1982年 第2卷 第3期
Vol.2, No.3, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

关于随机元的若干注记*

吴智泉 王向忱

（吉林大学）

设（Ω, $\mathscr{A}$）是一可测空间，X是一拓扑空间，$\mathscr{B}$（X）为X中的Borel集合类，即X中包含全体开集的最小σ—代数．我们称从Ω到X的映射U为取值于X的一随机变量[1]，[2]，如果对任意$B\in\mathscr{B}$（X）

$$U^{-1}(B)=\{\omega; U(\omega)\in B\}\in\mathscr{A}$$

取值于X的随机变量也称为$\Omega\to X$的随机元或简称为X中的随机元．

本文的目的，是想就某些类型空间X，给出从（Ω, $\mathscr{A}$）到X的映射U为X中随机元的充要条件．全文分四个部分，第一部分假定X为赋可数拟范数的空间；第二部分假定X是（LF）空间，即X为一串递增的局部凸完全线性度量空间的严格归纳极限[3]，[4]；第三部分讨论X为具紧支集的无穷可微函数空间K的情形[5]；最后一部分讨论X为σ—紧致空间T上的连续函数空间$C(T)$的情形．最后这一部分是W. Whitt的工作的推广，在第二部分顺便讨论了拓扑空间为N空间[2]的条件和（LF）空间中随机元的和与序列的极限．

（一）

设X是一赋可数拟范数$\{\|\cdot\|_n\}_{n=1}^{\infty}$的空间，其中拟范数序列假定是递增的，即对任意$x\in X$,

$$\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant\cdots\leqslant\|x\|_n\leqslant\cdots.$$

在每一拟范数$\|\cdot\|_n$下，X成为一赋拟范数空间，我们记之为X_n．又用P_n记从X到X_n的典型映射

$$P_n x=x \qquad (x\in X)$$

由于X中的收敛就是按每一范数$\|\cdot\|_n$都收敛，所以P_n是从X到X_n的连续线性映射．

按照统一的约定，$\mathscr{B}(X)$，$\mathscr{B}(X_n)$（$n=1,2,\cdots$）总是表示X和X_n中的Borel集合类．

* 1981年5月8日收到．

引理1　$\mathscr{B}(X)=\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}(X_n)\right)$，此处 $\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}(X_n)\right)$ 表示由 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}(X_n)$ 所产生的最小 σ-代数。

证明　由于Borel集合类也就是由全体闭集所产生的最小 σ-代数，而对于任意 n，X_n 中的闭集都是 X 中的闭集（因 P_n 连续），从而 $\mathscr{B}(X_n)\subset\mathscr{B}(X)$，$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}(X_n)\subset\mathscr{B}(X)$，所以 $\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}(X_n)\right)\subset B(X)$。

反之，如果 F 为 X 中一闭集，则对于任意 n，$F=P_n(F)\subset\overline{P_n(F)}$，此处 $\overline{P_n(F)}$ 表示在 X_n 中的闭包，于是 $F\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{P_n(F)}$。我们来证明实际上有 $F=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{P_n(F)}$：

设 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{P_n(F)}$，则对于任意正整数 n，都应有 $x_n\in F$，使得 $\|P_nx_n-x\|_n<\frac{1}{n}$，亦即

$$\|x_n-x\|_n<\frac{1}{n}$$

这样我们得到序列 $\{x_n\}\subset F$。由于对任意 m，当 $n\geqslant m$ 时，

$$\|x-x_n\|_m\leqslant\|x-x_n\|_n<\frac{1}{n}$$

所以在 X 中 $x_n\to x$。现在 F 是 X 中的闭集，因而应有 $x\in F$，这证明了 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{P_n(F)}=F$，注意 $\overline{P_n(F)}\in\mathscr{B}(X_n)$，所以 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{P_n(F)}\in\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}(X_n)\right)$，因此 X 中任意闭集都属于 $\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}(X_n)\right)$，从而 $\mathscr{B}(X)\subset\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}(X_n)\right)$，结合已有的 $\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}(X_n)\right)\subset B(X)$，即得 $\mathscr{B}(X)=\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}(X_n)\right)$。证完。

引理2　设 $\{\mathscr{T}_a;\ a\in A\}$ 是 X 上的一族拓扑，$(X,\ \mathscr{T}_a)$ 记为 X_a，以 $\bigcup_{a\in A}\mathscr{T}_a$ 为次基底在 X 上产生的拓扑记为 $\mathscr{T}$，$(X,\ \mathscr{T})$ 简记为 X，则 $\mathscr{B}(X)=\sigma(\bigcup_{a\in A}\mathscr{B}(X_a))$ 等价于命题：对于任何可测空间 $(\Omega,\ \mathscr{A})$ 及从 Ω 到 X 的任何映射 U，U 是 X 中的随机元的充要条件是 U 为每一 X_a 中的随机元。

