1982年 第2卷 第3期
Vol.2, No.3, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

E^1类中多项式和有理函数的最佳逼近*

苏 兆 龙

（北京大学）

目前已有很多工作研究多项式在空间 $E^p(D)(p\geqslant 1)$ 中的完备性问题及最佳逼近阶的估计。

1959 年 J. L. Walsh 和 H. G. Russell 在[1]中讨论了当 $p\geqslant 1$ 时区域D的边界是解析曲线的情况。

1960 年 A. Я. Альпер 在[2]中将上面结果在 $p>1$ 时推广到区域D的边界Γ满足条件

$$\int_0 \frac{\omega(\delta)}{\delta}d\delta<\infty$$

的情况，其中 $\omega(\delta)$ 是Γ的切线与指定方向的夹角作为弧长的函数的连续模。

1969年，В. М. Кокилашбили 在[3]中引进了A类区域的概念。他解决了 $p>1$ 时在D是A类区域的情况。

1977年，Jan-Erik Andersson 在[5]中引进了 Andersson 算子，解决了在所谓 $A_p(p\geqslant 1)$ 类区域 $E^p(D)$ 中多项式最佳逼近的阶的估计。但在 $p=1$ 时，由于对被逼近的函数和经过算子 T_1 作用后的像函数作了进一步的假设，因此实际上并没有解决这个问题。

对 $p=1$ 的情况。М. И. Андрашко [4] 和 Д. М. Галан [17]分别作了讨论。前者假设 $\psi''(w)\in Lip\ 1$，后者假设 $\psi'''(w)\in Lip\ 1$。这里 $\psi(w)$ 为区域D的外映射函数。

在 $E^p(D)$ 中具有指定极点的有理函数的最佳逼近阶的估计，目前工作并不很多。

1964年（1979年发表）沈燮昌、娄元仁在工作[6]中解决了 $H^p(p\geqslant 1)$ 的情况。

1979年，沈燮昌、娄元仁在工作[7]中讨论 $E^p(D)(p>1)$ 时对区域D的边界Γ所加的条件与 С. Я. Альпер 在[2]中所加的条件相同。他们在讨论高阶情况时，对给定的极点作了附加限制。

1980年，沈燮昌在工作[11]中，针对 $p>1$ 的情况，取消了上面的关于极点的附加限制。

同年，沈燮昌在工作[8]中将上面的结果在 $p>1$ 时，推广到一类更一般的区域类上。

本文是在我的导师沈燮昌教授的直接指导下，进一步讨论了在 $E^1(D)$ 类用多项式与具有给定极点的有理函数的最佳逼近阶的估计与有理函数展开的余项估计问题。

* 1981年6月1日收到。推荐者：沈燮昌（北京大学）。

§1 预备知识

设区域D的边界Γ是一条可求长的Jordan闭曲线，记$z=\psi(w)$为将$|w|>1$保角映射到Γ外D_∞的满足条件$\psi(\infty)=\infty$，$\psi'(\infty)>0$的单叶函数，它的反函数记作$w=\phi(z)$。

今后我们用C_i表示各种常数；除特别说明外，它们都是只依赖于区域D的。

进一步，设区域D是Альпер区域[14]；即D的边界Γ是一条光滑曲线，且满足：

$$\int_0 \frac{j(u)}{u}|\ln u|du<\infty,$$

其中$j(u)$是Γ上切线与正实轴的夹角作为Γ上弧长的函数时的连续模。

C. Я. Альпер在[14]中证明了对于这样的区域映射函数应具有的一些性质。

1° 存在与W无关的常数m、M，使得对任意的$|w|\geqslant 1$，都有：

$$0<m<|\psi'(w)|<M<+\infty. \tag{1}$$

2° 存在与w、u无关的常数m_1，对任意的$|w|\geqslant 1$，$|u|\geqslant 1$，总有：

$$\left|\frac{\psi(w)-\psi(u)}{w-n}\right|>m_1>0. \tag{2}$$

3° 存在常数C_1，使得：

$$\int_0 \frac{\sigma(s)}{s}ds<c_1<+\infty, \tag{3}$$

其中$\sigma(s)$为$\psi'(w)$在$|w|=1$上的连续模。

4° 存在与$\tilde{u}$无关的常数c_2，使得对任意的$\tilde{u}(|\tilde{u}|=1)$，总有：

$$\int_{|w|=1}\left|\frac{1}{W-\tilde{u}}-\frac{\psi'(w)}{\psi(w)-\psi(\tilde{u})}\right||dw|\leqslant c_2, \tag{4}$$

