1982年 第2卷 第4期
Vol.2, No.4, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

评 二 则 科 学 通 讯*

钟 开 莱

（美国斯坦福大学）

科学通报（中文版）26卷（1981）第18、19两期，载有侯振挺的研究通讯，关于更新序列的一个定理．此定理出于 Kingman，但文中未明示，可参考 Kendall & Harding: Stochastic Analysis，第26页，其证不到半页，用马氏链来看，是个直捷明显的结果．因更新序列亦可用母函数作解析性的定义，Kendall 问起有无纯粹解析的证明？我们知道有些问题在某种看法下貌似困难，而用另一新目光观之即迎刃而解．数学历史中很多这种例子；这就是发展新理论新方法来开拓新领域的一大推进动机．例如：在微积分未发明之前，求一个简单函数的极大值都需要技巧，名家如 Fermat 都做过这种问题．今日即高中学生懂得初步微分的也做得出来，这是科学的大进步．概率论的发展，把许多古老的解析问题，化为一目了然．例如用布朗运动来看 Dirichlet 边界值问题，本人在 1981 年秋在华讲书时常引为佳例．至于马氏链，若其时空均属离散，基础更为简易．入门教科书中均有详论（如 Feller 第一卷，有中译本）．决非如侯君文中所言："十分复杂的定理（如乘积空间的 Kolmogorov 扩张定理，随机过程存在定理）"．这些普通的基础，乃是学习的必经阶段，好像牛顿以后几代数学家学习微积分原理一样．如果中国有志好学的青年，听信了这种放空炮开倒车的言论，误以为基础理论高深莫测，不去用功学习，那就恐怕会停顿在肤浅无聊的阶段，决非现代化发奋图强的正途．

实际上，侯君通讯中所说的工作，国内外均已见到全文（中文见长沙铁道学院学报 1981 年第一期），经过编辑和审查人的评价，认为不是新的解析证明，而是把原来简明的概率方法，"翻译"成十分复杂的代数矩阵算式而已．例如：独立过程变为乘积空间［即文中的二维状态 (i,j)］是熟知的；用 u_n 来表达 f_n 亦是熟知的（请参考我书《马氏链》§1.8）．这种方法二十年前有些人做过较深的工作，最好的结果见于我的旧同事 Jurkat 文中（见我书所引）．再举一例，侯君在19期通讯所公布的"难题"，即用一个公式来表达他的 f_n，用概率的目光来看一点也不难，因为 f_n 就是两个独立链首度同时在 n 步更新（即回返一固定状态）的概率而已．明白了这个意思，那个冗长的公式可以挥笔写出．我把这点告

1982 年 4 月 10 日收到．

诉了廖明(本系中国研究生)，他虽未曾考虑过这个问题，也能迅速写出详情。兹将他的证明附于本文之后以供参考(原写英文)。实际上这个公式是无用的，因为有了概率的意义，不需要繁冗的公式。

总而言之，此项结果在国际上有水准的刊物上是不能发表的，在中国的主要学术期刊上也不应登载。此意我于1981年9月收到侯文后曾直接函告，后来侯君到苏州来访时又作友好切实的讨论。在未经客观审定之前先作空洞的宣传，这种错误正中1981年10月份中国科学院邹、张、郭、洪四教授提倡精神文明的公开宣言中所谴责的一条。中国现在大家都提倡"实事求是，公开批评"，本文作为响应这个好风气之一举，亦可作为本刊提倡哥本哈根精神的一个实例。读者如有意见，可来函本刊讨论。

下面是廖明所写的证明。

Let $\{p_n\}$ and $\{p'_n\}$ be two renewal sequences with the associated sequences $\{g_n\}$ anb $\{g'_n\}$ respectively, i.e. $p_0=1, g_n\geqslant 0, \sum_1^\infty g_n\leqslant 1$ and $\forall n\geqslant 1,\ p_n=\sum_1^n g_v p_{n-v}$; and with the similar relations for $\{p'_n\}$, $\{g'_n\}$.

Theorem: $\{q_n=p_np'_n\}$ is also a renewal sequence with the associated sequence $\{f_n\}$ given by $f_n=\sum g_{n1}g_{n2}\cdots g_{nl}g'_{m1}\cdots g'_{mk}$, where the summation $\sum$ is taken over all pairs of sequences $(n_1,\cdots n_l)$ and $(m_1,\cdots,m_k)$ which satisfy: $\sum_1^l n_i=\sum_1^k m_j=n$ and $\forall s<l, t<k, \sum_1^s n_i\neq\sum_1^t m_j$. Observe: n_i, m_j are integers$\geqslant 1$, so l, $k\geqslant n$.

Proof: By (I.8) of Chung's "Markov Chains", we can construct two independent Markov chains x_n and x'_n such that $x_0=0$, $p_n=P(x_n=0)$, $g_n=P(x_k\neq 0,\ 1\leqslant k\leqslant n-1;\ x_n=0)$ and with the same relations for p'_n, g'_n and x'_n. Now $z_n=(x_n,x'_n)$ is a Markov chain with the state space, the product of the stute spaces of x_n and x'_n, Since x_n and x'_n are independent, so $P(z_n=(0,0))=P(x_n=0)P(x'_n=0)=p_np'_n=q_n$. Let $f_n=P(z_k\neq(0,0),\ 1\leqslant k\leqslant n-1;\ z_n=(0,0))$. By elementary property of Markov chains, $\forall$n, $q_n=\sum_{v=1}^n f_v q_{n-v}$. So $\{q_n\}$ is a renewal sequence. Let, $T_0=0$, $T_1=\min\{k>0,\ x_k=0\},\cdots,\ T_n=\min\{k>T_{n-1},\ x_k=0\}$. $S_n=T_n-T_{n-1}$ for $n\geqslant 1$. Similarly define T'_n, S'_n for x'_n. Both $\{S_n\}$ and $\{S'_n\}$ are independent, so $\{S_n,S'_n\}$ are indpndent. Now

$z_n=(0,0)\iff x_n=0\ \&\ x'_n=0\iff$ For some l, k $T_l=T'_k=n\iff$ For some l and k, $\sum_1^l S_i=\sum_1^k S'_i$.

For $\bar n=(n_1\cdots n_l)$, $\bar m=(m_1\cdots m_k)$, let $A_{\bar n\bar m}=[S_i=n_i, S'_j=m_j,\ 1\leqslant i\leqslant l,\ 1\leqslant j\leqslant k]$, then $P(A_{\bar n\bar m})=g_{n_1}g_{n_2}\cdots g_{n_l}g'_{m_2}\cdots g'_{m_k}$.

Let $\pi=\{(\bar n\bar m):\ \sum_1^l n_i=n=\sum_1^k m_j, \sum_1^s n_i\neq\sum_1^t m_t\ \forall 1\leqslant s\leqslant l-1,\ 1\leqslant t\leqslant k-1\}$, then $f_n=P(z_k=(0,0),\ 1\leqslant k\leqslant n-1,\ z_n=(0,0))=P\left[\bigcup_{\bar n\bar m\in\pi}A_{\bar n\bar m}\right]=\sum_{(\bar n\bar m)\in\pi}P(A_{\bar n\bar m})$. This completes the proof.