_0^t\alpha(s)\theta(s)ds+\int_0^t\beta(s)\Omega(\theta(s))ds\ , \tag{1}$$

$c_1>0$, $0\leqslant t<\infty$，则有估计

$$\theta(t)\leqslant\exp\left(\int_0^t\alpha(s)ds\right)G^{-1}\left[G(c_1)+\int_0^t\beta(s)\Omega\left(\exp\int_0^s\alpha(u)du\right)ds\right] \tag{2}$$

对一切 $t\in[0,b]$成立，这样的 t 保证有

$$G(c_1)+\int_0^t\beta(s)\Omega\left(\exp\int_0^s\alpha(u)du\right)ds\in \mathrm{Dom}(G^{-1}) \tag{3}$$

* 1981年4月20日收到。

其中

$$G(u)=\int_{u_0}^{u}\frac{ds}{\Omega(s)},\qquad u_0>0,\ u\geqslant 0 \tag{4}$$

我们发现公式(2)是可以改进的，我们得到下列定理。

定理1 在上述引理的条件下成立如下更为精确的估计

$$\theta(t)\leqslant\exp\left(\int_0^t\alpha(s)ds\right)G^{-1}\left[G(c_1)+\int_0^t\beta(s)\exp\left(-\int_0^s\alpha(u)du\right)\cdot\Omega\left(\exp\int_0^s\alpha(u)du\right)ds\right] \tag{5}$$

对一切 $t\in[0,b]$成立，这样的 t 保证有

$$G(c_1)+\int_0^t\beta(s)\exp\left(-\int_0^s\alpha(u)du\right)\Omega\left(\exp\int_0^s\alpha(u)du\right)ds\in Dom(G^{-1}) \tag{6}$$

证明 令

$$\psi(t)=c_1+\int_0^t\beta(s)\Omega(\theta(s))ds,\qquad c_1>0 \tag{7}$$

则公式(1)写成

$$\theta(t)\leqslant\psi(t)+\int_0^t\alpha(s)\theta(s)ds, \tag{8}$$

$\psi(t)$是绝对连续的，容易知道是可以利用已知的不等式[2]的。于是得

$$\theta(t)\leqslant\psi(0)\exp\left(\int_0^t\alpha(s)ds\right)+\int_0^t\exp\left(\int_\tau^t\alpha(s)ds\right)\frac{d\psi}{d\tau}d\tau \tag{9}$$

令

$$n(t)=c_1+\int_0^t\exp\left(-\int_0^\tau\alpha(s)ds\right)\beta(\tau)\Omega(\theta(\tau))d\tau, \tag{10}$$

则

$$\theta(t)\leqslant n(t)\exp\left(\int_0^t\alpha(s)ds\right). \tag{11}$$

于是在(11)式两边取Ω，注意关于Ω的条件(ii)，移项以后得

$$\frac{\Omega(\theta(t))\beta(t)\exp\left(-\int_0^t\alpha(s)ds\right)}{\Omega(n(t))}\leqslant\beta(t)\exp\left(-\int_0^t\alpha(s)ds\right)\cdot\Omega\left(\exp\int_0^t\alpha(s)ds\right),$$

即

$$\frac{dG(n(t))}{dt}\leqslant\beta(t)\exp\left(-\int_0^t\alpha(s)ds\right)\Omega\left(\exp\int_0^t\alpha(s)ds\right).$$

两边积分并取逆，得

$$n(t)\leqslant G^{-1}\left[G(c_1)+\int_0^t \beta(t_1)\exp\left(-\int_0^{t_1}\alpha(s)ds\right)\right.$$

$$\left.\cdot\,\Omega\left(\exp\int_0^{t_1}\alpha(s)ds\right)dt_1\right]. \tag{12}$$

显然这一步必须要求方括号内的函数值落在 G^{-1} 的定义域内，即公式(6)的要求。

最后，结合(11)式和(12)式，即得

$$\theta(t)\leqslant\exp\left(\int_0^t\alpha(s)ds\right)G^{-1}\left[G(c_1)+\int_0^t\exp\left(-\int_0^\tau\alpha(s)ds\right)\beta(\tau)\right.$$

$$\left.\cdot\,\Omega\left(\exp\int_0^\tau\alpha(s)ds\right)d\tau\right].$$

定理证毕。

注 本文所得的公式(5)与文[1]的公式(2)比较，在于公式(5)中第二个积分号下比公式(2)多了一个因子 $\exp\left(-\int_0^t\alpha(u)du\right)$，这是一个小于 1 的因子。而函数G，因而 G^{-1}，对 $u\geqslant u_0$ 是单调非减的。所以公式(5)比公式(2)精度高。为了进一步说明这个问题，下面来分析一个例子：