和证明(4)式([14]中引理2)的方法类似，我们同样可以得到：存在常数c_3，使对任意的$\tilde{u}(|\tilde{u}|=1)$，总有：

$$\int_{|w|=1}\left|\frac{1}{w-\tilde{u}}-\frac{\psi'(\tilde{u})}{\psi(w)-\psi(\tilde{u})}\right||dw|\leqslant c_3. \tag{5}$$

将(4)式、(5)式分别作变数替换，利用(1)式，我们容易得到：存在常数c_4，使得对任意的$\tilde{z}\in\Gamma$，总有：

$$\int_\Gamma\left|\frac{1}{\zeta-\tilde{z}}-\frac{\phi'(\zeta)}{\phi(\zeta)-\phi(\tilde{z})}\right||d\zeta|\leqslant c_4; \tag{6}$$

$$\int_\Gamma\left|\frac{1}{\zeta-\tilde{z}}-\frac{\phi'(\tilde{z})}{\phi(\zeta)-\phi(\tilde{z})}\right||d\zeta|\leqslant c_4. \tag{7}$$

Andersson在工作[5]中引进了A_1型区域，即对任意的$\tilde{f}(w)\in H^1$，线性算子

$$(T_1\tilde{f})(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{\tilde{f}(w)}{\psi(w)-z}dw \tag{8}$$

是有界算子。

对 Альпер 区域，我们有：

引理 1　Альпер 区域是 A_1 型区域，即对任意的 $\tilde{f}(w)\in H^1$，都有：

$$\|(T_1\tilde{f})(z)\|_{L_1(\Gamma)}\leqslant c_5\|\tilde{f}(w)\|_{L_1(|w|=1)},\tag{9}$$

其中 $(T_1\tilde{f})(z)$ 如 (8) 式所定义。

证明　显然

$$(T_1\tilde{f})(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\tilde{f}[\phi(\zeta)]\phi'(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

根据 И. И. Првалов 定理[9]，$(T_1\tilde{f})(z)$ 对 $\tilde{z}\in\Gamma$ 的角度边界值为

$$\begin{aligned}(T_1\tilde{f})(\tilde{z})&=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\tilde{f}[\phi(\zeta)]\phi'(\zeta)}{\zeta-\tilde{z}}d\zeta+\frac{1}{2}\tilde{f}[\phi(\tilde{z})]\phi'(\tilde{z})\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\tilde{f}[\phi(\zeta)]\phi'(\zeta)}{\zeta-\tilde{z}}d\zeta-\frac{1}{2}\tilde{f}[\phi(\tilde{z})]\phi'(\tilde{z})+\tilde{f}[\phi(\tilde{z})]\phi'(\tilde{z})\\&=s(\tilde{z})+\tilde{f}[\phi(\tilde{z})]\phi'(\tilde{z}).\end{aligned}\tag{10}$$

由于 $f(w)\in H^1$，故对 $|u|<1$，有[9]：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{\tilde{f}(w)}{w-u}dw=\tilde{f}(u).$$

根据 И. И. Привалов 定理，考虑它的角度边界值，记 $\tilde{u}=\phi(\tilde{z})$，对积分作变数替换，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\tilde{f}[\phi(\zeta)]}{\phi(\zeta)-\phi(\tilde{z})}\phi'(\zeta)d\zeta=\frac{1}{2}\tilde{f}[\phi(\tilde{z})],$$

注意到 $s(\tilde{z})$ 的定义，则我们得到：

$$s(\tilde{z})=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left[\frac{1}{\zeta-\tilde{z}}-\frac{\phi'(\tilde{z})}{\phi(\zeta)-\phi(\tilde{z})}\right]\times\tilde{f}[\phi(\zeta)]\phi'(\zeta)d\zeta.$$

