1982年 第2卷 第3期
Vol.2, No.3, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

悖论与数学基础问题(Ⅰ)*

徐利治 朱梧槚 袁相碗 郑毓信
(吉林大学) (南京大学数学系及哲学系)

引 言

首先必须指出,"悖论"(antinomy)一词应作广义理解.事实上,那种孤立地把一个命题的肯定与否定的等价式来作为悖论的定义是不够全面的.在给悖论这一概念下定义时,有一个十分重要的前提,即每一悖论总是有形无形地从属于某一理论系统的,而且要指明,该系统的公理和推理原则本来看上去是合理而自然的.另外,过去并没有将来也不必把每一悖论的陈述都化归为肯定与否的等价式.因此,我们认为 Fraenkel 关于悖论定义的一般陈述是比较合理的.关于悖论的定义、起源、成因和解决方案等问题的详细讨论,将在今后的续篇中给出.

本文将详细地论述一种非康托尔型的非标准自然数序列模型的结构特征及性质.关于这种模型构造的基本思想曾在1980年的一篇文章中有所述及[5].固然我们提出的模型,本质上不同于 A. Robinson 的非标准自然数集合,但却用到了非标准实数域的概念[2].

§1 两个涉及自然数无限性的悖论

这里我们要讨论的两个悖论可以叫作"引伸的 Zeno 悖论"(又称"抛球悖论")和"Engels 关于有限生成无限的矛盾论"(简称"恩格斯悖论").

(一)抛球悖论.设有 A,B 二人玩一球.球由 A 抛到 B 处费时 $\frac{1}{2}$ 分钟,由 B 抛回 A 处费时 $\frac{1}{4}$ 分钟.往下依此类推,假设来回抛球所费时间依次是 $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\cdots$, $\frac{1}{2^n}$, $\cdots$ 分钟.试问时间到达一分钟时该球到达何处?记 $t_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$, $(n=2,3,4,\cdots,)$;则 t_n 为 n 次抛球时间的总和.当 $n=$ 奇数时球落在 B 处,$n=$ 偶数时球落在 A 处.但当 n 走遍奇数子序列和偶数子序列时均得

* 1981年6月15日收到.

$$\lim_{n\to\infty} t_n = 1.$$

这说明到达一分钟时，该球既可能抵达A处也可能抵达B处。显然这是一个悖论，它相当于Zeno二分法悖论的一种引伸。本质上，这个悖论涉及到“潜无限”如何向“实无限”概念飞跃过渡的形式问题。当然，如果坚持潜无限观点，而不承认实无限概念（如同直觉主义者所主张的那样），则上述悖论也就可以不予承认。但这不过是找一个借口躲开了这个逻辑推理上存在的悖论而已。

（二）**恩格斯悖论**。这是一个属于数理哲学范畴的悖论。今举自然数集合概念为例说明之。自然数就是有限序数，也即可用以编号的序号数。按照Peano的继元公理与归纳公理，或者根据Cantor的“概括原则”（或“穷竭原则”），所有的有限序数即构成一个自然数无穷集合。可是“所有的有限序数”这概念本身却隐含着矛盾。“所有”这个概念蕴涵着这样的规定：不论给定怎样大的正数M，总有序号数$n>M$；即序号数列必须增长至无限。这否定了序号数始终保持“有限性”的规定。另一方面，“有限”这个属性又规定：序号数由小增大，不允许增大到无限，因而有限序数又不能穷尽其“所有”（即形成穷竭了的“无穷总体”），这又矛盾于“所有”这规定。

总之，上述推理无非表明：按集合论观点所确认的“存在无限多的有限序号数”这一命题本身就隐含矛盾，因为有限序数增长到无限必然否定了序数自身的有限性。这正如恩格斯早就指出的：“无限性是矛盾，而且是满含矛盾。无限性只能由有限的量来构成，这已经是一种矛盾，可是事实上就是如此。”（见《反杜林论》）。这个数理哲学上的悖论涉及到有限与潜无限如何同实无限相互渗透的关系问题。

