1982年　第2卷　第3期
Vol.2, No.3, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

分解理论在线性迭代系统中的应用*

王慕秋（中国科学院数学研究所）
刘永清（华　南　工　学　院）
王　联（中国科学院数学研究所）

§1 前　言

研究线性迭代系统

$$x_{m+1}=\mathrm{P}x_m \qquad (1)$$

其中P是$n\times n$阶常量矩阵，x_m是n维向量，它是整数变量m的函数。

大家知道，对于常系数线性微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=\mathrm{A}x \qquad (2)$$

而言，如果A的特征方程的根均具有负实部，Ляпунов本人已证明了：对于给定的负定m次型W，一定存在一个并且只有一个满足

$$\frac{dV}{dt}=W$$

的正定m次型V。但是对（2）怎样具体构造出Ляпунов函数，直到1959年蔡燧林第一个给出了一个具体的Ляпунов函数公式。后来，苏联Барбащин作出了形式简洁，并更为普遍的Ляпунов函数公式。

本文第一部分是具体构造出线性迭代系统（1）的Ляпунов函数公式。第二部分研究分解理论在迭代系统中的应用。

§2 线性迭代系统的Ляпунов函数公式

考虑线性迭代系统

$$x_{m+1}=\mathrm{P}x_m \qquad (1)$$

* 1981年6月19日收到。

这里P是$n\times n$阶的常量矩阵，x_m是n维向量，它是整数变量m的函数。

对于线性迭代系统(1)的解的稳定性问题，可以很好地得到解决，原因是它与线性微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=Ax \qquad (2)$$

(其中x是n维列向量，A是$n\times n$阶的常量矩阵)的稳定性理论有密切的联系。

对系统(2)而言，如果矩阵A的特征方程 $|A-\lambda E|=0$ 的所有根均具有负实部，则对给定的负定二次型$w(x)=x'Cx$ (C<0)，存在唯一的满足

$$\frac{dV}{dt}=W \qquad (3)$$

的正定二次型 $V=x'Bx$ (B>0)。

即对于给定的矩阵 C (C<0)，方程

$$A'B+BA=C$$

可以唯一地确定矩阵 B(B>0)。

Барбащин 进一步给出了n阶常系数线性系统(2)的 Ляпунов 函数公式，给定 $W=\sum_{i,k=1}^{n}C_{ik}x_ix_k$ 及 $V=\sum_{i,k=1}^{n}B_{ik}x_ix_k$，它们满足方程

$$\dot{V}=2W \qquad (4)$$

则得

$$V=-\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & \cdots & 2x_ix_k & \cdots & x_n^2 \\ c_{11} & a_{11} & \cdots\cdots & & & \\ \vdots & \cdots\cdots & & & & \\ 2c_{jl} & a(11,jl) & \cdots & a(ik,jl) & \cdots & a(nn,jl) \\ \vdots & \cdots\cdots & & & & \\ c_{nn} & a(11,nn) & \cdots & a(ik,nn) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (5)$$

其中

$$a(ik,jl)=a(ki,jl)=a(ki,lj) \qquad (6)$$

$$a(ik,jl)=\begin{cases} 0 & 当 i\neq j,\ k\neq l,\ k\neq j,\ i\neq l \\ a_{kl} & 当 i=j,\ k\neq l \\ a_{ii}+a_{kk} & 当 i=j,\ k=l,\ i\neq k \\ a_{ii} & 当 i=j=k=l \end{cases} \qquad (7)$$

Δ为(5)的行列式中去掉第一行和第一列后的n阶行列式。

众所周知，对方程(1)而言，当矩阵P的所有特征数μ_i满足条件 $|\mu_i|<1$ 时，则系统(1)的零解是全局稳定的。

对系统(1)作二次型的 Ляпунов 函数

$$U=x'Rx \qquad (8)$$

引进表示

$$U_m=x_m'Rx_m$$

我们得到

$$U_{m+1}-U_m=x'_{m+1}Rx_{m+1}-x'_mRx_m=x'_m(P'RP-R)x_m$$

如果我们要使函数U的增量$\Delta U=U_{m+1}-U_m$等于给定的二次型$x'Cx$，则我们得到矩阵方程

$$P'RP-R=C \tag{9}$$

对于给定的C(C<0)，是否存在唯一的R(R>0)?