将此式两边取模，对 $\tilde{z}$ 在 Γ 上积分，利用 Fubini 定理，并将 (6) 式代入，则我们得到：

$$\begin{aligned}\|s(\tilde{z})\|_{L_1(\Gamma)}&\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma|\tilde{f}[\phi(\zeta)]\phi'(\zeta)||d\zeta|\\&\times\int_\Gamma\left|\frac{1}{\zeta-\tilde{z}}-\frac{\phi'(\tilde{z})}{\phi(\zeta)-\phi(\tilde{z})}\right||d\tilde{z}|\\&\leqslant\frac{c_2}{2\pi}\int_\Gamma|\tilde{f}[\phi(\zeta)]\phi'(\zeta)||d\zeta|=\frac{c_2}{2\pi}\|\tilde{f}(w)\|_{L_1(|w|=1)}.\end{aligned}\tag{11}$$

在 (10) 式的两边取模积分，注意到 (11) 式，则立得 (9) 式。证毕。

引理 2　设D是一个 Альпер 区域，函数 $f(z)\in E^1(D)$。令

$$\tilde{f}(u)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{f[\psi(w)]\psi'(w)}{w-u}dw,\quad(|u|<1),\tag{12}$$

则 $\tilde{f}(u)\in H^1$，且

$$\|\tilde{f}(u)\|_{L_1(|u|=1)}\leqslant c_6\|f(z)\|_{L_1(\Gamma)}. \tag{13}$$

证明 仿定理1的证明，同样可得（13）式.

我们注意到 $\tilde{f}(u)$ 是由 Cauchy 型积分定义的，故 $\tilde{f}(u)\in H^{1-\delta}$，其中 $\delta>0$ 是任意固定的. 但从（13）式，我们又知 $\tilde{f}(u)$ 的角度边界值是 L_1 可积的，因而从[9]可知，$\tilde{f}(u)\in H^1$. 证毕.

附注 根据 Andersson 工作[5]中定理 3.1，知当D是 Альпер 区域时，有 $(T_1\tilde{f})(z)=f(z)$；或者 $(T^{-1}f)(u)=\tilde{f}(u)$.

和前面引理的证明相仿，同样可以证明：

引理 3 设D是 Альпер 区域，函数 $f(z)\in E^1(D)$，令

$$g(u)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{f[\psi(w)]}{w-u}dw\quad(|u|<1), \tag{14}$$

则 $g(u)\in H^1$，且

$$\|g(u)\|_{L_1(|u|=1)}\leqslant c_7\|f(z)\|_{L_1(\Gamma)}. \tag{15}$$

引理 4 设D是 Альпер 区域，$g(w)\in H^1$，令

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g[\phi(\zeta)]}{\zeta-z}d\zeta,\quad z\in D.$$

则 $f(z)\in E^1(D)$，且

$$\|f(z)\|_{L_1(\Gamma)}\leqslant c_8\|g(w)\|_{L_1(|w|=1)}. \tag{16}$$

经过一些仔细的计算和推导，我们可证明

引理 5 设D是 Альпер 区域，函数 $f(z)\in E^1(D)$，$g(u)$ 如（14）式所定义，则

$$\omega(g,\delta)\leqslant c_9\omega(f_0,\delta), \tag{17}$$

其中 $f_0(w)\equiv f[\psi(w)]$，积分连续模 $\omega(g,\delta)$、$\omega(f_0,\delta)$ 都是在单位园周上取的.

§2 逼近定理

由于§1中诸引理的建立，则可将 Альпер 在工作[14]中对 $p>1$ 建立的结果推广到 $p=1$ 的情况，证明受[14]中的证明启发，我们可以得到：

定理 1 设D是Альпер 区域，函数 $f(z)$ 的非负整数 r 阶导数 $f^{(r)}(z)\in E^1(D)$. 则对任意自然数 n，存在次数不超过 n 的多项式 $P_n(z)$，使得

$$\|f(z)-P_n(z)\|_{L_1(\Gamma)}\leqslant\frac{c_{10}}{n^r}\omega\left(f_0^{(r)},\frac{1}{n}\right),$$

其中 c_{10} 与 $f(z)$、n 无关，且

$$f_0^{(r)}(w)\equiv f^{(r)}[\psi(w)].$$

我们还可建立类似于 Бернштейн 不等式的定理：

定理 2 设D是 Альпер 区域，$P_n(z)$ 是 n 次多项式，则

$$\|P_n'(z)\|_{L_1(\Gamma)} \leqslant c_{11} n \|P_n(z)\|_{L_1(\Gamma)}.$$

由于此定理的成立，我们可以讨论上面所述的多项式最佳逼近阶的估计的逆定理。

同样由于§1中诸引理的建立，则可将沈燮昌先生在工作[8]中对 $p>1$ 所建立的具有指定极点的有理函数的最佳逼近的阶的估计的结果，推广到 $p=1$ 的情况。我们可以证明