在我们早先的文章（[4]、[6]、[7]及[14]）中已经多次分析过，关于自然数集合的概念里，不仅隐含着有限对无限的矛盾，还隐含着潜无限与实无限的矛盾。

事实上，整个自然数序列$1,2,\cdots,n,n+1,\cdots$，的形成过程包含着两个不可分割而又必须区别的阶段[4,5,6]：一是延伸（进展），二是穷竭（完成）。只有经过延伸到穷竭才彻底扬弃了有限性，完成了真无限过程（也即Hegel所说的“going—together—with—itself”（进展的自我完成））。因此，自然数序列过程的结构可以表示成形式：$\{1,2,3,(\cdots)_0,n,(\cdots)_1\}$。在这个表示法中$n$代表任意的自然数，$(\cdots)_0$表示着自然数的有限延伸，即量变阶段；而$(\cdots)_1$则表示那扬弃了“有限性重复发生现象”的飞跃阶段，即质变阶段。如此看来，自然数的真无限过程是由飞跃段$(\cdots)_1$来完成的，所以$(\cdots)_1$中已经蕴含了“真无限性”。

以上所述是属于反映论者的观点[5]。但现代直觉主义者与形式主义者对待无限性所蕴含的内在矛盾却是一概回避的。前者干脆否认“飞跃”，所以他们心目中的自然数序列的结构是：$1,2,3,(\cdots)_0,n$。后者虽然承认自然数序列能延伸到无限，但只在序列过程完结后用外插的方式引进一个超穷序数ω，即仍然假定$(\cdots)_1$中的一切序号数始终保持有限性，不承认飞跃段已经具备着有限性转变为真无限性的特点。经典数学与集合论为了坚持排中律，事实上也只好作这样的“有限性守恒”的假定。对形式主义者说来，在形式上似乎是把自然数集$\mathbf{N}$理解为一个“真无限集合”，但实质上却是按潜无限观点来理解$\mathbf{N}$的全部内容。

为了能够从数学上对“恩格斯悖论”和“引伸的 Zeno 悖论”给出一种相对合理的解决方案，作为我们思想方法的出发点，就是设法去引进“潜在无穷大元素”的概念，也即设法界定一类“非标准自然数”使得飞跃段$(\cdots)_1$具有确切的内容。为此，我们只需要借助于 Van Osdol 和 Takahashi 关于实数的非标准模型（即超幂$^*R$）的构造法即可达到目的。

§2 Non—Cantorian 自然数模型的构造

本节将构造非经典集论意义下的自然数序列模型。作为准备，须先介绍 Osdol-Takahashi 的超幂$^*R$ 的构造法[1]。

1. 超幂 *R 的构造. 为使推理更加简明和直观化，不妨采用“等价过程量“的表述形式来说明$^*R$ 的构造。试考虑以 0, 1, 2, …, 为段落的“整点阶梯函数”：

$$x(t)=x_n,\quad (n\leqslant t<n+1),\quad n=0,1,2,\cdots,$$

其中参变量 t 反映 $x(t)$ 的变化过程，实数序列 $\{x_n\}$ 表示在不同的变化时刻 t 所相应的 $x(t)$ 的数值系列。

我们把全体 $x(t)$ 的值所作成的数集 $\{x(t);0\leqslant t<\infty\}$ 叫做“整点阶梯函数过程量”，简称“过程量”，并记为

$$\tilde{x}=\{x(t)\,|\,0\leqslant t<+\infty\}$$

特别，当 $x(t)=x_n\to 0$（或 ∞）时，则相应的过程量 $\tilde{x}$ 叫做“趋零（或趋无穷）过程量”。又如果 $x(t)=c$（常数），则称相应的 $\tilde{x}$ 为“常过程量”，可简记为 $\tilde{c}$。

在过程量之间可以规定加、减、乘等运算，即：

$$\tilde{x}\pm\tilde{y}=\{x(t)\pm y(t)\,|\,0\leqslant t<+\infty\},$$

$$\tilde{x}\cdot\tilde{y}=\{x(t)\cdot y(t)\,|\,0\leqslant t<+\infty\}.$$

因为每个过程量都可表现为一个数列，数列是定义在自然数集 $\mathbf{N}$ 上的函数，因此关于过程量的“属性”以及过程量“相互关系”的表述均可归结为 $\mathbf{N}$ 上的函数属性及相互关系的表述。为了对这些属性与相互关系有一个“真假判别准则”，我们需要引进“大范围$\mathscr{U}$”这个概念，这里的 $\mathscr{U}$ 就是 $\mathbf{N}$ 上的一个“超滤集”（Ultrafilter）。