证明　如果 $\mathscr{B}(X)=\sigma(\bigcup_{a\in A}\mathscr{B}(X_a))$，$U$ 是从 $(\Omega,\mathscr{A})$ 到 X 的一映射，当 U 是 X 中随机元时，U 自然是 X_a 中的随机元，因为对任何 a 及 $B\in\mathscr{B}(X_a)$ 都有 $B\in\mathscr{B}(X)$。反之，如果对每一 $a\in A$ 在 X_a 中考查 U 时，U 都是随机元。则由于 $\mathscr{B}(X)=\sigma(\bigcup_{a\in A}\mathscr{B}(X_a))$，$U$ 也是 X 中的随机元。另一方面，在任何情况下，$\sigma(\bigcup_{a\in A}\mathscr{B}(X_a))\subset\mathscr{B}(X)$ 总是成立的，如果二者不相等，则有 $B\in\mathscr{B}(X)$，而 $B\overline{\in}\sigma(\bigcup_{a\in A}\mathscr{B}(X_a))$，取 $(X,\ \sigma(\bigcup_{a\in A}\mathscr{B}(X_a))$ 作为 $(\Omega,\ \mathscr{A})$，从 $(\Omega,\ \mathscr{A})$ 到 $(X,\ \mathscr{B}(X))$ 的恒等变换 U，U 显然是 $X_a(a\in A)$ 中的随机元，但 $U^{-1}(B)=B\overline{\in}\sigma(\bigcup_{a\in A}\mathscr{B}(X_a))$ 所以 U 不是 X 中的随机元，可见如果从任何 $(\Omega,\ \mathscr{A})$ 到 X 中的任意映射 U 为 X 中的随机元的充要条件是对每一 a，U 是 X_a 中的随机元，则必有 $\mathscr{B}(X)=\sigma(\bigcup_{a\in A}\mathscr{B}(X_a))$。

定理1　如果 X 是一赋可数拟范 $\{\|\cdot\|_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的空间，拟范数序列单调递增，则从任意 $(\Omega,\mathscr{A})$ 到 X 的映射 U 为 X 中随机元的充要条件是对每一 n，U 都是 X_n 中的随机元。

证明　结合引理1和引理2即得。

（二）

现在我们考虑X为一（L F）空间（[4]，226页）的情形。

定义　设$(X_n,\mathscr{T}_n)$, $n=1,2,3,\cdots$都是完全的局部凸线性度量空间，$X_n\subset X_{n+1}$, $X_n\neq X_{n+1}$, $\mathscr{T}_{n+1}$在X_n上的诱导拓扑就是$\mathscr{T}_n$，$X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}X_n$，用$I_n$表示从$X_n$到$X$的嵌入映射：$I_nx==x$ $(x\in X_n)$，则当在X上赋与使所有I_n都连续的最强的局部凸拓扑$\mathscr{T}$时，$(X,\ \mathscr{T})$称为是一（L F）空间，它是$\{X_n\}$的严格归纳极限。

我们知道任何（L F）空间都是不可度量的，$\mathscr{T}$在每一X_n上的诱导就是$\mathscr{T}_n$，且X_n都是$(X,\ \mathscr{T})$中的闭线性子空间[4]，[3]。

设X是一（L F）空间，U是从可测空间$(\Omega,\mathscr{A})$到X的一个映射，令$\Omega_n=U^{-1}(X_n)$，在Ω_n上赋与$\mathscr{A}$的迹σ—代数$\mathscr{A}_n$[8]，则$(\Omega_n,\ \mathscr{A}_n)$也是一可测空间，将$U$局限为从$\Omega_n$到$X_n$的一个映射，记为$U_n$。

定理2　从$(\Omega,\ \mathscr{A})$到X的映射U为X中的随机元的充要条件是对每一n，都有$\Omega_n\in\mathscr{A}$并且U_n是X_n中的随机元。

证明　先证必要性。因X_n是X中的闭集，所以$\Omega_n=U^{-1}(X_n)\in\mathscr{A}$。又如果$B\in\mathscr{T}_n$，则有$B_X\in\mathscr{T}$，使$B=B_X\cap X_n$，因此

$$U_n^{-1}(B)=U^{-1}(B)=U^{-1}(B_X\cap X_n)=U^{-1}(B_X)\cap U^{-1}(X_n),$$

由于$U^{-1}(B_X)\in\mathscr{A}$，$U^{-1}(X_n)=\Omega_n$，所以$U_n^{-1}(B)\in\mathscr{A}\cap\Omega_n=\mathscr{A}_n$，即$U_n$是从$(\Omega_n,\mathscr{A}_n)$到$X_n$的随机元。