定理 3 设D是 Альпер 区域，函数 $f(z)$ 在D内解析，且 $f^{(k)}(z) \in E^1(D)$，则对任意的自然数 n，总存在形如

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \Big/ \prod_{k=1}^{n} (z-\beta_k) \tag{18}$$

的 n 次有理函数 $R_n(z)$，使得

$$\|f(z)-R_n(z)\|_{L_1(\Gamma)} \leqslant c_{12}\{\varepsilon_n^k \omega(f_0^{(k)}, \varepsilon_n) + q^{\frac{1}{\varepsilon_n}}\},$$

其中 c_{12} 与 n 无关，$f_0^{(k)}(w) \equiv f^{(k)}[\psi(w)]$，$q$ 为 $0<q<1$ 的一个常数，而

$$\varepsilon_n = \left[\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{|\alpha_k|}\right)\right]^{-1}, \alpha_k = \phi(\beta_k) \tag{19}$$

其中 $\{\beta_k\}$ 为落在 D_∞ 内的指定的极点，满足条件

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

§3 展开的余项估计

现在我们来讨论 $E^1(D)$ 空间中函数对某些有理函数系展开的余项估计问题.

我们首先从 H^1 类空间开始讨论.

考虑[12][13]中引进的有理函数系

$$\varphi_0(w) = \sqrt{\frac{|\alpha_0|^2-1}{2\pi}} \cdot \frac{1}{1-\bar{\alpha}_0 w}$$

$$\varphi_n(w) = \sqrt{\frac{|\alpha_n|^2-1}{2\pi}} \cdot \frac{1}{1-\bar{\alpha}_n w} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{w-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k w}$$

$$(n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

其中 $\alpha_k = \phi(\beta_k)$，而 $\beta_k \in D_\infty$ 是预先给定的极点.

根据[12]，知函数系 $\{\varphi_n(w)\}$ 在单位园周上是规范正交的.

设函数 $\tilde{f}(w) \in L_1(|w|=1)$，则称

$$c_k = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(e^{it})\overline{\varphi_k(e^{it})}dt \quad (k=0,1,2,\cdots) \tag{20}$$

为函数 $\tilde{f}(w)$ 对函数系 $\{\varphi_n(w)\}$ 的 Fourier 系数. 相应地也可构造 $\tilde{f}(w)$ 的 Fourier 级数，它的 n 阶部分和

$$\tilde{S}_n(e^{ix}) \equiv \tilde{S}_n(w) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(e^{ix}), \tag{21}$$

根据[12]，它有下面的表示式：

$$\tilde{S}_n(e^{ix})=\int_{-\pi}^{\pi} f[e^{i(x+y)}]k_n(x+y,x)dy, \tag{22}$$

其中

$$k_n(x+y,x)=\exp\left[-\frac{i}{2}y\lambda_n(y,x)-\frac{i}{2}y\right]\times\frac{\sin y\lambda_n(y,x)/2}{2\pi\sin y/2}, \tag{23}$$

$$y\lambda_n(y,x)=\int_x^{x+y}\sum_{k=0}^{n}\frac{|a_k|^2-1}{1-2|a_k|\cos(u-\theta_k)+|a_k|^2}du, \tag{24}$$

其中 $\theta_k=\arg a_k$。

引理 6 设 $\tilde{f}(w)\in H^1$，则

$$\|\tilde{S}_n(w)\|_{L^1(|w|=1)}\leqslant(\pi+\ln r_n)\|\tilde{f}(w)\|_{L^1(|w|=1)}, \tag{25}$$

其中 $\tilde{S}_n(w)$ 如（21）式所定义，而

$$r_n=\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{1}{|a_k|}\right)^{-1}. \tag{26}$$

证明 从（22）、（23）式，我们有：

$$|\tilde{S}_n(e^{ix})|\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|\tilde{f}[e^{i(x+y)}]k_n(x+y,x)|dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\tilde{f}[e^{i(x+y)}]|\left|\frac{\sin y\lambda_n(y,x)/2}{\sin y/2}\right|dy\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left\{|\tilde{f}[e^{i(x+y)}]|\left|\sin\frac{y\lambda_n(y,x)}{2}\right|\right.$$

$$\left.+|\tilde{f}[e^{i(x-y)}]|\left|\sin\frac{-y\lambda_n(-y,x)}{2}\right|\right\}\frac{dy}{y}. \tag{27}$$

