1982年 第2卷 第3期
Vol.2, No.3, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

不动点理论的新发展(I)*

张 石 生

(四川大学数学系)

§1 引 言

设 (X,d) 是一完备度量空间，设 T 是映 X 到 X 的映象。我们称 $x_*\in X$ 为 T 的不动点，如果 $Tx_*=x_*$。设 T 是映 X 到 2^X（X 的一切子集的集合族）的多值映象，我们称 $x_*\in X$ 为 T 的不动点，如果 $x_*\in Tx_*$。

易知一算子 T 的不动点集，与特征值问题

$$(T-\lambda I)x=0$$

当 $\lambda=1$ 时的解集是一致的。而且当我们在某一空间，比如 Banach 空间中，考察某一具体的算子方程 $Sx=y$ 时，寻求该方程的解等价于求出算子 T：

$$Tx=Sx+x-y$$

的不动点。

一般说来，不动点定理有两类：即拓扑型不动点定理和代数(或构造)型不动点定理。拓扑型不动点定理严格来说是不动点的存在性定理，即它只建立不动点的存在性条件，而不提供寻求不动点的具体方法；代数型不动点定理不仅要建立不动点存在性条件，而且还要给出寻求不动点的具体方法。

Banach 压缩映象原理，Schauder 不动点定理及 Krasnosel'skii 不动点定理是算子方程理论中广泛使用的三条著名的不动点定理。Banach 压缩映象原理是最典型的代数型的不动点定理。这一定理是经典的 Picard 迭代法的抽象表述；Schauder 不动点定理是型典的拓扑型的不动点定理。它是经典的 Brouwer 基本的不动点定理最重要的推广；而 Krasnosel'skii 不动点定理可以认为是代数型和拓扑型不动点定理结合的典范。这一定理在证明扰动算子方程解的存在性定理中起到重要的作用。

最近十年来不动点理论及应用有了重要的发展。

本文的目的是扼要地概述近十年来不动点理论发展中的一些主要问题和主要结果。在叙述过程中也顺便介绍了作者本人最近几年的某些工作。

---

* 本文曾在1981年8月牡丹江市召开的全国泛函分析(空间及应用组)学术讨论会上报告过。发表时经作者作了某些修改和补充。

1981年10月23日收到。

全文共三部分. 本文是其中的第一部分，概述单值和多值压缩型映象不动点理论及其应用方面最近十年来的一些主要问题和主要结果. 在第二部分中将介绍单值和多值非扩张映象、平均非扩张映象、Schauder 和 Caristi 型映象不动点理论近十年来的一些主要问题和主要结果. 在第三部分中将介绍单值和多值随机不动点理论的主要问题和主要结果.

§2 压缩型映象的分类

Banach 压缩型映象原理是压缩型映象的一个著名的不动点定理.它在近代数学的许多分枝所起的重要作用是众所周知的. Banach 在本世纪二十年代提出这一原理后，半个多世纪来，特别是近十年来，Banach 压缩映象原理已有许多重要的发展. 许多人提出了下面一系列的压缩型映象的概念和一系列的压缩型映象的不动点定理.

定义 1 设 (X, d) 是一完备的度量空间，设 T 是映 X 到 X 的映象，设 T 满足下面之一条件 (m): $m=1,2,\cdots,16$，则称 T 是属于第 (m) 类的压缩型映象:

(1) (Banach[32]). 存在一常数 $c\in(0,1)$，使得

$$d(Tx,Ty)\leqslant cd(x,y)\quad \forall x,y\in X.$$

(2) (Rakotch[31]). 存在一单调减的函数 $\alpha(t):(0,\infty)\to[0,1)$，对每一 $x,y\in X$, $x\neq y$ 使得

$$d(Tx,Ty)\leqslant \alpha(d(x,y))d(x,y).$$

(3) (Edelstein[18])，对每一 $x,y\in X$, $x\neq y$

$$d(Tx,Ty)<d(x,y).$$

(4) (Kannan[34]). 存在一数 $a\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，使得

$$d(Tx,Ty)\leqslant a\{d(x,Tx)+d(y,Ty)\}\quad \forall x,y\in X.$$

(5) (Bianchini[10]). 存在一数 $h\in[0,1)$，使得

$$d(Tx,Ty)\leqslant h\max\{d(x,Tx),\ d(y,Ty)\}\quad \forall x,y\in X.$$

(6) (Reich[11])，存在非负数 a,b,c 满足 $a+b+c<1$，使得

$$d(Tx,Ty)\leqslant ad(x,Tx)+bd(y,Ty)+cd(x,y)\quad \forall x,y\in X.$$

(7) (Reich[12]). 存在 $(0,\infty)\to[0,1)$ 且满足 $a(t)+b(t)+c(t)<1$ 的单调减的函数 $a(t),b(t),c(t)$，使得

$$d(Tx,Ty)\leqslant a(d(x,y))d((x,Tx)+b(d(x,y))d(y,Ty)+c(d(x,y))d(x,y)$$
$$\forall x,y\in X,\ x\neq y.$$

(8) (D. Roux, P. Socrdi [13]). 存在一数 $h\in(0,1)$，使得

$$d(Tx,Ty)\leqslant h\max\{d(x,Tx),\ d(y,Ty),\ d(x,y)\}\quad \forall x,y\in X.$$

(9) (Sehgal[14]). 对每一 $x,y\in X$, $x\neq y$

$$d(Tx,Ty)<\max\{d(x,Tx),\ d(y,Ty),\ d(x,y)\}.$$

(10) (Chatterjea[15]). 存在一数 $a\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 使得

$$d(Tx,Ty)\leqslant a\{d(x,Ty)+d(y,Tx)\}\quad \forall x,y\in X.$$

(11) (Hardy, Roges[16]). 存在满足 $\sum_{i=1}^{5}a_i<1$ 的非负数 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5，使得对每一 $x,y\in X$

$$d(Tx,Ty)\leqslant a_1d(x,y)+a_2d(x,Tx)+a_3d(y,Ty)+a_4d(x,Ty)+a_5d(y,Tx).$$

（12）（Zamfirescu [17]，Massa[36]）。存在常数 $h\in[0,1)$，使得

$$d(Tx,Ty)\leqslant h\max\{d(x,y),\ \frac{1}{2}[d(x,Tx)+d(y,Ty)],$$

$$\frac{1}{2}[d(y,Tx)+d(x,Ty)]\}\quad \forall x,y\in X.$$

（12′）或等价的存在满足下式的非负函数 a,b,c：

$$\sup_{x,y\in X}\{a(x,y)+2b(x,y)+2c(x,y)\}\leqslant\lambda<1,$$

使得对每一 $x,y\in X$

$$d(Tx,Ty)\leqslant a(x,y)d(x,y)+b(x,y)\{d(x,Tx)+d(y,Ty)\}+c(x,y)\{d(x,Ty)+d(y,Tx)\}.$$

（13）（Ciric [19]）。存在常数 $h\in[0,1)$，使得

$$d(Tx,Ty)\leqslant h\max\{d(x,y),\ d(x,Tx),\ d(y,Ty),\ \frac{1}{2}[d(x,Ty)+d(y,Tx)]\}.$$

（13′）或等价的存在非负函数 q,r,s,t 满足条件

$$\sup_{x,y\in X}\left\{q(x,y)+r(x,y)+s(x,y)+2t(x,y)\right\}\leqslant\lambda<1,$$

使得对每一 $x,y\in X$

$$d(Tx,Ty)\leqslant q(x,y)d(x,y)+r(x,y)d(x,Tx)+S(x,y)d(y,Ty)+t(x,y)\{d(x,Ty)+d(y,Tx)\}.$$