再证充分性。对于任意$B_X\in\mathscr{T}$，显然$B_X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(B_X\cap X_n)$，$B_X\cap X_n\in\mathscr{T}_n$，所以$U_n^{-1}(B_X\cap X_n)\in\mathscr{A}_n$，即有$A_n\in\mathscr{A}$，使得$U_n^{-1}(B_X\cap X_n)=A_n\cap\Omega_n$。但$\Omega_n\in\mathscr{A}$，因此$A_n\cap\Omega_n\in\mathscr{A}$。从而

$$\begin{aligned}U^{-1}(B_X)&=U^{-1}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_X\cap X_n)\Big)=\bigcup_{n=1}^{\infty}U^{-1}(B_X\cap X_n)\\&=\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n^{-1}(B_X\cap X_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap\Omega_n)\in\mathscr{A},\end{aligned}$$

即U是X中的随机元，证完。

以下我们讨论（L F）空间中随机元的拓扑性质。

定义　设S是一拓扑空间，如果S的任何开复盖都有可数子复盖，则称之为一Lindelöf空间[9]。

引理3　（L F）空间X为Lindelöf空间的充要条件是每一X_n都是可分的线性度量空间。

证明　必要性。若$\{G_\alpha\}$为X_n的一个开复盖，则对每个G_α，有$\tilde{G}_\alpha\in\mathscr{T}$，使$G_\alpha=\tilde{G}_\alpha\cap X_n$，显然，$\{\tilde{G}_\alpha\}\cup\{X_n^c\}$构成$X$的一个开复盖，因此有可数子复盖，这可数子复盖中属于$\{\tilde{G}_\alpha\}$的元对应的$\{G_\alpha\}$中的元便构成X_n的一可数子复盖。这说明每一X_n都是Lindelöf空间，X_n又是度量空间，因此是可分的。

再证充分性．令$\{G_\alpha\}$为X的一个开复盖，则对每一n，$\{G_\alpha\cap X_n\}$是X_n的一个开复盖，既然X_n是可分的度量空间，它应存在可数子复盖：$\{G_{\alpha_i^{(n)}}\cap X_n;\ i=1,2,\cdots\}$，显然$\{G_{\alpha_i^{(n)}};\ i,n=1,2,\cdots\}$便是$X$的一个可数子复盖．

根据[2]，拓扑空间S称为是一N空间，如果S中任何闭集F都是S上某一实值连续函数的零集，即有S上的实值连续函数$f(x)$，使

$$F=\{x:f(x)=0\}$$

引进N空间概念的目的是为了证明下述引理．

引理 4 [2] 如果$\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$是一串取值于N空间S的定义于$(\Omega,\mathscr{A})$上的随机元，且对每一$\omega\in\Omega$，都有$V_n(\omega)\to U(\omega)$，则U也是定义于$(\Omega,\mathscr{A})$上取值于S中的随机元．

引理 5 拓扑空间S为N空间的充要条件是S为正规空间并且S中的闭子集都是G_δ集．

证明 充分性见[9(p.134)]，下面证必要性．如果S是N空间，F是闭集，则有实连续函数$f(x)$，使$F=\{x:f(x)=0\}$，显然$F_n=\{x:|f(x)|<\frac{1}{n}\}$是开集，$F=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$，所以$F$是$G_\delta$集，又如果$F_1$，$F_2$是不相交的闭集，则有$S$上的实连续函数$f_1(x)$，$f_2(x)$，使$F_i=\{x:f_i(x)=0\}$，$i=1,2$．显然不妨设$f_i(x)\geqslant0$ $(i=1,2)$，于是

$$G_1=\{x:f_1(x)-f_2(x)<0\},\quad G_2=\{x:f_1(x)-f_2(x)>0\}$$

是不相交的两个开集，$F_1\subset G_1$，$F_2\subset G_2$，这证明了S又是正规的．

满足引理5中条件的拓扑空间通常称为完备正规空间(perfectly normal)[9]，因此上述引理说明N空间就是完备正规空间．

引理 6 若拓扑空间S为正则的(regular)[9]，则当S中任一开集的开复盖都有可数子复盖时，S为N空间．

证明 设B为X中的开集，$x\in B$，取x的开邻域V_x使$x\in V_x\subset B$，则$\{V_x;\ x\in B\}$是B的一个开复盖，由正则性，对每一V_x，可取x的开邻域V'_x，使闭包$\overline{V}'_x\subset V_x$，显然$\{V'_x;x\in B\}$仍为$B$的一个开复盖，由假设，可选它的一个可数子复盖$\{V'_{x_i};\ i=1,2,\cdots\cdots\}$，于是

$$B\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}V'_{x_i}\supset\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{V}'_{x_i}\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}V_{x_i}\subset B$$