令 S 表 $\mathbf{N}$ 的子集。考虑 $\mathbf{N}$ 的子集类

$$\mathscr{F}=\{S\,|\,S\subset\mathbf{N},\mathbf{N}\setminus S=\text{有限集}\}.$$

容易验明，$\mathscr{F}$ 是 $\mathbf{N}$ 上的一个“滤集”（参阅[1]）。特别，为了对于过程量的属性有一意确定的判别标准，我们需要一种特殊的滤集概念，即下述

定义 如果 $\mathbf{N}$ 上的一个尽可能大的滤集 $\mathscr{U}$ 具有这样的性质：对每一 $S\subset\mathbf{N}$，或者有 $S\in\mathscr{U}$，或者有 $(\mathbf{N}\setminus S)\in\mathscr{U}$，即两者必居其一；则称 $\mathscr{U}$ 为 $\mathbf{N}$ 上的“超滤集”。（参阅[1]）。

问题在于如上定义的超滤集 $\mathscr{U}$ 是否存在？事实上，应用偏序集（半序集）的 Zorn 氏引理可以证明“超滤集的存在性定理”：至少存在 $\mathbf{N}$ 上的一个超滤集 $\mathscr{U}$，它以 $\mathscr{F}$ 为子集，即

$$\mathscr{F}=\{S\,|\,S\subset\mathbf{N},\ \mathbf{N}\diagdown S=\text{有限集}\}\subseteq\mathscr{U}.$$

有了超滤集 $\mathscr{U}$，就可以把一个函数 $f(n)$ 之是否具有某种性质 P 按 $\mathscr{U}$ 来界定：当且仅当

$$\{n\,|\,f(n)\ \text{具有性质}\ P,\ n\in\mathbf{N}\}\in\mathscr{U}$$

时（也即 $f(n)$ 在"大范围 $\mathscr{U}$"内具有性质 P 时），称函数 $f(n)$ 具有性质 P，或称过程量 $\tilde{x}$（其中 $x(t)=x_n=f(n)$）具有性质 P。很明显，根据超滤集 $\mathscr{U}$ 的性质，可知对每一 $f(n)$ 和一个性质 P，要么 f 具有性质 P，要么 f 具有性质非 P，两者必居其一。这就是说，按 $\mathscr{U}$ 来规定真假，就必然适合逻辑上的排中律。

这样，所谓两个过程量 $\tilde{x}$ 与 $\tilde{y}$ 的等价性，可明确定义如下：当且仅当

$$\{n\,|\,x(n)=y(n),\ n\in\mathbf{N}\}\in\mathscr{U}$$

时，称 $\tilde{x}$ 等价于 $\tilde{y}$，记作 $\tilde{x}=\tilde{y}$。显然这种等价概念具有反身性、对称性和传递性。

按照上述等价概念，自然可以将 t 轴（$0\leqslant t<\infty$）上的一切整点阶梯函数划分为各个等价类。今对每一个过程量 $\tilde{x}$，我们把等价于 $\tilde{x}$ 的全体过程量记作 $\langle\tilde{x}\rangle$ 或简记作 $\langle x\rangle$，并称此为 $\tilde{x}$ 的等价类。特别，常过程量 $\tilde{c}$ 的等价类可记作 $\langle c\rangle$，或简记作 c。于是，一切等价类作成的集合 $\{\langle x\rangle\}$ 正是我们所需要的超幂 $^*R$，即

$$^*R=\{\langle x\rangle\}.$$

因为 $^*R$ 中包含一切 $\langle c\rangle$，而全体 $\langle c\rangle$ 作成的集合同构于标准实数域 R，故可认为 $\mathbf{R}$ 是 $^*R$ 的一个子集(事实上还可进一步验明，在 $^*R$ 上引进序关系和四则运算后它成为 $\mathbf{R}$ 的一个扩张域.)。

2. 作为有序数域的 $^*\mathbf{R}$. 当 $\tilde{x}=\tilde{y}$ 时我们定义 $\langle x\rangle=\langle y\rangle$。同样，按下述条件

$$\{n\,|\,x(n)\geqslant y(n),\ n\in\mathbf{N}\}\in\mathscr{U}$$

可以定义 $\langle x\rangle\geqslant\langle y\rangle$。类似地，可以定义 $\langle x\rangle\neq\langle y\rangle$ 及 $\langle x\rangle>\langle y\rangle$ 等关系。根据超滤集 $\mathscr{U}$ 的性质，不难验明 $^*R$ 中的成元满足三分律：对任何 $\langle x\rangle,\langle y\rangle\in{}^*R$，下列三式

$$\langle x\rangle=\langle y\rangle,\quad\langle x\rangle>\langle y\rangle,\quad\langle x\rangle<\langle y\rangle$$