（14）（Rhoades[1]）。存在单调减的函数 $\alpha_i(t)$，$i=1,2,\cdots,5$：$(0,\infty)\to[0,1)$，满足 $\sum_{i=1}^{5}\alpha_i(t)<1$，使得对每一 $x,y\in X$，$x\neq y$

$$d(Tx,Ty)\leqslant\alpha_1(d(x,y))d(x,Tx)+\alpha_2(d(x,y))d(y,Ty)+\alpha_3(d(x,y))d(x,Ty)+\alpha_4(d(x,y))d(y,Tx)+\alpha_5(d(x,y))d(x,y).$$

（15）（Ciric[20]）。存在常数 $h\in[0,1)$，使得对每一 $x,y\in X$

$$d(Tx,Ty)\leqslant h\max\{d(x,y),\ d(x,Tx),\ d(y,Ty),\ d(x,Ty),\ d(y,Tx)\}.$$

（16）（Rhoades[1]）。对每一 x，$y\in X$，$x\neq y$

$$d(Tx,Ty)<\max\{d(x,y),\ d(x,Tx),\ d(y,Ty),\ d(x,Ty),\ d(y,Tx)\}.$$

前述的第一组的16类压缩型映象是通过 T 本身定义的。如果对某一正整数 p，使 T 的第 p 次迭代映象 T^p 满足前述的 16 个条件之一，比如(m)，$m=1,2,\cdots,16$则称 T 是属于第$(16+m)$类的压缩型映象。于是得出第二组的 16 类压缩型映象，我们以（17）—（32）编号之。例如第（20），（26），（31），（32）类压缩型映象分别在 Singh [21]，Chatterjea [15]，Ciric [20]，张[45]中定义和讨论。

如存在某二正整数 p,q 使迭代映象 T^p，T^q 满足第一组的 16 个条件之一，比如(m)，$m=1,2,\cdots,16$。则称 T 是属于第$(32+m)$类的压缩型映象。于是得出第三组的 16 个压缩型映象，我们以（33）—（48）编号之。例如

（33）（Yen [22]）。存在正整数 p,q 和数 $a\in(0,1)$，使得

$$d(T^px,\ T^qy)\leqslant ad(x,y)\quad\forall x,y\in X.$$

又第(47)类压缩型映象在Rhoades[1]中定义和讨论.

如果第(17)—(32)类压缩型映象中的正整数p依赖于$x\in X$，则得出第四组的16类压缩型映象，我们以(49)—(64)编号之．例如第(49)类压缩型映象在Lee[25]和Guseman[24]中定义和讨论．

如果第(49)—(64)类压缩型映象定义中的正整数p不仅依赖于x，而且也依赖于y，于是又可得出第五组的16类压缩型映象的定义，我们以(65)—(80)编号之．例如第(67)类压缩型映象在Bailey[26]中定义和讨论．

上述的80类压缩型映象是通过T或者T的某一迭代映象来定义．如果这些映象是通过一对映象T_1，T_2来定义（这里T_1，T_2是(X,d)到(X,d)的映象)．则称T_1，T_2是属于该类的压缩型映象对．于是我们可得出80类“压缩型映象对”的概念．我们以(80)—(160)编号之．例如

(81)(Ray[28])．存在$a\in(0,1)$，使得

$$d(T_1x,T_2y)\leqslant ad(x,y)\quad \forall x,y\in X.$$

又第(90)类，(118)类，(157)类压缩型映象对分别在[15]，[23]，[27]中定义和讨论；第(91)类压缩型映象对在[15,29,30,33,41,42,43]中定义和讨论．

前述的160类压缩型映象和压缩映象对的概念在不同的阶段，由不同的作者提出，而且其中不少的类型（如我们在前面所指出的）已为许多人加以研究．综合起来关于第(1)—(48)类(除第(16)，(32)，(48)类外)压缩型映象得出如下的结果：