所以$B=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{V}'_{x_i}$，这证明$S$中任意开集都是$F_\sigma$集，因而$S$中任何闭集都是$G_\delta$集，注意$S$现在显然是Lindelöf空间，因此由Tychonoff引理([9]，p.113)它还是正规的，所以是N空间．

引理 7 若(LF)空间是一串可分完全的线性凸度量空间X_n的严格归纳极限，则X是N空间．

证明 对于任意$B\in\mathscr{T}$，如果$\{G_\alpha\}$为B的一个开复盖，则对任意n，$B\cap X_n$为X_n中的开集，$\{G_\alpha\cap X_n\}$是$B\cap X_n$的一开复盖，既然X_n是可分的，从$\{G_\alpha\cap X_n\}$中可选出$B\cap X$的一可数子复盖：$\{G_{\alpha_i^{(n)}}\cap X_n\}$，由于$B=\bigcup_{n=1}^{\infty}(B\cap X_n)$，所以$\{G_{\alpha_i^{(n)}};i,n=1,2,\cdots\cdots\}$便是$B$的一可数子复盖，加之(LF)空间是正则空间，因此由上一引理即知X为N空间．

综合以上各引理即得：

定理 3　如果（L F）空间 X 是一串可分的完全线性凸度量空间 X_n 的严格归纳极限，V_n 是从（Ω，$\mathscr{A}$）到 X 的随机元，对每一 $\omega\in\Omega$，$\lim\limits_{n\to\infty}V_n(\omega)=V(\omega)$，则 V 也是从（Ω，$\mathscr{A}$）到 X 的随机元。

定理 4　若 X 是一（L F）空间，每个 X_n 都是可分的，则从（Ω，$\mathscr{A}$）到 X 中的任意二随机元 U，V 的和仍为从（Ω，$\mathscr{A}$）到 X 的随机元。

证明　我们先证明对于 X_n 中的任意闭集 F，都有

$$(U+V)_n^{-1}(F)=\bigcup_{i=n}^{\infty}(U_i+V_i)^{-1}(F).$$

事实上，若 $\omega\in(U+V)_n^{-1}(F)$，则 $(U+V)(\omega)\in F$，即 $U(\omega)+V(\omega)\in F$，因为 $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}X_n$，$X_n\subset X_{n+1}$，所以可选一充分大的 i，使 $i\geqslant n$，$U(\omega)\in X_i$，$V(\omega)\in X_i$，从而 $\omega\in U^{-1}(X_i)\cap V^{-1}(X_i)$，即 $U_i(\omega)$，$V_i(\omega)$ 都有定义，显然 $U_i(\omega)+V_i(\omega)=U(\omega)+V(\omega)\in F$，所以 $\omega\in\bigcup\limits_{i=n}^{\infty}(U_i+V_i)^{-1}(F)$。反之，如果 $\omega\in\bigcup\limits_{i=n}^{\infty}(U_i+V_i)^{-1}(F)$，则有 $i\geqslant n$，使 $(U_i+V_i)(\omega)\in F$，即 $U(\omega)+V(\omega)\in F$，所以 $\omega\in(U+V)^{-1}(F)$，由于 $F\subset X_n$，所以 $\omega\in(U+V)_n^{-1}(F)$。

令 $\Omega_n^U=U^{-1}(X_n)$，$\Omega_n^V=V^{-1}(X_n)$，则由定理 2 知道 Ω_n^U，$\Omega_n^V\in\mathscr{A}$，U_n，V_n 分别是从（Ω_n^U，$\mathscr{A}\cap\Omega_n^U$）和（$\Omega_n^V$，$\mathscr{A}\cap\Omega_n^V$）到 X_n 的随机元，既然 X_n 是可分的完全线性度量空间，U_n，V_n 便分别是可数值随机元序列 $\{U_n^{(i)}\}$，$\{V_n^{(i)}\}$ 的极限（[10]，p.23），显然 $U_n^{(i)}+V_n^{(i)}$ 是（$\Omega_n^U\cap\Omega_n^V$，$\mathscr{A}\cap\Omega_n^U\cap\Omega_n^V$）到 X_n 中的可数值随机元，并且 $U_n^{(i)}+V_n^{(i)}\longrightarrow U_n+V_n$，于是 U_n+V_n 是从 $\Omega_n^U\cap\Omega_n^V$ 到 X 中的随机元（因 X_n 为度量空间从而是 N 空间），对任意 X_n 中的闭集 F，当 $i\geqslant n$，F 也是 X_i 中的闭集，因此