如将积分区间折成 $[0,\frac{\pi}{r_n}]$ 与 $[\frac{\pi}{r_n},\pi]$ 两段，从（24）式，我们有：

$$|\pm y\lambda_n(\pm y,x)|\leqslant|y|\sum_{k=0}^{n}\frac{|a_k|^2-1}{(1-|a_k|)^2}$$

$$\leqslant 2|y|\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{1}{|a_k|}\right)^{-1}=2|y|r_n,$$

则（27）式就变为：

$$|\tilde{S}_n(e^{ix})|\leqslant\frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/r_n}+\int_{\pi/r_n}^{\pi}\right)\left\{|\tilde{f}[e^{i(x+y)}]|\times\left|\sin\frac{y\lambda_n(y,x)}{2}\right|\right.$$

$$\left.+|\tilde{f}[e^{i(x-y)}]\sin\frac{-y\lambda_n(-y,x)}{2}|\right\}\frac{dy}{y}$$

$$\leqslant\frac{r_n}{2}\int_0^{\pi/r_n}\{|\tilde{f}[e^{i(x+y)}]|+|\tilde{f}[e^{i(x-y)}]|\}dy$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\pi/r_n}^{\pi}\left\{|\tilde{f}[e^{i(x+y)}]|+|\tilde{f}[e^{i(x-y)}]|\right\}\frac{dy}{y}.$$

两边对 x 在 $[0,2\pi]$ 上积分，利用 Fubini 定理，则

$$\|\tilde{S}_n(e^{ix})\|_{L_1[0,2\pi]}\leqslant\frac{r_n}{2}\int_0^{\pi/r_n}\int_0^{2\pi}\{|\tilde{f}[e^{i(x+y)}]|+|\tilde{f}[e^{i(x-y)}]|\}dxdy$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\pi/r_n}^{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{|\tilde{f}[e^{i(x+y)}]|+|\tilde{f}[e^{i(x-y)}]|\right\}dx\frac{dy}{y}$$
$$\leqslant\|\tilde{f}(w)\|_{L_1(|w|=1)}\left[r_n\int_0^{\pi/r_n}dy+\int_{\pi/r_n}^{\pi}\frac{dy}{y}\right]$$
$$=(\pi+\ln r_n)\|\tilde{f}(w)\|_{L_1(|w|=1)}$$

此即（25）式，证毕。

现在我们回到一般的 $E^1(D)$ 空间来讨论。在这里，我们考虑函数系 $\{M_n(z)\}$，它是函数 $\varphi_n[\phi(z)]\phi'(z)$ 在其极点 $\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_n$ 处的主要部分之和。根据[16]，我们知：

$$M_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi_n[\phi(\zeta)]\phi'(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\quad z\in D. \tag{28}$$

设 $f(z)$ 在 Γ 上可积，称

$$a_k=a_k(F)=\frac{1}{i}\int_{|w|=1}f[\psi(w)]\psi'(w)\overline{\frac{1}{\bar{w}}\varphi_k(1/\bar{w})}\,dw \tag{29}$$

为函数 $f(z)$ 按函数系 $\{M_k(z)\}$ 展开的系数。同样，称级数 $\sum_{k=0}^{\infty}a_kM_k(z)$ 为 $f(z)$ 对函数系 $\{M_k(z)\}$ 展开的级数。它的 n 阶部分和是

$$S_n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kM_k(z)\ . \tag{30}$$

现在我们来证明：

引理 7　设 D 是 Альпер 区域，设 $\{\beta_k\}_{k=1}^{n}$ 为给定的极点。设 $R_n(z)$ 是形如（18）式的 n 次有理函数。则 $R_n(z)$ 关于函数系 $\{M_k(z)\}$ 展开的前 n 阶部分和 $S_n(z)$ 即为 $R_n(z)$ 本身。

证明　对函数

$$g(z)=1/(z-\beta)^k\quad(\beta\in D_\infty)$$

利用（12）式定义的算子 T^{-1}（注意引理 2 的附注），则：

$$(T^{-1}g)(w)=\tilde{g}(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|u|=1}\frac{\psi'(u)}{[\psi(u)-b]^k}\frac{du}{u-w}.$$