引理　当矩阵P的所有根μ_i,满足$|\mu_i|<1$时,方程(9)是可解的,即对于给定的C(C<0)，方程(9)可以唯一地解出R(R>0)。

证　首先由P作出

$$A=(P+E)(P-E)^{-1} \tag{10}$$

这里E是单位矩阵，由此得出矩阵P的特征数μ与矩阵A的特征数λ之间存在关系

$$\lambda=\frac{\mu+1}{\mu-1} \tag{11}$$

故由条件$|\mu_i|<1$可得出$\lambda_i<0$　$(i=1,\cdots,n)$，即矩阵A的特征方程之根均具有负实部。

如果矩阵R满足(9)，则矩阵

$$B=(P'-E)R(P-E) \tag{12}$$

满足方程

$$A'B+BA=2C \tag{13}$$

其中$A=(P+E)(P-E)^{-1}$(证明参阅[1])。因为A的特征方程之根均具有负实部，故对给定的C(C<0)，由方程(13)可以唯一地确定B，且B>0，再由(12)式得

$$R=(P'-E)^{-1}B(P-E)^{-1} \tag{14}$$

且R是正定的。

我们利用引理及Барбащин公式，可以得出系统$x_{m+1}=Px_m$的当$|P-\mu E|=0$之根μ_i满足$|\mu_i|<1$ $(i=1,\cdots n)$时的Ляпунов函数公式，具体构造如下：

第一步：由P作出A：

$$A=(P+E)(P-E)^{-1}$$

第二步：由给定的C及A通过下面方程

$$A'B+BA=2C$$

求出B。这里若令$W=\sum_{i,j=1}^{n}C_{ij}x_ix_j$，$V=\sum_{i,j=1}^{n}B_{ij}x_ix_j$，利用Барбащин公式得出

$$V=-\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & \cdots & 2x_ix_k & \cdots & x_n^2 \\ c_{11} & a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2c_{jl} & a(11,jl) & \cdots & a(ik,jl) & \cdots & a(nn,jl) \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{nn} & a(11,nn) & \cdots & a(ik,nn) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{5}$$

其中 $a(ik,jl)$ 的符号如（6）、（7）所示，这样B已确定。

第三步：由公式

$$R=(P'-E)^{-1}B(P-E)^{-1}$$

确定R．$V=x'Rx$即为我们所求的 Ляпунов 函数．

§3 线性迭代系统中的分解问题

我们在上面已经指出，如果

$$x_{m+1}=Px_m \tag{1}$$

中P的特征方程

$$|P-\mu E|=0 \tag{15}$$

的根 μ_i，具有性质

$$|\mu_i|<1 \qquad (i=1,\cdots,n) \tag{16}$$

则（1）的零解是全局稳定的．

但当 n 相当大时，要判别 n 阶方程的根的绝对值均小于1，计算量相当大．下面我们把稳定性理论中方程组的分解问题[2]中的处理方法用到线性迭代系统（1）上来，刘永清[3]曾研究过这个问题．这里我们进一步给出了具体的计算步骤与公式，这是由于我们已经在§2中具体构造出了系统（1）的 Ляпунов 函数后才能作到这一点．

下面我们以 $n=2$ 的情形为例来说明分解问题的实质．

在研究系统

$$\left.\begin{aligned}x_{m+1}^{(1)}&=P_{11}x_m^{(1)}+P_{12}x_m^{(2)}\\x_{m+1}^{(2)}&=P_{21}x_m^{(1)}+P_{22}x_m^{(2)}\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

同时，我们研究系统

$$\left.\begin{aligned}x_{m+1}^{(1)}&=P_{11}x_m^{(1)}\\x_{m+1}^{(2)}&=P_{22}x_m^{(2)}\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