$$(U_i+V_i)^{-1}(F)\in(\Omega_i^U\cap\Omega_i^V)\cap\mathscr{A}\in\mathscr{A}$$

特别是 $(U_i+V_i)^{-1}(X_n)\in\mathscr{A}$，并且

$$(U+V)_n^{-1}(F)=\bigcup_{i\geqslant n}(U_i+V_i)^{-1}(F)\in\mathscr{A}$$

这就证明了 $U+V$ 是 X 中的随机元。

作为本节的结束，我们再介绍一个有关一拓扑空间为N空间的结果（证明略）：

命题 1　若拓扑空间 S 是紧致的，则 S 为 N 空间的充要条件是 S 中任何闭集 F 都是强 G_δ 集，即 $F=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$，$G_n$ 为开集并且 $\bar{G}_{n+1}\subset G_n$ $(n=1,2,\cdots)$，此处 $\bar{G}_{n+1}$ 表 G_{n+1} 的闭包。

类似地还有下述

命题 2　一序列式列紧空间 S 为一 N 空间的充要条件是 S 中任何闭集是强 G_δ 集。

（三）

现在我们来考虑从可测空间（Ω，$\mathscr{A}$）到 K 中的映射 U 为一取值于 K 的随机元的条件，此处 K 为全体具有紧致支集的无穷可微函数的空间。为简便计，我们只考虑一元函数，多元函数的 K 空间情形是类似的。用 $k(n)$ 表支集包含在 $[-n,\ n]$ 内的无穷可微函数所构成的线性空间，对任意非负整数 m，令

$$\|x\|_m=\max_{0\le i\le m}\sup_{|t|<n}|x^{(i)}(t)|,\quad x^{(0)}(t)=x(t)\in K(n).$$

则 $\{\|\cdot\|_m\}$ 是 $K(n)$ 上的一串范数，

$$\|x\|_0\leqslant\|x\|_1\leqslant\cdots\leqslant\|x\|_m\leqslant\cdots$$

用这一串范数在 $K(n)$ 上产生拓扑，则 $K(n)$ 成为一局部凸的完全的线性度量空间，我们通常所谓的 K 空间就是这串 $k(n)$ 的严格归纳极限 [5]，所以是一 (L F) 空间。

引理 8 $(K(n),\ \|\cdot\|_m)=K_m(n)$ 是可分的。

证明 定义从 $K_m(n)$ 到 $(C[-n,\ n])^{m+1}$ 内的映射 P：$p(x)=(x^{(0)},\ x^{(1)},\cdots,\ x^{(m)})$，此处 $x^{(i)}$ 表 x 的 i 阶导数，$x^{(0)}=x$，则显然 P 是一保范映射，注意 $C[-n,\ n]$ 是可分的，所以 $(C[-n,u])^{m+1}$ 也是可分的，从而 $K_m(n)$ 也是可分的。

定理 5 从 $(\Omega,\ \mathscr{A})$ 到 K 的映射 U 为 K 中的随机元的充要条件是对任意 $t\in(-\infty,\infty)$ 和 $i=0,1,2,\cdots\cdots$，$U^{(i)}(t)$ 都是定义在 $(\Omega,\ \mathscr{A})$ 上的普通的随机变数。

证明 若对于 $x\in k$，定义 $J_t^ix=x^{(i)}(t)$，则对于任意 $t\in(-\infty,\infty)$ 及 $i=0,1,2,\cdots\cdots$，J_t^i 都是 K 上的连续函数，而 $U^{(i)}(t)=J_t^i\circ U$，所以必要性是显然的。下面证充分性：

用 p_m 表 $K(n)$ 到 $K_m(n)$ 的嵌入映射，$p_mx=x$，$x\in K(n)$。又 $\Omega_n=U^{-1}(K(n))$，U_n 为 U 在 Ω_n 上的限制，则 U_n 是从 Ω_n 到 $K(n)$ 的映射。

设 $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是全体有理数，则对固定的 n，m，对任意 $\varepsilon>0$ 及任意 $x_0\in k(n)$，都有

$$(p_m\circ U_n)^{-1}\{\|x-x_0\|_m\leqslant\varepsilon\}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcap_{k=0}^{m}\{\omega:|U_n^{(k)}(r_i)-x_0^{(k)}(r_i)|\leqslant\varepsilon\}.$$

因为

$\{\omega:|U_n^{(k)}(r_i)-x_0^{(k)}(r_i)|\leqslant\varepsilon\}=\Omega\cap\{\omega:|U^{(k)}(r_i)-x_0^{(k)}(r_i)|\leqslant\varepsilon\}$，并且 $U^{(k)}(r_i)-x_0^{(k)}(r_i)$ 是 $(\Omega,\ \mathscr{A})$ 上的随机变数，所以上式右边属于 $\Omega_n\cap\mathscr{A}$。于是

$$(p_m\circ U_n)^{-1}\{\|x-x_0\|_m\leqslant\varepsilon\}\in\Omega_n\cap\mathscr{A}.$$