注意到对固定的 $|w|<1$，上式的被积函数除了 $a=\phi(\beta)$ 是其 K 级极点外，在 $|u|>1$ 上解析，且以 ∞ 为其 $k+1$ 级零点。当 $k\geqslant1$ 时，根据留数定理知 $\tilde{g}(w)$ 是一个以 a 为 K 级极点的有理函数。而当 $k=0$ 时，$\tilde{g}(w)=\psi'(\infty)$ 为一不等于零的常数。

由于一个有理函数可以分解为部分分式的和，故我们知引理所给的有理函数经过算子 T^{-1}（如(12)式所定义）所得的函数是以 $\{a_k\}_{k=0}^{n}$ 为极点的有理函数 $\tilde{R}_n(w)$，其中 $a_k=\phi(\beta_k)$。

由[12]可知，$\tilde{R}_n(w)$ 按函数系 $\{\varphi_n(w)\}$ 的 Fourier 展开的 n 阶部分和即为 $\tilde{R}_n(w)$ 本身，即

$$\tilde{R}_n(w)\equiv\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi_k(w),$$

其中 a_k 如（29）式所定义．据[18]定理三的证明过程，知 a_k 也是 $R_n(z)=(T\tilde{R}_n)(z)$ 按函数系 $\{M_k(z)\}$ 展开的系数．

我们注意到（8)、(28）式，则知 $T\varphi_k=M_k(z)$，于是我们得到

$$R_n(z)\equiv T\tilde{R}_n=\sum_{k=0}^{n}a_kM_k(z)=S_n(z).$$

证毕．

最后我们来证明：

定理4 设D是Альпер区域，$\beta_0=\infty$，函数 $f(z)\in E^1(D)$．设 $S_n(z)$ 如（30）式所定义，则我们有：

$$\|f(z)-S_n(z)\|_{L_1(\Gamma)}\leqslant[1+c_{13}(\pi+\ln r_n)]E_n^*(f) \tag{31}$$

其中 $E_n^*(f)$ 为具有指点极点对 $f(z)n$ 次形如（18）式有理函数最佳逼近值，r_n 如（26）式所定义．

证明 根据（30）式，利用（28）式，我们有：

$$S_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\tilde{S}_n[\phi(\zeta)]\phi'(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

根据引理 1，则知

$$\|S_n(z)\|_{L_1(\Gamma)}\leqslant c_6\|\tilde{S}_n(w)\|_{L_1(|w|=1)}. \tag{32}$$

根据[18]中定理3的证明过程，知 $\tilde{S}_n(w)$ 为 $\tilde{f}(w)$（由（12）式所定义的）按函数系 $\{\varphi_k(z)\}$ 展开的 Fourier 级数的 n 阶部分和．根据引理 6，则知：

$$\|\tilde{S}_n(w)\|_{L_1(|w|=1)}\leqslant(\pi+\ln r_n)\|\tilde{f}(w)\|_{L_1(|w|=1)}.$$

将此式与（32） 式，（13） 式合并，则我们得到

$$\|S_n(z)\|_{L_1(\Gamma)}\leqslant c_{13}(\pi+\ln r_n)\|f(z)\|_{L_1(\Gamma)}. \tag{33}$$

设 $\tilde{R}_n(z)$ 是具有指定极点 $\{\beta_k\}_{k=1}^{n}$ 的对函数 $f(z)$ 的 n 阶最佳逼近有理函数．据定义则：

$$\|f(z)-\tilde{R}_n(z)\|_{L_1(\Gamma)}=E_n^*(f). \tag{34}$$

由引理 7，知 $\tilde{R}_n(z)$ 按函数系 $\{M_k(z)\}$ 的展开的 n 阶部分和即为 $\tilde{R}_n(z)$ 本身．利用（33)、(34）式，则我们得到：

$$\begin{aligned}&\|S_n(z)-\tilde{R}_n(z)\|_{L_1(\Gamma)}\leqslant\\&\leqslant c_{13}(\pi+\ln r_n)\|f(z)-\tilde{R}_n(z)\|_{L_1(\Gamma)}\\&=c_{13}(\pi+\ln r_n)E_n^*(f)\end{aligned}$$