其中 $|P_{11}|<1$，$|P_{22}|<1$．

对(18)中的第一个方程作Ляпунов函数，我们可以简单地取 $V^{(1)}=x^{(1)2}$

$$V_{m+1}^{(1)}-V_m^{(1)}=x_{m+1}^{(1)2}-x_m^{(1)2}\overset{\text{由(18)}}{=}(P_{11}x_m^{(1)})^2-x_m^{(1)2}=-(1-P_{11}^2)x_m^{(1)2}$$

同理，对(18)中第二个方程作 Ляпунов 函数 $V^{(2)}=x^{(2)2}$，我们有

$$V_{m+1}^{(2)}-V_m^{(2)}=-(1-P_{22}^2)x_m^{(2)2}$$

取 $V=V^{(1)}+V^{(2)}$ 作为（18）的 Ляпунов 函数，我们有

$$[V_{m+1}-V_m]_{(18)}=[V_{m+1}^{(1)}+V_{m+1}^{(2)}-V_m^{(1)}-V_m^{(2)}]_{(18)}=[V_{m+1}^{(1)}-V_m^{(1)}]_{(18)}+[V_{m+1}^{(2)}-V_m^{(2)}]_{(18)}=$$
$$=-[(1-P_{11}^2)x_m^{(1)2}+(1-P_{22}^2)x_m^{(2)2}]\quad \text{负定．}$$

我们再取以上Ляпунов函数$V=V^{(1)}+V^{(2)}$作为(17)的Ляпунов函数，则$[V_{m+1}-V_m]_{(17)}$

$$=[V_{m+1}^{(1)}+V_{m+1}^{(2)}-V_m^{(1)}-V_m^{(2)}]_{(17)}=[V_{m+1}^{(1)}-V_m^{(1)}]_{(17)}+[V_{m+1}^{(2)}-V_m^{(2)}]_{(17)}=(x_{m+1}^{(1)2}-x_m^{(1)2}]_{(17)}$$
$$+[x_{m+1}^{(2)2}-x_m^{(2)2}]_{(17)}=[P_{11}x_m^{(1)}+P_{12}x_m^{(2)}]^2-x_m^{(1)2}+[P_{21}x_m^{(1)}+P_{22}x_m^{(2)}]^2-x_m^{(2)2}=P_{11}^2x_m^{(1)2}-x_m^{(1)2}$$
$$+P_{22}^2x_m^{(2)2}-x_m^{(2)2}+2P_{11}P_{12}x_m^{(1)}x_m^{(2)}+P_{12}^2x_m^{(2)2}+P_{21}^2x_m^{(1)2}+2P_{21}P_{22}x_m^{(1)}x_m^{(2)}\leqslant-[(1-P_{11}^2)x_m^{(1)2}+$$

$(1-P_{22}^2)x_m^{(2)^2}]+2|P_{11}|\ |P_{12}|\ |x_m^{(1)}|\ |x_m^{(2)}|+P_{12}^2x_m^{(2)^2}+P_{21}^2x_m^{(1)^2}+2|P_{21}|\ |P_{22}|\ |x_m^{(1)}||x_m^{(2)}|\leqslant-[(1-P_{11}^2)x_m^{(1)^2}+(1-P_{22}^2)x_m^{(2)^2})+(|P_{12}|\ |P_{11}|+|P_{21}|\ |P_{22}|+P_{21}^2)x_m^{(1)^2}+(|P_{12}|\ |P_{11}|+|P_{21}|\ |P_{22}|+P_{12}^2)x_m^{(2)^2}$。若取 $\varepsilon=\max\{|P_{12}|,|P_{21}|\}$。则上式 $\leqslant-[(1-P_{11}^2)x_m^{(1)^2}+(1-P_{22}^2)x_m^{(2)^2}+[\varepsilon(|P_{11}|+|P_{22}|)+\varepsilon^2](x^{(1)^2}+x^{(2)^2})$。若设 $A=\min\{1-P_{11}^2),(1-P_{22}^2)\}$ 则上式 $\leqslant-A(x_m^{(1)^2}+x_m^{(2)^2})+[\varepsilon(|P_{11}|+|P_{22}|)+\varepsilon^2](x^{(1)^2}+x^{(2)^2})$。