既然 $K_m(n)$ 是可分的，$K_m(n)$ 中任意开集都可表为可数多个闭球的併，所以 $p_m\circ U_n$ 是从 $(\Omega_n,\ \Omega_n\cap\mathscr{A})$ 到 $K_m(n)$ 的随机元。由定理 1，U_n 是从 $(\Omega_n,\ \Omega_n\cap\mathscr{A})$ 到 $K(n)$ 的随机元；另外显然还有

$$\Omega_n=\bigcap_{|r_i|>n}\{\omega:|U(r_i)|=0\}\in\mathscr{A},$$

所以由定理 4，U 是 K 中的随机元。

（四）

以下我们设 T 为一 σ-紧致的拓扑空间，即 $T=\bigcup_{n=1}^{\infty}T_n$，$T_n$ 是 T 的紧致集，$T_n\subset T_{n+1}$，$n=1,2,3,\cdots$，又 $(E,\ d)$ 为一线性拟度量空间，分别用 $C(T_n,\ E)$ 和 $C(T,E)$ 表定义于 T_n 和 T 上取值于 E 中的连续函数空间。

在 $C(T_n,\ E)$ 上引进拟度量 ρ_n

$$\rho_n(x,y)=\sup_{t\in T_n}d(x(t),\ y(t)),$$

我们用 I_n 表从 $C(T、E)$ 到 $C(T_n,E)$ 的自然映射：$I_n x=\tilde{x}$，使得 $t\in T_n$ 时 $\tilde{x}(t)=x(t)$。在 $C(T、E)$ 上定义拟度量

$$\rho(x、y)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\frac{\rho_k(I_k x, I_k y)}{1+\rho_k(I_k x, I_k y)}$$

则 $C(T,E)$ 成为一拟度量空间，I_n 是从 $C(T,E)$ 到 $C(T_n,E)$ 的连续映射。

引理 9　如果 (E,d) 是可分的，并且 T_n 都是可分度量空间，则 $C(T,E)$ 是可分的。

证明　我们先证明 $C(T_n,E)$ 都是可分的。设 $\mathscr{B}_n$ 是 T_n 的可数拓扑基，用 $\mathscr{F}$ 表示由 $\mathscr{B}_n$ 中元素构成的 T_n 的有限复盖的集合，则 $\mathscr{F}$ 是一可数集。对于每一 $\{B_1,\cdots,B_m\}\in\mathscr{F}$，由 $\{B_1,\cdots,B_m\}$ 产生的 T_n 的有限剖分也是有限多个，此处所谓有限剖分是指将 T_n 分为有限多个互不相交的非空集合的併：$T_n=\sum_{k=1}^{s}E_k$，其中每一 E_k，都是 $B_1,\cdots,B_m,B_1^c,\cdots,B_m^c$ 中若干个集合的交。当 $\{B_1,\cdots,B_m\}$ 取遍 $\mathscr{F}$，所得到的这种有限剖分的全体，记为 $\mathscr{K}$，则 $\mathscr{K}$ 仍是一可数集合。

设 $S=\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是在 (E,d) 上稠密的可数集，对每一剖分 $\{E_1,E_2,\cdots,E_s\}\in\mathscr{K}$，定义在 T_n 上取值于 S 中并在每一 E_i 都是常量的简单函数共有可数多个，当 $\{E_1,E_2,\cdots,E_s\}$ 取遍 $\mathscr{K}$ 时，所有这样构造出来的简单函数的全体是可数的，记为 Φ。

对每一 $\phi\in\Phi$ 及正整数 m，如果有属于 $C(T_n,E)$ 的元素 $x=x(t)$，使

$$\sup_{t\in T_n}d(x(t),\phi(t))\leqslant\frac{1}{m}$$

则任取其一记作 $x_{\phi,m}$，显然 $\tilde{C}_n=\{x_{\phi,m}:\phi\in\Phi,m=1,2,\cdots,\}$ 是 $C(T_n,E)$ 的一可数子集，我们来证明它还在 $C(T_n,E)$ 中稠密。