例 考察贝努利方程

$$\theta'=\frac{1}{1+t}\theta+\frac{\theta^2}{(1+t)^5}, \tag{13}$$

等价地，有

$$\theta=\theta_0+\int_0^t\frac{1}{1+s}\theta(s)ds+\int_0^t\frac{\theta^2(s)}{(1+s)^5}ds. \tag{14}$$

方程(13)的精确解是

$$\theta(t)=\frac{3(1+t)^4\theta_0}{\theta_0-(1+t)^3(\theta_0-3)}. \tag{15}$$

对 $\theta_0>0$，利用本文得到的公式(5)，从(14)式也得

$$\theta(t)\leqslant\frac{3(1+t)^4\theta_0}{\theta_0-(1+t)^3(\theta_0-3)} \tag{16}$$

估计式(16)的右端与精确解(15)重合。由此可以得知本文得到的不等式(5)是最佳的、不可改进的。当然，公式(16)只在定理 1 规定的 $t\in[0,b]$内有效。

为了比较，我们考虑用 Dhongade 的公式(2)来估计(14)，得

$$\theta(t)\leqslant\frac{2\theta_0(1+t)^3}{(2-\theta_0)(1+t)^2+\theta_0}. \tag{17}$$

估计式(17)没有估计式(16)来得精确。我们再算一组数值来比较：

$\theta_0=1$	t	公式(16)	公式(17)
	9	$\theta\leqslant 14.99$	$\theta\leqslant 19.80$
	99	$\theta\leqslant 150.00$	$\theta\leqslant 199.98$
	109	$\theta\leqslant 165.00$	$\theta\leqslant 219.98$

这个例子表明本文的公式(5)确实比文[1]的公式(2)精度要高，而且公式(5)是最佳的、不能再改进的. 另一个可以注意的是本文的公式(5)比公式(2)适用的范围广，这是指对 θ_0 和 t 而言的.

定理1建立的不等式在常微分方程稳定性理论上的应用见文[4]，我们这里发展作者在文[3]中的思想，把它用到非线性微分差分方程解的稳定性的研究中去.

我们考虑方程

$$y'(t)=f(t,y(t-\tau_1),\ y(t-\tau_2)) \tag{18}$$

这里 y, f 为 n 维向量，τ_1,τ_2 为非负常数(下述结果对 τ_1,τ_2 为非负连续有界函数也成立).

令 $\tau=\max\{\tau_1,\tau_2\}$，对方程(18)的初始条件为 $t\in[t_0-\tau,t_0]$ 时 $y(t)=\varphi(t)$，$\varphi(t)$ 为给定的 n 维连续有界函数，$\|\varphi(t)\|\leqslant M$.

定理2 若方程(18)之右端满足条件

$$\|f(t,y(t-\tau_1),\ y(t-\tau_2))\|\leqslant\alpha(t)\|y(t-\tau_1)\|+\beta(t)\Omega(\|y(t-\tau_2)\|), \tag{19}$$

其中 Ω 满足定理1的条件，则对(19)之一切解有估计式

$$\|y(t)\|\leqslant\exp\int_{t_0}^{t}\alpha(s)ds\,G^{-1}\Big[G(M)+\int_{t_0}^{t}\beta(s)\exp\Big(-\int_{t_0}^{s}\alpha(s)ds\Big)\cdot\Omega\Big(\exp\int_{t_0}^{s}\alpha(u)du\Big)ds\Big], \tag{20}$$

上式对 $t\in[t_0,b]$ 成立，这样的 t 能保证

$$G(M)+\int_{t_0}^{t}\beta(s)\exp\Big(-\int_{t_0}^{s}\alpha(s)ds\Big)\Omega\Big(\exp\int_{t_0}^{s}\alpha(u)du\Big)ds\in Dom(G^{-1}).$$

证 从(18)得

$$\|y(t)\|\leqslant\|y(t_0)\|+\int_{t_0}^{t}\alpha(s)\|y(s-\tau_1)\|ds+\int_{t_0}^{t}\beta(s)\Omega(\|y(s-\tau_2)\|)ds.$$

若令

$$\theta(t)=\max\{\max_{t\geqslant t_1\geqslant t_0}\|y(t_1)\|,\ M\},$$

则有

$$\theta(t)\leqslant M+\int_{t_0}^{t}\alpha(s)\theta(s)ds+\int_{t_0}^{t}\beta(s)\Omega(\theta(s))ds.$$

于是对它用定理1的公式(5)，即得希望有的结果(20).

推论1 除满足定理2的条件外，还有条件

(i)　$G(u)\to\infty$　当 $u\to\infty$；

(ii)　$\int^{\infty}\alpha(u)du<\infty$；

(iii) $\int^{\infty}\beta(s)\exp\left(-\int_0^s\alpha(u)du\right)\Omega\left(\exp\int_0^s\alpha(u)du\right)ds<\infty$,

则方程(18)之一切解有界.

推论2　除推论 1 的条件外还有条件：$\int_0^{\delta}\frac{ds}{\Omega(s)}$ 在 $\delta>0$ 时发散，则方程 (18) 的零解稳定.