故当 $\varepsilon(|P_{11}|+|P_{22}|)+\varepsilon^2<\dfrac{A}{2}$,　　(19)

则有　$[V_{m+1}-V_m]_{(17)}\leqslant-\dfrac{A}{2}(x_m^{(1)^2}+x_m^{(2)^2})$，负定。现将(19)式写成

$$\varepsilon^2+(|P_{11}|+|P_{22}|)\varepsilon-\frac{A}{2}<0, \tag{20}$$

当　$\varepsilon<\dfrac{-(|P_{11}|+|P_{22}|)+\sqrt{(|P_{11}|+|P_{22}|)^2+2A}}{2}=H$ 时，(20)式成立。即 $V_{m+1}-V_m$ 负定。而V本身正定，由此得出系统（17）的零解为全局稳定。

以上也就是说，只要 $\max\{|P_{12}|,|P_{21}|\}<H$ 时，则由（18）的零解的全局稳定性结论，可以得出(17)的零解的渐近稳定性的结论。

下面讨论一般 n 的情形。

为了研究系统

$$x_{m+1}=\mathrm{P}x_m, \tag{1}$$

的稳定性问题，这里

$$P=\begin{pmatrix}P_{11}\cdots P_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\\ P_{n1}\cdots P_{nn}\end{pmatrix}.$$

首先考虑有 r 个子系统的系统

$$\begin{pmatrix}x_{m+1}^{(1)}\\ \vdots\\ x_{m+1}^{(r)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & P_r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_m^{(1)}\\ \vdots\\ x_m^{(r)}\end{pmatrix}, \tag{21}$$

这里　$x_{m+1}^{(i)}=col(x_{m+1}^{(i,1)},\cdots,x_{m+1}^{(i,n_i)})$

$x_m^{(i)}=col(x_m^{(i,1)},\cdots,x_m^{(i,n_i)})$

$x_{m+1}=col(x_{m+1}^{(1)},\cdots,x_{m+1}^{(r)})$

$=col(x_{m+1}^{(1,1)},\cdots,x_{m+1}^{(1,n_1)},x_{m+1}^{(2,1)},\cdots,x_{m+1}^{(2,n_2)},\cdots,x_{m+1}^{(r,1)},\cdots,x_{m+1}^{(r,n_r)})$

$x_m=col(x_m^{(1)},\cdots,x_m^{(r)})$

$=col(x_m^{(1,1)},\cdots,x_m^{(1,n_1)},x_m^{(2,1)},\cdots,x_m^{(2,n_2)},\cdots,x_m^{(r,1)},\cdots,x_m^{(r,n_r)})$,

$n_1+n_2+\cdots+n_r=n$.

记
$$P_i=\begin{pmatrix}P_{11}^{(i)}\cdots P_{1n_i}^{(i)}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ P_{n_i1}^{(i)},\cdots P_{n_in_i}^{(i)}\end{pmatrix},$$

$P_1,\cdots,P_r$ 分别为 $n_1\times n_1,\cdots,n_r\times n_r$ 阶的常量矩阵，并且与系统（1）中矩阵 P 的对应元素相同。

假定

$$|P_i-\mu E|=0\quad(i=1,\cdots,r)$$

之根的绝对值均小于 1，则对每个子系统

$$x_{m+1}^{(i)}=P_ix_m^{(i)}\qquad(i=1,2,\cdots,r)\tag{21}$$

可以按照前节的方法作出 Ляпунов 函数，即给定负定函数 $W^{(i)}=x^{(i)'}C^{(i)}x^{(i)}$，可以找到正定函数 $V^{(i)}=x^{(i)'}R^{(i)}x^{(i)}$，使 $V_{m+1}^{(i)}-V_m^{(i)}=x_m^{(i)'}C^{(i)}x_m^{(i)}$。为了确定起见，我们可以取 $C^{(i)}$ 为负的 n_i 阶的单位矩阵。即 $\begin{pmatrix}-1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & -1\end{pmatrix}$，这样一来，矩阵 $R^{(i)}$ 就完全确定了。我们记

$$R^{(i)}=\begin{pmatrix}R_{11}^{(i)}, & \cdots, & R_{1n_i}^{(i)}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ R_{n_i1}^{(i)}, & \cdots, & R_{n_in_i}^{(i)}\end{pmatrix}\qquad\begin{matrix}(i=1,\cdots,r)\\ R_{sj}^{(i)}=R_{js}^{(i)}.\end{matrix}$$