任取 $x=x(t)\in C(T_n,E)$ 及 $\varepsilon>0$，取 m 充分大，使 $\frac{1}{m}<\frac{\varepsilon}{2}$，对每一 $t\in T_n$，利用 $x(t)$ 的连续性，可取一开集 $G_t\in\mathscr{B}_n$，使 $t\in G_t$，并且当 $t'\in G_t$ 时，$d(x(t'),x(t))<\frac{1}{2m}$。注意 $\bigcup_{t\in T_n}G_t=T_n$，$T_n$ 又是紧致的，因此可选出有限多个 $G_{t_1},\cdots,G_{t_k}$ 来，使 $\{G_{t_1},\cdots,G_{t_k}\}$ 构成 T_n 的一子复盖，即 $\{G_{t_1},\cdots,G_{t_k}\}\in\mathscr{F}$，对每一 t_i，取 $e_{n_i}\in S$，使 $d(x(t_i),e_{n_i})<\frac{1}{2m}$。令 $E_1=G_{t_1}$，$E_2=G_{t_2}\cap G_{t_1}^c,\cdots,E_k=G_{t_k}\cap\left(\bigcap_{i=1}^{k-1}G_{t_i}^c\right)$，则 $\{E_1,\cdots,E_k\}$ 为 T_n 的一有限剖分，即 $\{E_1,\cdots,E_k\}\in\mathscr{K}$（如诸 E_k 中有为空集的，则予以剔除），定义

$$\phi(t)=e_{n_i}\quad 当\quad t\in E_i\qquad(i=1,2,\cdots,k),$$

则 $\phi\in\Phi$，且对任意 t、必有 i，使 $t\in E_i$，于是

$$d(x(t),\phi(t))\leqslant d(x(t),x(t_i))+d(x(t_i),e_{n_i})<\frac{1}{m}$$

从而

$$\sup_{t\in T_n}d(x(t),\phi(t))\leqslant\frac{1}{m}$$

于是

$$\rho_k(x(t),x_{\phi,m}(t))=\sup_{t\in T_n}d(x(t),x_{\phi,m}(t))$$

$$\leqslant\sup_{t\in T_n}d(x(t),\phi(t))+\sup_{t\in T_n}d(\phi(t),x_{\phi,m}(t))\leqslant\frac{1}{m}+\frac{1}{m}<\varepsilon$$

其次我们来证明$C(T,E)$的可分性。注意$I_n(C(T,E))\subset C(T_n,E)$。作为可分度量空间的子空间，$I_n(C(T,E))$可分，因此有可数子集$\{x_i^{(n)}\}_{i=1}^{\infty}\subset C(T,E)$，使$\{I_nx_i^{(n)}\}$在$I_n(C(T,E))$上稠密，显然$\{x_i^{(n)}:i=1,2,\cdots;n=1,2,\cdots\}$便是$C(T,E)$中的可数稠子集，证完。

定理 6 如果T满足引理 9 中的条件，U是从$(\Omega,\mathscr{A})$到$C(T,E)$的映射，则U为$C(T,E)$中的随机元的充要条件是对每一$t\in T$，$U_t=J_t\circ U$都是从$(\Omega,\mathscr{A})$到(E,d)的随机元，此处J_t是从$C(T,E)$到E的赋值映射：$J_tx=x(t)$。

证明 因为J_t是从$C(T,E)$到(E,d)的连续映射，所以必要性显然，下面证充分性，

既然T_n是可分的，因此有可数稠密子集，$\{t_i^{(n)}\}_{i=1}^{\infty}$。对于$C(T_n,E)$中任意闭球$N=\{x:\rho(x,x_0)\leqslant\varepsilon\}$，显然

$$\{\omega:U_n(\omega)\in N\}=\{\omega:\sup_{t\in T_n}d(J_t\circ U_n,x_0(t))\leqslant\varepsilon\}$$

$$=\bigcap_{i=1}^{\infty}\{\omega:d(J_{t_i^{(n)}}\circ U,\ x_0(t_i^{(n)}))\leqslant\varepsilon\}=\bigcap_{i=1}^{\infty}(J_{t_i^{(n)}}\circ U_n)^{-1}N(x_0(t_i^{(n)}),\varepsilon),$$

此处$U_n=I_n\circ U,N(x_0(t_i^{(n)}),\varepsilon)=\{e:d(e,x_0(t_i^{(n)}))\leqslant\varepsilon,e\in E\}$由假设$(J_{t_i^{(n)}}\circ U_n)^{-1}N(x_0(t_i^{(n)}),\varepsilon)=U_{t_i^{(n)}}^{-1}N(x_0(t_i^{(n)},\varepsilon)$是属于$\mathscr{A}$的，所以$\{\omega:U_n(\omega)\in N\}\in\mathscr{A}$，根据上述引理 9 的证明，$C(T_n,E)$是可分的，因此$C(T_n,E)$中任意开集都是可数多个闭球的併，这样对$C(T_n,E)$中任意开集G，$U_n^{-1}(G)\in\mathscr{A}$，所以对$C(T_n,E)$中任意闭集$F$亦然。

现设F为$C(T,E)$中的闭集，用$\overline{I_n(F)}$表$I_n(F)$在$C(T_m,E)$中的闭包，则$U_n^{-1}\overline{(I_n(F))}\in\mathscr{A}$，我们来证明

$$U^{-1}(F)=\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n^{-1}\ (\overline{I_n(F)})\qquad(*)$$