理理1.1 设(X,d)是一完备的度量空间，设T是映X到X的映象．

(i) 如果T属于(1)，(2)，(4)，(5)，(6)，(7)，(8)，(10)，(11)，(12)，(13)，(14)，(15)中任一类压缩型映象，则T在X中存在唯一的不动点．

(ii) 如果T是属于(17)，(18)，(20)，(21)，(22)，(23)，(24)，(26)，(27)，(28)，(29)，(30)，(31)中的任一类连续的压缩型映象，则T在X中存在唯一的不动点．

(iii) 如果T是映紧致度量空间(X,d)到(X,d)的连续映象，再设T是属于第(3)，(9)，(19)，(25)，(35)，(41)类中的任一类压缩型映象．则T在X中存在唯一的不动点．

§3 关于第(16)类压缩型映象不动点的存在性问题

由前节的定义易知第(1)—(15)，(17)—(31)，(33)—(47)类压缩型映象分别是第(16)，(32)，(48)类压缩型映象的特例．

关于第(16)类压缩型映象是否存在不动点的问题，1977年Rhoades在[1]中曾经指出：“对第(16)类压缩型映象至今没有得出过任何的不动点定理”．1977年以后到现在关于第(16)类（因而第(32)类，第(48)类)压缩型映象是否存在不动点及在什么条件下存在不动点的问题仍然没有完全解决，不过有了一些进展．为了叙述方便起见，我们先引进一些定义和符号．

定义2 设(X,d)是一完备的度量空间，T是映X到X的映象．对任一$x\in X$，我们称$O_T(x,0,\infty)=\{x,x_1=Tx,\ \cdots x_n=T^nx\cdots\}$为$T$在$x$处的轨道，对任意的正整数$i$，$j$，$j>i$，我们记

$$O_T(x,i,j)=\{x_i=T^ix,\cdots,x_j=T^jx\}$$

$$O_T(x,i,\infty)=\{x_i=T^ix,\ x_{i+1}=T^{i+1}x,\cdots\}.$$

同样，对任意的 $x,y\in X$，我们称

$$O_T(x,y,0,\infty)=\{x,y,Tx,Ty,\cdots,T^nx,T^ny,\cdots\}$$

为 T 在 x,y 处生成的轨道．对任意的正整数 $i,j;j>i$，记

$$O_T(x,y,i,j)=\{x_i=T^ix,\ y_i=T^iy\cdots,\ x_j=T^jx,\ y_j=T^jy\}.$$

$$O_T(x,y,i,\infty)=\{x_i,y_i,x_{i+1},y_{i+1}\cdots\}$$

设 $A\subset X$，我们用 $\delta(A)=\sup\limits_{x,y\in A}\{d(x,y)\}$表 A 的直径．

定义 3 设 T 是映 X 到 X 的连续映象，T 称为在 X 上是凝聚的，如果对任一有界集 $A\subset X$，$\gamma(A)>0$，有 $\gamma(T(A))<\gamma(A)$，这里 $\gamma(A)$表 A 的非紧性测度．

关于第(16)和第(32)类压缩型映象不动点的存在性问题，作者在[46]中曾证明了如下的结果．

定理1.2[46]．设 (X,d) 是一完备的度量空间，T 是映 X 到 X 的连续映象．如对某一正整数 m，T^m 在轨道 $O_T(x_0,0,\infty)$ 上是凝聚的，其中 x_0 是 X 中的某一点，而且存在正整数 p，使得对一切的 $x,y\in X$，$x\neq y$ 有

$$d(T^px,T^py)<\max\{d(x,y),d(x,T^px),d(y,T^py),d(x,T^py),d(y,T^px)\},$$

则 T 在轨道 $O_T(x_0,0,\infty)$的闭包中存在唯一的不动点．

Fisher[2]在假定 (X,d) 是紧致度量空间的条件下证明了下面的结果．

定理 1.3[2] 设 T 是映紧致度量空间 (X,d) 到其自身的连续映象，如存在正整数 p，q 使得

$$d(T^px,T^qy)<\max\{d(T^rx,T^sy),\ d(T^rx,T^{r'}x),\ d(T^sy,T^{s'}y);\ 0\leqslant r,\ r'\leqslant p,\ 0\leqslant s,\ s'\leqslant q\}\tag{161}$$