对于系统(1)，我们作Ляпунов函数

$$V=V^{(1)}+V^{(2)}+\cdots+V^{(r)}$$

显然V是正定的。

$$[V_{m+1}-V_m]_{(1)}=[V_{m+1}^{(1)}-V_m^{(1)}]_{(1)}+[V_{m+1}^{(2)}-V_m^{(2)}]_{(1)}+\cdots+[V_{m+1}^{(r)}-V_m^{(r)}]_{(1)}$$

首先计算

$$[V_{m+1}^{(i)}-V_m^{(i)}]_{(1)}=[x_{m+1}^{(i)'}R^{(i)}x_{m+1}^{(i)}-x_m^{(i)'}R^{(i)}x_m^{(i)}]_{(1)}$$
$$=\left[\sum_{s,k=1}^{n_i}R_{sk}^{(i)}x_{m+1}^{(i,s)}x_{m+1}^{(i,k)}\right]_{(1)}-\sum_{s,k=1}^{n_i}R_{sk}^{(i)}x_m^{(i,s)}x_m^{(i,k)}.$$

注意：上式方括号中的 $x_{m+1}^{(i,s)},x_{m+1}^{(i,k)}$ 当用（1）式化为 x_m 的坐标的线性组合时，其系数包含有(1)的矩阵 P 中不属于 $P_i(i=1,\cdots,r)$ 的元素，即对应于(21)式矩阵中的零元素的元素 P_{kj}。

令 $\varepsilon=\max\{|P_{kj}|\}$。

再对(21)中诸 P_i 的元素 $P_{jl}^{(i)}$，令

$$A_{sk}^{(i)}=\max_{l=1,\cdots,n_i}\{|P_{sl}^{(i)}|,|P_{kl}^{(i)}|\}.$$

于是，通过类似于$n=2$时的一些初等运算可得

$$\begin{aligned}[V_{m+1}^{(i)}-V_m^{(i)}]_{(1)}\leqslant&-(x_m^{(i,1)^2}+\cdots+x_m^{(i,n_i)^2})+\\ &+\frac{1}{2}(n-n_i)\varepsilon\sum_{s,k=1}^{n_i}|R_{sk}^{(i)}|A_{sk}^{i}(x_m^{(i,1)^2}+\cdots+x_m^{(i,n_i)^2})\\ &+\frac{1}{2}n_i\varepsilon\sum_{s,k=1}^{n_i}|R_{sk}^{(i)}|A_{sk}^{i}(x_m^{(1,1)^2}+\cdots+x^{(r,n_r)^2})\\ &+(n-n_i)\varepsilon^2\sum_{s,k=1}^{n_i}|R_{sk}^{(i)}|(x_m^{(1,1)^2}+\cdots+x_m^{(r,n_r)^2}),\end{aligned}$$

于是
$$[V_{m+1}-V_m]_{(1)}\leqslant-(x_m^{(1,1)^2}+\cdots+x_m^{(r,n_r)^2})$$
$$+\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{2}(n-n_i)\varepsilon\sum_{s,k=1}^{n_i}|R_{sk}^{(i)}|A_{sk}^{(i)}(x_m^{(i,1)^2}+\cdots+x_m^{(i,n_i)^2})$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon\sum_{i=1}^{r}n_i\sum_{s,k=1}^{n_i}|R_{sk}^{(i)}|A_{sk}^{(i)}(x_m^{(1,1)^2}+\cdots+x_m^{(r,n_r)^2})$$
$$+\varepsilon^2\sum_{i=1}^{r}(n-n_i)\sum_{s,k=1}^{n_i}|R_{sk}^{(i)}|(x_m^{(1,1)^2}+\cdots+x_m^{(r,n_r)^2}).$$