中有且只有一式成立，而且不等式关系具有传递性。因此，超幂 $^*R$ 是个有序集合。

我们再来规定 $^*R$ 中元素之间的运算：

$$\langle x\rangle\pm\langle y\rangle=\langle x\pm y\rangle=\langle\tilde{x}\pm\tilde{y}\rangle,$$
$$\langle x\rangle\cdot\langle y\rangle=\langle x\cdot y\rangle=\langle\tilde{x}\cdot\tilde{y}\rangle.$$

按上述方式定义的加法与乘法，显然适合交换律与结合律，且 $\langle 0\rangle,\langle 1\rangle$ 与 $\langle -x\rangle$ 分别是加法零元素、乘法单位元素和 $\langle x\rangle$ 的加法逆元素。又如果 $\langle x\rangle\neq\langle 0\rangle$，则只须令

$$y(t)=\begin{cases}0 & \text{当}\ x(t)=0\ \text{时},\\ 1/x(t) & \text{当}\ x(t)\neq 0\ \text{时},\end{cases}$$

便可由 $y(t)$ 引出过程量 $\tilde{y}$ 及其等价类 $\langle y\rangle$。于是规定 $\langle x\rangle^{-1}=\langle y\rangle$，则可见

$$\langle x\rangle\cdot\langle x\rangle^{-1}=\langle x\rangle\cdot\langle y\rangle=\langle x\cdot y\rangle=\langle 1\rangle.$$

因此，$\langle x\rangle^{-1}$ 恰好就是 $\langle x\rangle$ 的乘法逆元素.

综上所述，$^*R=\{\langle x\rangle\}$ 构成一个有序域，而标准实数域 R 是 $^*R$ 的一个真子域. 如所知，所谓"非标准分析"就是在 $^*R$ 上建立起来的一套数学分析.

凡由趋零过程量 $\tilde{x}$ 引出的等价类 $\langle x\rangle$ 都叫做"无穷小"，而由趋无穷过程量 $\tilde{y}$ 引出的等价类 $\langle y\rangle$ 都叫做"无穷大"；所以 $^*R$ 中包含有无限多的无穷小与无穷大，它们都称为 $^*R$ 中的"非标准数"（当然任何标准实数与非标准数的和与差也都是 $^*R$ 中的非标准数）.

3. *R中的无限大自然数. 现在我们来给出无限自然数的概念. 设 $f(n)$ 为定义在非负整数集 $\{0,1,2,\cdots,n,\cdots,\}$ 上恒取正整数值的函数. 又设 $f(n)$ 为单调增函数，且 $f(n)\to+\infty\ (n)\to\infty$；则由 $x(t)=f(n),n\leqslant t<n+1,(n=0,1,2,\cdots,)$ 产生的趋无穷过程量 $\tilde{x}=\{x(t)\,|\,0\leqslant t<+\infty\}$ 引出的等价类 $\langle x\rangle$ 便叫作"无限自然数". 这个定义是合理的，因为上述阶梯函数 $x(t)$ 恒取整数值，而且容易验明对任给标准自然数 m 都有 $\langle x\rangle>\langle m\rangle$.

例　令 $[a]$ 表示标准正实数 a 的"整数部"，则易见

$$f(n)=n,\ \ f(n)=\left[\frac{n}{2}\right],\ \ f(n)=[\sqrt{n}],\ \ f(n)=n-3,$$

等相应地导出的等价类 $\langle x\rangle$ 都是无限大自然数，它们可以分别地简记作

$$\omega,\ \left[\frac{\omega}{2}\right],\ [\sqrt{\omega}],\ \omega-3.$$

4. 非Cantor意义的自然数序列结构. 上面我们已举出一个趋无穷过程量 $\tilde{x}=\{x(t)\,|\,0\leqslant t<+\infty\}$，其中 $x(t)=n$，$(n\leqslant t<n+1,\ n=0,1,2,\cdots,)$. 我们曾把这个过程量 $\tilde{x}$ 的等价类 $\langle x\rangle$ 简记作 ω，并称它为无限大自然数. 因为 ω 比每个自然数 n 都要大，所以可把它置于所有标准自然数之后：

$$1,2,3,\cdots,n,\cdots,\omega.$$

按照 Cantor 的观点，可以把 ω 看作是一个"极限序数"，它是诸 n 无限增大时趋向的目标. 另一观点是把 ω 看作是自然数序列的"序型"标志.