对一切使上式右端大于 0 的 $x,y\in X$ 成立，则 T 在 X 中存在唯一的不动点．

对第(16)，(32)，(48)类压缩型映象不动点理论更深入的结果急需进一步研究．至于第(64)，(80)等类压缩型映象是否存在不动点及在什么条件下存在不动点的问题至今仍然是一个空白．

§4 关于一些新型的压缩型映象的不动点的存在性问题

随着不动点理论的深入发展，近年来不少人尽力寻求新型的压缩型映象，借以统一和发展前述诸人的结果．

1979 年 Fisher 在[2]中引进了拟压缩映象的概念并证明了下面的结果：

定理1.4[2]．设 (X,d) 是一完备的度量空间．如果 T 是映 X 到 X 的连续拟压缩映象，即存在正整数 p，q 和常数 $c\in[0,1)$，使得对一切的 $x,y\in X$

$$d(T^px,T^qy)\leqslant c\max\{d(T^rx,T^sy),\ d(T^rx,T^{r'}x),\ d(T^sy,T^{s'}y):\ 0\leqslant r,r'\leqslant p,\ 0\leqslant s,\ s'\leqslant q\}.\tag{162}$$

则 T 有唯一的不动点．

Fisher 在[2]中还进一步指出，如果定理 1.4 中的 p（或 q）$=1$。则 T 的连续性条件可以取消．

1980 年 Fisher[3]关于压缩映象对证明了下面的

定理 1.5[3] 设 S，T 是映完备度量空间 (X,d) 到 (X,d) 的连续映象，并且假定存在正整数 p，q 和常数 $c\in[0,1)$，使得对一切的 $x,y\in X$ 有

(163) $$d(S^p x,T^q y)\leqslant c\max\{d(S^r x,T^s y):\ 0\leqslant r\leqslant p,\ 0\leqslant s\leqslant q\},$$

则 S 和 T 有唯一的公共不动点 z，而且 z 也是 T 和 S 的唯一不动点。如果(163)中的 $p=1$，则 S 的连续性条件可以取消；如果 $p=1$，$q=1$，则 S，T 的连续性条件可以取消。

由上可知，前面定义的第(1)—(48)类压缩型映象中除第(3)，(9)，(16)，(19)，(25)，(32)，(35)，(41)，(48)类外都是第(162)类压缩型映象的特例。同样可知，第(81)—(128)类压缩型映象对中，除第(83)，(89)，(96)，(99)，(105)，(112)，(115)，(121)，(128)类而外，都是第(163)类压缩型映象对的特例。因此定理 1.4 和定理 1.5 分别统一和发展了前述各类映象的结果。

应该指出前面定义的 163 类压缩型映象，就其右端的比较尺度函数而论，本质上是线性的。因此在右端的比较函数是线性的意义下，我们可以把它们视为“线性型的压缩映象”。近年来由于非线性泛函分析的发展，寻求新的、比较尺度函数为非线性的压缩型映象，这不仅从理论的角度而且从应用的角度来说都有重要的意义。

最近 Singh, Meade, Matkowski, Browder, Husain, Sehgal, Kwapisz 及作者等人，分别利用一些较为一般的单调函数作比较尺度函数，研究映象和映象序列的不动点和公共不动点问题，使前面所述的关于压缩型映象的不动点理论得到较大的发展。