令
$$L=\max_{i=1,\cdots,r}\left\{\frac{1}{2}(n-n_i)\sum_{s,k=1}^{n_i}|R_{sk}^{(i)}|A_{sk}^{(i)}\right\},$$
$$M=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}n_i\sum_{s,k=1}^{n_i}|R_{sk}^{(i)}|A_{sk}^{(i)}, \tag{22}$$
$$N=\sum_{i=1}^{r}(n-n_i)\sum_{s,k=1}^{n_i}|R_{sk}^{(i)}|,$$

则有
$$[V_{m+1}-V_m]_{(1)}\leqslant-(x_m^{(1,1)^2}+\cdots+x_m^{(r,n_r)^2})$$
$$+\varepsilon(L+M)(x_m^{(1,1)^2}+\cdots+x_m^{(r,n_r)^2})$$
$$+\varepsilon^2N(x_m^{(1,1)^2}+\cdots+x_m^{(r,n_r)^2})$$
$$=(-1+\varepsilon(L+M)+\varepsilon^2N)(x_m^{(1,1)^2}+\cdots+x_m^{(r,n_r)^2}).$$

当取 $\varepsilon<\frac{1}{2N}(-(L+M)+\sqrt{(L+M)^2+2N})$时，有
$$[V_{m+1}-V_m]_{(1)}<-\frac{1}{2}(x_m^{(1,1)^2}+\cdots+x_m^{(r,n_r)^2})$$
这时，V正定，$[V_{m+1}-V_m]_{(1)}$负定．故（1）的零解为全局稳定．

定理 当 $\max\{|P_{k,j}|\}<\frac{1}{2N}(-(L+M)+\sqrt{(L+M)^2+2N})$ 时，由系统(21)的全局稳定性可以得出系统（1）的全局稳定性．这里 $L.M.N$ 由（22）式给出．P_{kj}是P中除去$P_i(i=1,\cdots,r)$外的所有元素．

注 针对具体问题．以上估计还可以算得细一些．

本刊编辑部注：曾委托俞玉森教授对此稿进行了适当的精简并加工．

参 考 文 献

[1] Барбащин, Е. А., Функции Ляпунова 1970.

[2] 王慕秋，稳定性理论中方程组的分解问题，科学记录 4：1 (1960)，1—5.

[3] 刘永清，大系统在稳定性理论中的分解问题(5)，数学研究与评论，第二卷第二期(1982)．本文经中国自动化学会评选于1981年8月在上海召开的“中美双边自动控制系统学术交流会议”中宣读．

The Application of the Decomposition Theory in a Linearly Iterative System

By Wang Mu-qiu(王慕秋), Liu Yong-qing(刘永清) and Wang Lian(王 联)

Abstract

In this paper, the formulae of Liapunov function of the linearly iterative system: $x_{m+1}=Px_m$, have been constructed, and the decomposition theorem of the linearly iterative system has been given as follows:

If $max\{|P_{kj}|\}<\frac{1}{2N}[-(L+M)+\sqrt{(L+M)^2+2N}]$ and if r isolated subsystems: $x_{m+1}^{(i)}=P_i x_m^{(i)}(i=1,\cdots,r)$ are stable in large, where P_{kj} are the elements of the $n\times n$ matrix P except those belonging to $P_i(i=1,\cdots,r)$, and L, M and N are

$$L=\max_i\left\{\frac{1}{2}(n-n_i)\sum_{s,k=1}^{n_i}|R_{sk}^{(i)}|A_{sk}^{(i)}\right\},$$

$$M=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}n_i\sum_{s,k=1}^{n_i}|R_{sk}^{(i)}|A_{sk}^{(i)}$$

and

$$N=\sum_{i=1}^{r}(n-n_i)\sum_{s,k=1}^{n_i}|R_{sk}^{(i)}|$$

respectively, where

$$A_{sk}^{(i)}=\max_l(|P_{sl}^{(i)}|,|P_{kl}^{(i)}|),$$

$$l=1,\cdots,n_i,\ s,\ k=1,\cdots,n_i,\ i=1,\cdots,r,\ n_1+\cdots+n_r=n.$$