1982年 第2卷 第4期
Vol.2, No.4, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

左零化子具升链条件环的一个定理的简单证明*

周尚超 (*Zhou Shang-chao*)

(武汉大学数学系)

1955年谢邦杰[1]给出一个定理：左零化子具升链条件的诣零环为Baer 根环．Herstein, I.N.于1964年得到类似结果[2]．本文给出此定理的一个短证．

设R为一环，$a\in R$，$L(a)=\{r\mid r\in R, ra=0\}$是$a$的在$R$内的左零化子．R是Baer 根环，当且仅当R的任意非零同态像含有非零的幂零理想．

定理 左零化子具升链条件的诣零环R为Baer 根环．

证 我们证明，R的任意非零同态像含有非零的幂零理想．设M是R的任意理想，且$M\neq R$，我们要证在$\bar{R}=R/M$中，有一非零元$\bar{a}$，使得$\bar{a}\bar{R}\bar{a}=\{0\}$，则$\bar{a}$生成的理想自然是$\bar{R}$的非零的幂零理想．

在左零化子的集合$S=\{L(x)\mid x\in R, x\notin M\}$中，有极大者$L(a)$，我们断言，对任意$y\in R$有$aya\in M$，若$aya\notin M$，则从$L(a)$的极大性必有$L(a)=L(aya)$．设$ay$的幂零指数为$n$，则有$(ay)^{n-1}aya=0$，$(ay)^{n-1}\in L(aya)=L(a)$，故$(ay)^{n-1}a=0$，即知$(ay)^{n-2}\in L(aya)=L(a)$，$(ay)^{n-2}a=0$，$(ay)^{n-1}=0$．矛盾，因此必有$aya\in M$对所有的$y\in R$．这样，在$\bar{R}$中，就有$\bar{a}\neq 0$，而$\bar{a}\bar{R}\bar{a}=\{0\}$，因此$\bar{a}$生成$\bar{R}$的非零幂零理想．证毕．

参考文献

[1] 谢邦杰，Baer 根环与零化子适合链条件之诣零环，东北人民大学自然科学报，1955年第一期，71—89.

[2] Herstein, I. N. and Small, L., Nil rings Satisfying certain chain conditions, Canad.J.Math. 16(1964), 771—776.

*1982年3月10日收到.