1977 年 Singh, Meade 和 Matkowski 分别在[7]和[5]中证明了如下的结果。

定理1.6[7] 设(X,d) 是一完备的度量空间，设 S 和 T 是 X 到 X 的映象对，设对任意的 $x,y\in X$

(164) $$d(Sx,Ty)\leqslant\Phi(d(x,y),\ d(x,Sx),\ d(x,Ty),\ d(y,Sx),\ d(y,Ty))$$

其中 $\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)$是映 $[0,\infty)^5\to[0,\infty)$的函数，对每一变量不减，而且是上半连续的，并且对每一 $t>0$，

$$\Phi(t,t,a_1t,a_2t,t)<t,\ \text{这里}\ a_1+a_2=3,$$

则在 X 中存在 S 和 T 的唯一公共不动点。

定理 1.7[5] 设 (X,d) 是一完备的度量空间，T 是映 X 到 X 的映象。设 $\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)$是映$[0,\infty)^5\to[0,\infty)$的函数，并且满足条件：

i) Φ 对每一变量是不减的；

ii) $\lim\limits_{t\to\infty}(t-\gamma(t))=0$；

iii) 对每一 $t>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\gamma^n(t)=0$，

这里 $\gamma(t)=\Phi(t,t,t,2t,2t)$，又 $\gamma^n(t)$表 $\gamma(t)$的第 n 次迭代函数。

再设对每一 $x\in X$，存在一正整数 $n=n(x)$使得对一切 $y\in X$

(165) $$d(T^n x,T^n y)\leqslant\Phi(d(x,y),\ d(x,T^n x),\ d(y,T^n y),\ d(x,T^n y),\ d(y,T^n x)).$$

则 T 有唯一不动点 x_*，而且对每一 $x\in X$，迭代序列$\{T^k x\}$收敛于 x_*。

注 1 前面定义的第(63)和(95)类压缩型映象分别是第(165)和第(164)类映象当比较函数 $\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)=h\max\{t_1,t_2,t_3,t_4,t_5\}$时的特例。因此前面讨论的第(49)—(63)

类映象中除第(51)和第(57)类外都是第(165)类映象的特例。同样前面讨论的第(81)—(95)类映象中除第(83)和第(89)类外都是第(164)类映象的特例。

1979年Browder[9]证明了下面的结果

定理 1.8[9]　设 (X,d) 是一完备的度量空间，设 T 是映 (X,d) 到 (X,d) 的连续映象，设函数 $\Phi(t)$：$[0,\infty)\to[0,\infty)$ 满足条件：$\Phi(0)=0$，$\Phi(t)$ 是不减的和右连续的，而且对任一 $t>0$，$\Phi(t)<t$。再假定存在正整数 n 和三个子集合 J_1，J_2，$J_3\subset Z^+$ (Z^+ 表非负整数的集合)，使得对一切 $x,y\in X$

$$d(T^n x,\ T^n y)\leqslant\Phi(\max\{\sup_{[j,k]\in J_1} d(T^j x,T^k y),\tag{166}$$
$$\sup_{[r,s]\in J_2} d(T^r x,T^s x),\quad \sup_{[m,t]\in J_3} d(T^m y,\ T^t y)\}.$$

则 T 在 X 中存在唯一的不动点，而且对任一 $x_0\in X$，序列 $\{T^n x_0\}$ 当 $n\to\infty$ 时收敛于这一不动点。

我们应该指出，Browder 上述结果如果不补充假定：对任一 $x\in X$，轨道 $O_T(x,0,\infty)$ 为有界的，则结论是不正确的，这只要从下面的简单的例子，即可看出：

例　令 $X=[1,\infty)\subset R$，$Tx=2x$，$\Phi(t)=\frac{1}{2}t$，$n=1$，$J_1=\{(2,2)\}$，$J_2=J_3=\phi$。则

$$|Tx-Ty|=\frac{1}{2}|T^2x-T^2y|\quad \forall x,y\in X.$$

故(166)满足。可是轨道无界。因而定理1.8的结论不成立。

最近作者和丁协平对压缩型映象序列的公共不动点问题都曾进行过讨论。在[47]中作者证明了下面一个较为一般的定理

定理 1.9[47]　设 (X,d) 是一完备的度量空间，设 $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是映 X 到 X 的映象序列。设存在序列 $\{m_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$：$X\to N$(正整数集合)，且 $m_i(x)|m_i(T_ix)$，使得对任意的 $i,j\in N$

$$d(T_i^{m_i(x)}(x),\ T_j^{m_j(y)}(y))\leqslant\Phi(d(x,y),\ d(x,T_i^{m_i(x)}(x)),\tag{167}$$
$$d(y,T_j^{m_j(y)}(y)),\ d(x,\ T_j^{m_j(y)}(y)),\ d(y,\ T_i^{m_i(x)}(x)))\quad \forall x,y\in X,$$