将此式和（34）式合并，则得（31）式。证毕。

附注　从本定理的证明过程，我们不难看出：当区域D是$|z|<1$时，则$c_{13}=1$。

根据定理3，从定理4我们可以得到：

推论．在定理3的条件下，$S_n(z)$如（30）式的定义，则对任意的自然数n，总有：

$$\|f(z)-S_n(z)\|_{L_1(\Gamma)}\leqslant c_{14}(c_{15}+\ln r_n)\{\varepsilon_n^k\omega(f_0^{(k)},\varepsilon_n)+q^{1/\varepsilon_n}\}, \tag{35}$$

其中c_{14}与n无关，q是$0<q<1$的一个常数ε_n由（29）式确定，r_n是由（26）式所确定。

当然，（35）式还可以写作

$$\|f(z)-S_n(z)\|_{L_1(\Gamma)}=O\{\varepsilon_n^k\omega(f_0^{(k)},\varepsilon_n)\ln r_n\}.$$

参考文献

[1] Walsh, J. L. and Russell, H. G., Integrated continuity conditions and degree of approximation by polynomials or by bounded analytic functions, Trans. Amer. Math. Soc., 92 (1959), 355—370.

[2] Альпер, С. Я., О лриближении в среднем аналимических функций класс E_P. Исследования по современным проблемам теории функций комплексного нерeменного, Москва 1960,273—286.

[3] Кокилашбили, Прямая теорема приближения в среднем анолитических функций многочленами, ДАН. СССР, 1969, Т. 185, No. 4, 749—752.

[4] Андрашко, М. М., О приближении в среднем аналитицеских функций в областях с тладкой Гранцей, Вопросы Математической Фузики и Теории Функций, 3—11.

[5] Andersson, Jan-Erik, On the degree of polynomial approximation in $E^P(D)$, Journal of Approximation Theory, V. 19, No. 1(January 1977), 61—68.

[6] 沈燮昌、娄元仁，在H_p空间中有理函数的最佳逼近，北京大学学报，1979年，第一期26, 58—72.

[7] 沈燮昌、娄元仁，关于函数空间$E^p(P>1)$中有理函数的最佳逼近，北京大学学报，1979年第二期，1—18.

[8] 沈燮昌，一类区域中的有理函数逼近，科学通报，25卷第3期(1980年)，97—101.

[9] Привалов, И.И., Граничные своиства аналитических функции, Гостехиздат 1950 (有中译本).

[10] Ахиезер, Н. И., Лекции по теории анпроксимации, Гостехиздат М-Л, 1947(有中译本).

[11] 沈燮昌，$E^p(1<P<+\infty)$中具有给定极点的有理函数最佳逼近问题，数学年刊，1(1)，(1980)，51—62.

[12] Джрбащан, М. М., Ктеории рядов Фурье по рациональным функциям, Изв. АН. Арm.ССР, 1X, No.7, 1956, физ—мат, 3—28.

[13] Кочарян, Г. С., О приближенни рациональными функциями в комплексной области, Изв. АН. Арн ССР., XI, No.4, 1958. физ—мат, 53—77.

[14] Альпер, С. Я., О равномерных приближениях функций комплексного переменного в замкнутой области., Изв. АН. СССР, 19(1955), Серия. матем., 423—444.

[15] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, Гостихиздат, 1950(有中译本).

[16] Джрбашян, М. М., Разложекия по системат рациональных функции с фиксированными полюсами, Изв. АН. Арм. ССР, сермя. матем; 2:1(1967), 3—51.

[17] Галан; Д. М., Про наближения в середньому регулярних функцли класу E_1 в областях з гладкою границею, Доповлдл АН Украунськоу РСР, серля, А, 1967, No.8, 673—376.

[18] 沈燮昌，论一类区域上的有理函数展开，中国科学，81年第3期，257—263.

On the Best Approximation in E^1 Space of Functions by Polynomials and Rational Functions

By Su Chaolung (苏兆龙)

Abstract

In this paper we obtain some estimations of the degree of the best approximation in E^1 space of functions by polynomials and rational functions with preassigned poles, in which D is an Альпер region, its boundary Γ satisfies the condition

$$\int_0 \frac{j(u)}{u} |\ln u| du < \infty,$$

where j(u) is the continuous modulus of the angle between the tangent of Γ and the positive real axis as the function of the arc length of Γ.