因为自然数序列的有限平移，例如，将

$$1,2,2,\cdots,n,\cdots$$

改换成 $k+1,k+2,\cdots,k+n,\cdots$，或 $-k+1,-k+2,\cdots,-k+n,\cdots$，之后，其无限增大时的趋向目标不应有所不同，所以在考虑自然数无限增长的状态时，必须把无限自然数 $\omega\pm k$（k 为任一固定自然数）看成是同一类对象. 这个直观思想使我们引出如下定义：

定义一　称形如 $\omega\pm k$ 的无限自然数为 ω 的等价元，凡 ω 的所有等价元构成的类就称为 ω 的等价类，记作 $((\omega))$.

注意 $((\omega))$ 已经不是 $^*R$ 中的成元，但它却可作为 $^*R$ 中的无限自然数划分为较小一类与较大一类的"分界标志"：凡 $^*R$ 中的自然数比任何形如 $\omega\pm k$ 的数都要小的（或都要大的），就规定它们属于"较小类"（或"较大类"）. 它们与 $((\omega))$ 的顺序比较关系仍可采用"<"（或">"）.

例　容易验明 $\left[\frac{\omega}{2}\right]<((\omega)),[\sqrt{\omega}]<((\omega)),\omega^2>\langle\langle\omega\rangle\rangle$，等等.

有了划分大小类的"分界标志"后，即可引进包含具体内容的"飞跃段"（又称"潜变段"）的概念.

定义二 按 $((\omega))$ 为分界标志，有序域 $^*R$ 中属于较小类的所有无限自然数构成的序集片段即称为自然数序列 $\langle 1\rangle,\langle 2\rangle,\langle 3\rangle,\cdots,\langle n\rangle,\cdots$, 的"飞跃段"或"潜变段".

引入上述概念后，由"穷竭原理"[4][8]所肯定的"飞跃段"的内容就和Cantor经典集论里的说法截然不同. 在Cantor的自然数序列里，飞跃段$(\cdots)_1$并不包含任何新内容. 但在我们这里，当"穷竭原理"应用于R的扩张域$^*R$上时，"飞跃段"却可获得如定义二所表述的新含义. 试考虑$^*R$上的延伸变程：$\langle 1\rangle,\langle 2\rangle,\langle 3\rangle,\cdots,\langle n\rangle$. 这里的延伸规律为：当$\langle n\rangle<((\omega))$时即随之有继元$\langle n+1\rangle$置于$\langle n\rangle$之后. 如是，按相对穷竭原理便可得到完成了的真无限序列：$\langle 1\rangle,\langle 2\rangle,\cdots,\langle n\rangle,\cdots$. 为明确计，可引入下述

飞跃段存在公理 在$^*R$中根据延伸与穷竭二原理产生的过程量化的自然数序列

$$\langle 1\rangle,\langle 2\rangle,\langle 3\rangle,\cdots,\langle n\rangle,\cdots,$$

必定穷尽地包含了在$((\omega))$之前的（即比任何形如$\omega\pm k$的数都要小的）一切标准自然数与无限自然数. 特别，那些无限自然数构成上述序列的一个"飞跃段"（参阅定义二）.

由存在公理所肯定的真无限序列可记为

$$\mathbb{N}:\langle 1\rangle,\langle 2\rangle,\langle 3\rangle,\cdots,\langle n\rangle,\cdots,|((\omega)),$$

或写成 $\mathbb{N}=\{\nu\,|\,\langle 1\rangle\leqslant\nu<((\omega)),\ \nu$ 为 $^*R$ 中的自然数$\}$.

显然，存在公理乃是一项基本规定（也可看成是一个定义），即规定一切有限序数和比任何$\omega\pm k$都要小的无限自然数均出现在完成了的（穷竭了的）无穷总体$\mathbb{N}$之中.这一规定(或定义)应该是合理的，因为$((\omega))$可以理解为诸$\langle n\rangle$无限增大时趋向的"无穷大目标"，正如同Cantor的极限序数ω可以看作是诸标准自然数n趋向的无限大目标一样.