这里 $\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)$ 为满足下之条件的函数

i) Φ：$[0,\infty)^5\to[0,\infty)$ 对每一变量是不减的和右连续的；

ii) 对每一 $q\in[0,\infty)$，在 $[0,\infty)$ 中存在方程

$$t=\gamma(t)+q\tag{*}$$

的极大解 $\mu(q)$，而且 $\mu(0)=0$，这里 $\gamma(t)=\Phi(t,t,t,t,t)$，$t\geqslant0$。则存在 $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的唯一公共不动点 $x_*\in X$，而且对任一 $x_0\in X$，序列 $\{x_n\}$：$x_n=T^{m_n(x_{n-1})}x_{n-1}$，$n=1,2,\cdots$ 收敛于 x^*。

注 2　对给定的 $q\in[0,\infty)$，我们称 $\mu(q)\in[0,\infty)$ 是方程(*)的极大解，如果对该方程的任一解 $\tilde{t}$ 都有 $\tilde{t}\leqslant\mu(q)$。

由定理1.9可得如下推论

推论 1.10　设 T 是映完备度量空间 (X,d) 到 (X,d) 的映象，设存在 $m(x)$：$X\to N$，$m(x)|m(Tx)$，使得对一切的 $x,y\in X$ 有

$$d(T^{m(x)}(x),\ T^{m(y)}(y))\leqslant\Phi(d(x,y),\ d(x,T^{m(x)}(x)),\ d(y,T^{m(y)}(y)),\tag{168}$$
$$d(x,T^{m(y)}(y)),\ d(y,T^{m(x)}(x))).$$

其中Φ满足定理1.9中的条件，则T在X内存在唯一的不动点x_*，而且对任一$x_0\in X$，迭代序列$\{x_{n+1}=T^{m(x_n)}(x_n)\}$收敛于$x_*$。

推论1.11 设$\{T_i\}$，(X,d)，$\{m_i(x)\}$的定义如定理1.9。设对一切$x,y\in X$和一切的正整数i，j，$i\neq j$有

$$(169)\quad \begin{aligned} &d(T_i^{m_i(x)}(x),\ T_j^{m_j(y)}(y))\leqslant k\max\{d(x,y),\ d(x,T_i^{m_i(x)}(x)),\\ &d(y,T_j^{m_j(y)}(y)),\ d(x,T_j^{m_j(y)}(y)),\ d(y,T_i^{m_i(x)}(x))\}\end{aligned}$$

其中k是一常数，$k\in[0,1)$，则定理1.9的结论成立。

这只要在定理1.9中取$\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)=k\max\{t_1,t_2,t_3,t_4,t_5\}$，故$\gamma(t)=k\max\{t,t,t,t,t\}=kt$。因而$\Phi$满足条件i)，ii)。

注3 在推论1.11中取$T_i=T$，$j=1,2,\cdots$，并令$m_i(x)=m(x)$，$\forall x\in X$，$j=1,2,\cdots$，即得[56]中的定理5。另外推论1.11也回答了Rhoades[1]中的一个未解决的问题。又Rhoades[1]的定理5,8，Ciric[20]的定理1,2，Ray，Rhoades[27]的定理1,2及作者[41]的定理3都是推论1,11的特例。