实际上，条件(19)意味着方程(18)有零解，这里 $\Omega(0)=0$.

在推论 2 的条件下，有 $G^{-1}(u)\to 0$ 当 $u\to\infty$. 这样一来，在(20)中选择 M 足够小，使 $G(M)$ 足够大；从而保证(20)的右端可以小于任意给定的小数，即得解的稳定性.

由于方程(18)中 $\tau_1=\tau_2=0$ 即成为常微分方程，从而这里的结果包括并改进了文[4]中的部份结果，本文也是文[3]的一个推广.

参　考　文　献

[1] Dhongade, U.D. and Deo, S.G. Some generalizations of Bellman-Bihavi integral inequalities, J.Math. Anal. Appl., 44 218-228, 1973.

[2] Sansone G. and Conti, R., Non-linear Differential Equations, 1964, Pergaman press, P. 12.

[3] 张炳根，具时滞微分差分方程解的稳定性，高等学校自然科学学报，数学，力学，天文学版，V. 1. N. 2. 123—135, 1965.

[4] Dhongade, U.D., On Boundedness and Stability of Perturbed Differential and Integral Equations, Rev. Roum. Math. pures et Appl., T. XXⅠ, N. 7, P. 909—916, Bucarest, 1977.

A Generalization of Bellman-Bihari Integral Inequality

By Zhang Binggen (张炳根)

Abstract

The result of this paper improves a result of Dhongade[1] on the generalization of the Bellman-Bihari integral inequality.

We have:

Theorem 1. Suppose

(i)　$\theta(t),\alpha(t),\beta(t):[0,+\infty)\to[0,\infty)$ are continuous;

(ii)　$\Omega(u)$ is nonnegative, non-decreasing, continuous, submultiplicative for $u\geqslant 0$.

If

$$\theta(t)\leqslant c_1+\int_0^t \alpha(s)\theta(s)ds+\int_0^t \beta(s)\Omega(\theta(s))ds,\quad 0\leqslant t<\infty,$$

where c_1 is a positive constant, then

$$\theta(t)\leqslant \exp\left(\int_0^t \alpha(s)ds\right)G^{-1}\left[G(c_1)+\int_0^t \beta(s)\exp\left(-\int_0^s \alpha(u)du\right)\right.$$

$$\left.\Omega\left(\exp\left(\int_0^s \alpha(u)du\right)\right)ds\right],\ t\in[0,b],$$

where

$$G(u)=\int_{u_0}^{u}\frac{ds}{\Omega(s)}.\quad u_0>0,\ u\geqslant 0,$$

G^{-1} is the inverse of G and t is chosen such that

$$G(c_1)+\int_0^t \beta(s)\exp\left(-\int_0^s \alpha(u)du\right)\Omega\left(\exp\int_0^s \alpha(u)du\right)ds\in \mathrm{Dom}(G^{-1}).$$

The example in this paper shows that our result is not improvable. and then, we consider

$$y'(t)=f(t,y(t-\tau_1),\ y(t-\tau_2)),\qquad (*)$$

where τ_1,τ_2 are nonnegative constants, y, f are n-vectors.

Theorem 2. Suppose

$$\|f(t,y(t-\tau_1),y(t-\tau_2))\|\leqslant\alpha(t)\|y(t-\tau_1)\|+\beta(t)\Omega(\|y(t-\tau_2)\|),$$

where Ω satisfies the Conditions in (ii) of theorem 1, Then

$$\|y(t)\|\leqslant\exp\left(\int_{t_0}^t \alpha(s)ds\right)G^{-1}\left[G(M)+\int_{t_0}^t \beta(s)\exp\left(-\int_{t_0}^s \alpha(u)du\right)\right.$$

$$\left.\cdot\,\Omega\left(\exp\left(\int_{t_0}^s \alpha(u)du\right)\right)ds\right],\quad t\in[0,b],$$

t is chosen such that

$$G(M)+\int_{t_0}^t \beta(s)\exp\left(-\int_{t_0}^s \alpha(u)du\right)\Omega\left(\exp\left(\int_{t_0}^s \alpha(u)du\right)\right)ds\in \mathrm{Dom}(G^{-1}).$$

Corollary 1. If in addition to the conditions in theorem 2, we suppose that

(i) $G(u)\to\infty$ as $u\to\infty$;

(ii) $\int^\infty \alpha(u)du<\infty$;

(iii) $\int^\infty \beta(s)\exp\left(-\int_0^s \alpha(u)du\right)\Omega\left(\exp\left(\int_0^s \alpha(u)du\right)\right)ds<\infty$,

then all solutions of the equation (*) are bounded.

If there is an additional condition that

(iv) $\int_0^\delta \frac{ds}{\Omega(s)}$ is divergent,

then the solution $y\equiv 0$ of the eguation (*) is stable,