但$\mathbb{N}$与Cantor意义下的自然数序列毕竟有本质的不同. 因为后者所指的自然数序列均为有限序数，而在$\mathbb{N}$中却有无限多的较诸$\omega\pm k$小的无限自然数，例如$\left[\frac{\omega}{2}\right]$, $\left[\frac{\omega}{3}\right]$, $\left[\frac{\omega}{4}\right]$等等. 事实上，不难证明如下的

命题 在Non—Cantorian自然数序列模型$\mathbb{N}$中包含有无穷多的无限自然数，它们的个数至少和标准实数一样多.

证明 在$\mathbb{N}$中取无限自然数列

$$\left[\frac{\omega}{3}\right],\ \left[\frac{\omega}{3^2}\right],\cdots,\left[\frac{\omega}{3^k}\right],\cdots,$$

作形如下状的无限自然数

$$\lambda_1\left[\frac{\omega}{3}\right]+\lambda_2\left[\frac{\omega}{3^2}\right]+\cdots+\lambda_k\left[\frac{\omega}{3^k}\right]+\cdots,$$

其中诸λ_k取0或1. 则此种无限自然数就和二进位小数（标准实数）一般多，而且可以证明它们都在$\mathbb{N}$内. 事实上，在$^*R$上应用非标准分析方法进行计算容易验明

$$\left[\frac{\omega}{3}\right]+\left[\frac{\omega}{3^2}\right]+\cdots+\left[\frac{\omega}{3^k}\right]+\cdots<\omega\pm j,$$

其中 j 为任一有限正整数、命题证毕．

最后，让我们指出，无穷集合 $\mathbb{N}$ 与 $^*R$ 中的非标准自然数集合 $^*N$ 是不同的，因为(i) $^*N$ 中的一切非标准自然数是通过外插法引进的，而 $\mathbb{N}$ 中的所有出现在 $((\omega))$ 之前的无限自然数则是在形成无穷总体 $\mathbb{N}$ 的同时在它的内部生成的，也即 $\mathbb{N}$ 是生成观点下的无穷总体，而 $\mathbb{N}$ 中的飞跃段乃是穷竭过程（按照穷竭原理所形成的真无限过程）的必然产物．(ii) $\mathbb{N}$ 和 $^*N$ 在内容上也是不同的，$^*N$ 中包含形如 $\omega\pm k$ 的无限自然数（也包含比 ω 大的一切无限自然数），但 $\mathbb{N}$ 中不包含比 ω 大的自然数，而且还抽去了所有形如 $\omega\pm k$ 的自然数．

显然，$\mathbb{N}$ 中的无限自然数既无最小者也无最大者，它们可以看作是处于诸有限序数 $\langle n\rangle$ 与 $((\omega))$ 之间的潜变性对象．不妨称它们为由有限序数 $\langle n\rangle$ 过渡到真实无限大 $((\omega))$ 之前的"潜在无限大整数"，或简称为 $\mathbb{N}$ 中的"潜在无穷大"．

§3　关于两个悖论的解释方法

利用 Non—Cantorian 自然数模型 $\mathbb{N}$ 的构造特征，就可以对 §1 中提到的两个悖论给出某种比较合理的解释方法．

（一）关于"抛球悖论"的解释． 试将抛球时间序列 $\{t_n\}$ 放到 $^*R$ 上来考察．如是，可将 $\{t_n\}$ 与 $\{\langle n\rangle\}$ 对应起来：$t_n\longleftrightarrow\langle n\rangle$，$(\langle n\rangle\in\mathbb{N})$．可记

$$t_\nu=\sum_{k=1}^{\nu}1/2^k,\quad \nu\in\mathbb{N}.$$

今在 $\mathbb{N}$ 的飞跃段中选取无穷多个偶的无限自然数与奇的无限自然数（其偶性与奇性是分别从标准数列继承下来的）：

$$\nu_j=2\left[\frac{\omega}{3+1/j}\right],\quad \mu_j=2\left[\frac{\omega}{3+1/j}\right]+1,$$