在文[54]中作者和丁协平证明了下面的结果

定理1.12[54] 设(X,d)是完备的度量空间，设$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$是映(X,d)到(X,d)的映象序列，设对任意的$x\in X$，存在正整数$m_n(x)$，使得对任意的$x,y\in X$和任意的正整数i，j，$i\neq j$，下式成立

$$(170)\quad \begin{aligned} &d(T_i^{m_i(x)}(x),\ T_j^{m_j(y)}(y))\leqslant\Phi(d(x,y),\ d(x,\ T_i^{m_i(x)}(x))\\ &d(y,\ T_j^{m_j(y)}(y)),\ d(x,\ T_j^{m_j(y)}(y)),\ d(y,\ T_i^{m_i(x)}(x))),\end{aligned}$$

其中函数$\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)$：$[0,\infty)^5\to[0,\infty)$满足条件：

i) Φ对每一自变量是不减的；

ii) 对每一$t>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\gamma^n(t)=0$；

iii) $\lim\limits_{t\to\infty}(t-\gamma(t))=\infty$。

这里$\gamma(t)=\Phi(t,t,t,t,t)$。则$\{T_n\}$在$X$内有唯一公共不动点，而且对任一$x_0\in X$，序列$\{x_n=T_n^{m_n(x_{n-1})}(x_{n-1})\}$收敛于这一点不动点。

作者最近在文章[44]中还证明了如下的结果：

定理1,13[44] 设(X,d)是一完备的度量空间，T是映X到X的连续映象，设对每一$x\in X$，存在一与之相应的正整数$p(x)$，使得

$$(171)\quad \delta(O_T(x,p(x),\infty))\leqslant\Phi(\delta(O\ (x,0,\infty)))$$

其中Φ是满足下面二条件的函数：

($\Phi 1$) $\Phi(t)$：$[0,\infty)\to[0,\infty)$对t是不减的和右连续的，而且对一切$t>0$，有$\Phi(t)<t$。

($\Phi 2$) $\lim\limits_{t\to\infty}(t-\Phi(t))=\infty$。

则对任一$x_0\in X$，迭代序列$\{x_n=T^nx_0\}$收敛于T的不动点。

定理14.1[44] 设(X,d)，T,Φ之意义如定理1.13设存在某一正整数p，使得对一切的$x\in X$和一切的非负整数k下之一条件成立：

(171) $$\delta(O_T(x,p,\infty))\leqslant\Phi(\delta(O_T(x,0,\infty))),$$

(172) $$d(T^px,T^{p+k}x)\leqslant\Phi(\delta(O_T(x,0,\infty))).$$

则定理 1.3 的结论仍成立.

由定理 1.14，直接可得下面的结果

定理1.15[44] 设 (X,d)，T,Φ 之意义如前一定理. 如果存在正整数 p,q 使得对一切的$x,y\in X$

(173) $$d(T^px,T^qy)\leqslant\Phi(\delta O_T(x,y,0,\infty)),$$

则定理 1.13 的结论仍成立.

又如果(173)中的 p （或 q ）$=1$，则定理 1.15 中 T 的连续性条件可以取消.

注 4 Fisher[2]的定理 2,3,Pal Maiti [4] 中的定理，Ciric[19.20] 中的主要结果以及 Rhoades[1]中的定理 23 都是定理 1.15当 $\Phi(t)=ht$，其中 $h\in(0,1)$，$t\geqslant0$ 的特例. 又定理 1.15 也这丁协平[56]中定理的推广. 另 Walter 在[8]中也证明了类似的结果.

最后我们还应提到 Kwapisz 最近的工作[6]，他引进了一种新的抽象的压缩尺度函数，在半序空间中讨论压缩型映象的不动点理论，作者和陈绍仲在文[48]中也讨论了一个抽象的压缩映象原理，包含 Kwapisz[6] 中的主要结果为特例.（待续）

编辑部注：由于编排上的原因，本文（I）发表时分为上、下两半，因此（I）的参考文献目录全在下半之后，查阅时有些不便，特向作者与读者致歉.