第3卷 第1期
1983年1月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.3 No.1
Jan. 1983

映射的横截性定理

周 青

（北京大学）

Hirsch 猜测[2]：M、N、A是微分流形，$g\in C^\infty(A,N)$，则集合 $T=\{f\in C^\infty(M,N)\,|\,f\pitchfork g\}$ 是 $C^\infty(M,N)$ 中的稠密集。如果 g 是本质映射，那么 T 还是开集。

本文中，我们证明了 Jet 丛中的映射的横截性定理：

定理 1 设 M、N、A 是微分流形，$g\in C^\infty(A,J^r(M,N))$，则集合 $T=\{f\in C^\infty(M,N)\,|\,j^rf\pitchfork g\}$ 是 $C^\infty(M,N)$ 中可数个开稠密集的交集，如果 g 是本质映射，那么 T 还是开集。

定理 1 包含 Thom 的横截性定理作为它的特殊情形。利用定理 1，可以方便地得到 Hirsch 的猜测。

一、映射的横截性

在本文中，我们所说的流形都假定是微分流形，而且所有的映射和函数都是指光滑的。

设 M、N 是两个流形，从 M 到 N 的全体 r 阶 Jet 丛记作 $J^r(M,N)$，源映射和靶映射分别记作：

$$\sigma: J^r(M,N)\to M,\quad \sigma j^rf(x)=x;$$
$$\tau: J^r(M,N)\to N,\quad \tau j^rf(x)=f(x).$$

从 M 到 N 的全体映射的集合记作 $C^\infty(M,N)$。在 Whitney C^∞ 拓扑下，$C^\infty(M,N)$ 成一个 Baire 空间。

设 K 是 N 的子流形，$x\in M$，$f\in C^\infty(M,N)$，如果 i) $f(x)\bar{\in}K$；或 ii) $f(x)\in K$，而且 $T_{f(x)}N=T_{f(x)}K+(df)_xT_xM$，称映射 f 在 x 点横截于流形 K，记作 $f\pitchfork K_x$。如果对所有 $x\in M$，有 $f\pitchfork_x K$，则称映射 f 横截于流形 K，记作 $f\pitchfork K$。

设 A 是流形，A' 是 A 的一个子集，$f\in C^\infty(M,N)$，$g\in C^\infty(A,N)$，如果对任意的 $f(x)=g(y)=z$，$x\in M, y\in A', z\in N$，有 $T_zN=(dg)_yT_yA+(df)_xT_xM$。称映射 f 在 A' 上横截于映射 g，记作 $f\pitchfork_{A'}g$。如果 $A'=A$，则称映射 f 横截于映射 g，记作 $f\pitchfork g$。

引理 1 设 M、N、A 是流形，$f\in C^\infty(M,N)$，$g\in C^\infty(A,N)$；$f\pitchfork g$ 的充要条件是 $f\times g$: $M\times A\to N\times N$ 横截于对角线流形 ΔN，其中 $\Delta N=\{(z_1,z_2)\in N\times N\,|\,z_1=z_2\}$。

引理 1 表明了两种横截性的关系，证明是容易的。设 L 是一个有限维的线性空间，L_1，L_2 是 L 的线性子空间，$L_1+L_2=L$ 的充要条件是 $L_1\times 0+0\times L_2+\Delta L=L\times L$，其中 $\Delta L=\{(v_1,v_2)\in L\times L\,|\,v_1=v_2\}$。这样，立可得引理 1。

为了给出定理 1 的证明，我们还需要两个引理。

引理 2 设 M、N、A 是流形，A' 是 A 的子集，$g\in C^\infty(A,N)$，g 在 A' 上的限制 $g|_{A'}$ 是本质映射，则 $T=\{f\in C^\infty(M,N)\,|\,f\pitchfork_{A'}g\}$ 是开集。

*1981年12月2日收到。

证明 我们构造$J^1(M,N)$的一个子集U、$\alpha\in J^1(M,N)$，设(x,f)是α的一个代表，$\alpha=j^1f(x)$，如果对任意的$y\in A'$，有$f\times g \pitchfork_{(x,y)}\Delta N$，那么$\alpha\in U$。由引理1，$T=\{f\in C^\infty(M,N)|j^1f(M)\subset U\}$。