这里 $j=1,2,3,\cdots$．于是，在这些时刻 t_{ν_j} 和 t_{μ_j} 可以认为球仍将分别落到 A 处和 B 处．但因 ω 与 ν_j,μ_j 等均为无限自然数，故广义实数 t_ν 的"标准部份"(Standard parts) 为[2]

$$st(t_{\nu_j})=st(t_{\mu_j})=st(t_\omega)=1,\quad (j=1,2,\cdots,).$$

这表明当抛球时间达到一分钟时，该球抵达 A 处和 B 处各有无穷多次（当然还不难进一步说明，球在 A、B 间取任一位置也有无穷多次！）．

上述解释无非是对"抛球悖论"的存在性在逻辑推理上给予一种明确的肯定方式．至于在实践上，由于抛球悖论的条件无法实现，自然是不会碰到这种属于纯粹"理性思维领域"的怪论的．

（二）关于"恩格斯无限矛盾论"的解释． 为便于阐明无限矛盾论的实质，这里仍取自然数的无限性作为论题对象或典型范例．于是，恩格斯关于无限的矛盾论，无非是说明从有限可以过渡到无限，而有限与无限两者既具有不同的质，所以两者必然要通过相互渗透，而后才能达到质的完全转化．模型 $\mathbb{N}$ 的特点，正好表明从有限的诸 $\langle n\rangle$ 发展到真无

限 $((\omega))$ 之前，须通过具有质变因素的“飞跃段”（潜变段）。这个“飞跃段”包含着无穷多的“潜在无限大”（相对于 $((\omega))$ 而言），它们和 $((\omega))$ 联系在一起表现了潜无限与实无限之间的相互渗透和过渡转化的具体型式。

由上所述，可见数学模型 $\mathbb{N}$ 的建立，正好能对恩格斯的“无限矛盾论”提供一种数学上的具体解释。

§4 模型 $\mathbb{N}$ 与排中律的关系

如所知，“排中律”在数学推理中是否无条件地有效的问题，是形式主义者与直觉主义者争论的重点之一。前者坚持排中律，而后者并非无条件接受排中律。争论的根本原因是由于前者承认自然数的真无限性概念，即承认自然数可以构成一个“无穷集合”；而后者则认为自然数永远处于创造着的状态中，那是一个永不能完成的（即不可能穷竭的）“延伸进程”，故对于这样一类无限性论题对象（或更一般的无限性对象）排中律就不再普遍适用。

如 Non—Cantorian 自然数模型 $\mathbb{N}$ 所示，自然数从有限发展到无限有着一个作为转化阶段的“潜变段”（飞跃段），其中包含着一批“潜在无限大”，它们既非有限数，而又小于真无限 $((\omega))$。因此所谓“非有限即无限”的排中律推理原则在 $\mathbb{N}$ 上并不能适用。

上节曾利用 $\mathbb{N}$ 的结构形式分析了“抛球悖论”。现在只须将该悖论命题改换一个陈述形式，即可发现排中律推理原则也不能适用。

在所考虑的时间区间 $(0\leqslant t\leqslant 1)$ 内，可引进“球到手”与“球不到手”两个相互排斥的概念：如果球到达 A 处与 B 处中之任一处，则称“球到手”，否则称为“球不到手”。于是对每一时刻 $t(0\leqslant t\leqslant 1)$，要么“球到手”要么“球不到手”，两者必居其一。可是当时刻 $t=\sum_{k=1}^{\infty}1/2^k=st(\sum_{k=1}^{\omega}1/2^k)=1$ 时，相应的情况既不是“球到手”，也不是“球不到手”。可见此时逻辑上的排中律已不能适用于“抛球命题”的一对互斥概念。

上述命题还表明：如果只承认自然数的潜无限，而不承认实无限 ω（或 $((\omega))$），则排中律推理原则对“抛球命题”中的互斥概念恒为有效。但一旦承认实无限和 $^*R$ 上的非传统的自然数模型 $\mathbb{N}$，则排中律就不再保持恒为有效。这也说明实无限与潜无限的矛盾还表现在排中律问题上。又因为 $\mathbb{N}$ 是 $^*R$ 上的最简单的自然数无限性模型，故推而广之可以断言：在存在着模型 $\mathbb{N}$ 的理论系统里，排中律对一般无限性对象说来都未必普遍有效。这样，我们和直觉主义者在关于排中律的观点结论上便表现为不谋而合，但作为基本理论出发点的“无限观”却是截然不同的。有关模型 $\mathbb{N}$ 的哲学涵义及逻辑推论等问题的进一步分析讨论，只好留待将来的续篇了。当然，也还有另外不少问题尚须深入研究。

参 考 文 献

[1] Van Osdol, D. H., Truth with respect to an ultrafilter or how to make intuition rigorous, *Amer. Math. Monthly* 79 (1972), № 40, 355—363.