显然$U^{-1}(F)\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n^{-1}\ (\overline{I_n(F)})$，我们只要证明相反的包含关系就可以了。设$\omega\in\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n^{-1}(\overline{I_n(F)})$，则对每一$n$，$U_n(\omega)\in\overline{I_n(F)}$，所以有$x_n\in F$，使$\rho_n(U_n(\omega),I_nx_n)<\frac{1}{n}$，亦即

$$\sup_{t\in T_n}d(J_tU(\omega),x_n(t))<\frac{1}{n}$$

注意对任意正整数n，k，

$$\rho_k(U_k(\omega),\ I_k(x_n))\leqslant\rho_{k+1}(U_{k+1}(\omega),\ I_{k+1}(x_n))$$

所以$x_n\longrightarrow U(\omega)$，而$F$是闭集，便有$U(\omega)\in F$，即$\omega\in U^{-1}(F)$，$(*)$式得证。

由$(*)$式，对于$C(T,F)$中任何闭集F，$U^{-1}(F)\in\mathscr{A}$这说明U是$C(T,E)$中的随机元。

仿照本文（一）中的讨论，不难证明在引理9的条件下，$\mathscr{B}(C(T,E))$ 与使得所有 J_t 成为 $C(T,E)\longrightarrow(E,d)$ 的 Borel 可测函数的最小 σ 代数相同，且此结论与定理6等价。W. Whitt 在[6]中就 $T=[0,\infty]$ 而 (E,d) 为完全可分度量空间时得到了上述两个 σ-代数相同及 $C(T,E)$ 可分的结果。我们的上述结果推广了 W. Whitt, 的相应结论。

参 考 文 献

[1] Hans, O., Generalized random variables, Trans. First Prague Conf. on Information Theory, Statist. Decision Functions and Random Processes, 1956, pp. 61—103.

[2] 王梓坤，随机泛函分析引论，数学进展，第5卷，第一期，1962，pp. 45—71.

[3] 吴智泉，线性拓扑空间讲义，安徽师范大学数学系印，1979.

[4] Köthe, G., Topologische Lineare Röume. Spring—Verlag, 1960.

[5] Гелбфанд. И. М. и Шилов, Г. Е., Обобщенные функчия, в.2, ГИФМЛ. МОСКВА, 1958.

[6] Whitt, W., Weak Convergence of Probability Measures on the Functions Space C [0,∞). Ann. Math. Statist. 41, 1970, pp. 939—944.

[7] Nedoma, J., Note on generalized random variables. Trans. First Prague Conf. Inform. Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes, Prague 1956, pp.139—141.

[8] Neveu, J., Mathematical Foundations of the Calculus of Probability, Holden-Day, Inc. San Francisco, London Amsterdam, 1969.

[9] Kelley, T. L., *General Topology*, 1955.

[10] Taylor, R. L., Stochastic Convergence of Weighted Sums of Random Elements in Linear Spaces, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 672, Springer—Verlag, Berlin, 1977.

Some Notes on Random Elements

By Wu Zhiquan(吴智泉) *and Wang Xiangchen*(王向忱)

Abstract

The purpose of this paper is to discuss necessary and sufficient conditions for a mapping from a measurable space into a special type space to be a random element in this space.

This paper is divited into four parts. In the first part, the main result is that if X is a space with a countable family of seminorms, then a mapping $U:\Omega\to X$ is a random element in X if and only if U is a random element in X_n for each n, here X_n is X endowed with the n-th seminorm. In the second part, we suppose X being a (LF) space, i. e. the strictive inductive limit of a sequence of local convex complete linear metric spaces, $\{X_n\}$. and prove that a mapping $U:(\Omega, \mathscr{A})\to X$ is a random element in X if and only if for each n the restriction of U on $(\Omega_n, \mathscr{A}_n)$, U_n, is a random element in X_n, here Ω_n is the inverse image of X_n under U and $\mathscr{A}_n$ is the trace σ-algebra of $\mathscr{A}$ on Ω_n. In addition, some new topological results for N-space and several topological properties of random elements in (LF) space are presented. The main result of the third part is that the necessary and sufficient condition for U being a radom element in K, the space of infinitely differentiable functions with compact support, is that $U^{(i)}(t)$ is an ordinary random variable for each $t\in(-\infty, +\infty)$ and $i=0,1,2,\cdots\cdots$ The last part is devoted to the investigation on the random elements in C(T, E), the space of all continuous functinns on T with values in a seperable semimetric space E where T is a σ-compact topological space. We arrive at a necessary and sufficient condition for a mapping being a random element in C(T, E). It is a generalization of a result of W. Whitt.