[2] Robinson, A., Non—standard Analysis, Amsterdam, 1966, chap. 1—2.

[3] 徐利治，任意贯数极限元素的理论，清华大学理科报告，5 (1950)，№ 4，428—440.

[4] 徐利治，关于Cantor超穷数论上几个基本问题的定性分析和连续统假设的不可确定性的研究，东北人民大学自然科学学报，(1956)，№ 1，67—103.

[5] 徐利治，略论近代数学流派的无限观和方法论，吉林大学社会科学论丛第一集（1980）. 76—91.

[6] 徐利治、朱梧槚，超穷过程论的基本原理，东北人民大学自然科学学报.(1957)，№ 1. 41—45.

[7] 徐利治、朱梧檟，论超穷过程论中的两个基本原理与Hegel的消极无限批判，东北人大自然科学学报(1956)，№ 2，111—121.

[8] 徐利治、朱梧檟、袁相碗、郑毓信，论Gödel不完备性定理，数学研究与评论，(1981)，№ 1，151—162.

[9] 徐利治，谈谈现代数学发展中的几个认识论问题. 哲学研究，(1981)，№ 8，12—14.

[10] 莫绍揆，数理逻辑导论，1965，上海科技出版社.

[11] 谢邦杰，超穷数与超穷论法，1979，吉林人民出版社.

[12] 杨熙龄，悖论研究八十年，国外社会科学，(1980)，№ 7，10—17.

[13] 朱梧檟，袁相碗、郑毓信，论集合与点集空间，南京大学学报（自然科学学报），(1980)，№ 3，129—135.

[14] 朱梧檟，潜尾数论导引，辽宁师院学报自然科学版，(1979)，№ 3，1—9.

[15] 郑毓信，论数理哲学中的几个问题，南京大学哲学系，1981.

[16] 刘永振，关于悖论及其认识论问题，哲学研究，(1981)，№ 8，16—18.

[17] 张家龙，论语义悖论，哲学研究，(1981)，№ 8，60—67.

[18] 吴咸，怎样认识无限，自然辩证法杂志，(1974)，№ 3，35—54.

Antinomies and the Foundational Problem of Mathematics (I)

By Hsu L. C. (徐利治), *Chu W. J.* (朱梧檟)

Yuan S. W. (袁相碗), *Tseng Y. S.* (郑毓信)

Abstract

This expository article is motivated by two well-known antinomies. The first is the extended Zeno paradox concerning two persons playing at a ball, passing the

ball to and fro within 1/2,1/4,1/8,⋯,minutes successively, and questioning the place of the ball at the end of one minute. The second antinomy is that of Engels concerning the real infinitude of successively generated finite ordinals. In order to explain away or give answer to these two antinomies, we have constructed a kind of non-Cantorian model for the sequence of natural numbers by the aid of Van Osdol-Takahash i's ultrapower (extended real number field) $^*R$. In what follows are a few definitions and some propositions discussed in this article.

Definition 1. A standard or non-standard natural number ν of $^*R$ is said to be less than $((\omega))$ if $\nu<\omega-k$ for every standard positive integer k, where ω is the infinite natural number defined by the equivalent class of the sequence $x_n=n$, $(n=1,2,3,\cdots,)$.

Definition 2. The ordered set of all the natural numbers (standard or non-standard) of $^*R$ which are less than $((\omega))$ is called a non-Cantorian model of natural numbers, and may be denoted by

$$\mathcal{N}=\{\nu\,|\,\nu<((\omega)),\nu\in{}^*R\}.$$

Proposition 1. The non-standard natural numbers contained in the model $\mathcal{N}$ are at least as many as real numbers.

Proposition 2. For the extended Zeno paradox the ball will be got by each of the two players for infinitely many times at the end of one minute.

Proposition 3. The law of excluded middle does not generally hold for infinite aggregates containing $\mathcal{N}$ as a part.