令$V=J^1(M,N)-U$，设α_n是V中的一个收敛序列，设(x_n,f_n)是α_n的代表，$\alpha_n=j^1f_n(x_n)$，$\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$，$(x,f)$是$\alpha$的代表，$\alpha=j^1f(x)$，那么$x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_n)$，在$x$和$f(x)$点取局部坐标系$X$和$Z$，不妨假定$X=R^{m_1}$，$Z=R^n$，$x=0$，$f(x)=0$分别是原点，而略去坐标映射，$Df_n$和$Df$分别表示$f_n$和$f$在这组局部坐标系下的Jacobi阵，有$Df(x)=\lim\limits_{n\to\infty}Df_n(x_n)$。由于$\alpha_n\in V$，故存在$y_n\in A'$，使得$f_n(x_n)=g(y_n)$，而且$f_n\times g \not\pitchfork_{(x_n,y_n)}\Delta N$。在$f(x)$点取一个紧邻域$W$，由于$g|_{A'}$是本质映射，故紧致集的完全原像是紧致集，$g|_{A'}^{-1}(W)$是紧致集，不妨假定$y_n\in g|_{A'}^{-1}(W)$，那么$y_n$有一收敛子列，再不妨可假定$y_n$本身就收敛，$y=\lim\limits_{n\to\infty}y_n\in A'$，由连续性，有$f(x)=g(y)=\lim\limits_{n\to\infty}g(y_n)$。

我们在点y附近选择局部坐标系Y，$Y=R^{m_2}$，$y=0$是原点，同样地也略去坐标映射。设φ：$R^n\times R^n\to R^n\times R^n/\Delta R^n$是商同态。设$\beta\in J^1(M,N)$，$\beta=j^1f_0(x_0)$，$f_0(x_0)\in g(A')$，$\beta\in U$的充要条件是，对任意使得$f_0(x_0)=g(y_0)$，$y_0\in A'$，有$f_0\times g\pitchfork_{(x_0,y_0)}\Delta N$，即$\varphi(Df_0(x_0)\times Dg(y_0))\in F$，其中

$$F=\{\psi\in \mathrm{Hom}(R^{m_1}\times R^{m_2},\ R^n\times R^n/\Delta R^n)|\mathrm{rank}\psi=n\}$$

F是$\mathrm{Hom}(R^{m_1}\times R^{m_2},R^n\times R^n/\Delta R^n)$中的开集，考虑映射：

$$\eta: R^{m_1}\times R^{m_2}\times R^n\times \mathrm{Hom}(R^{m_1},R^n)\to \mathrm{Hom}(R^{m_1}\times R^{m_2},R^n\times R^n/\Delta R^n)$$

$\eta(x,y,z,B)=\varphi(B\times Dg(y))$。$\eta^{-1}(F)$是开集，假定$\alpha\in U$，因为$f(x)=g(y)$，则$(x,y,f(x),Df(x))\in\eta^{-1}(F)$，而$\alpha_n\in V$，$f_n(x_n)=g(y_n)$，$(x_n,y_n,f_n(x_n),Df_n(x_n))\bar{\in}\eta^{-1}(F)$。这与$(x_n,y_n,f_n(x_n),Df_n(x_n))$收敛于$(x,y,f(x),Df(x))$矛盾。故$\alpha\in V$，即$V$是闭集，这样就证明了$U$是$J^1(M,N)$中的开集，因而$T$是$C^\infty(M,N)$中的Whitney C^1拓扑中的开集，当然T是Whitney C^∞拓扑中的开集。

我们不加证明的引入引理3，关于它的证明见Golubitsky和Guillemin的[1]。

引理3 设M、N、B是流形，K是N的子流形，$\varphi: B\to C^\infty(M,N)$是一个对应，由$\Phi(x,b)=\varphi(b)(x)$定义了

$$\Phi: M\times B\to N,$$

如果Φ是映射，而且$\Phi\pitchfork K$，则集合$T=\{b\in B|\varphi(b)\pitchfork K\}$在$B$中稠密。

二、定理1的证明

这节中，我们给出定理1的证明。

显然存在A的一族可数开复盖A_k，M、N、和$J^r(M,N)$的坐标邻域U_k,V_k和W_k，使得 i)$\bar{A}_k,\bar{U}_k,\bar{V}_k$和$\bar{W}_k$是紧致集，　ii)$g(\bar{A}_k)\subset W_k$，　iii)$\sigma(\bar{W}_k)\subset U_k,\tau(\bar{W}_k)\subset V_k$。

令$T_{A_k}=\{f\in C^\infty(M,N)|j^rf\pitchfork_{\bar{A}_k}g\}$，我们有$T=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}T_{A_k}$，只要证明$T_{A_k}$是开稠密集即可。

定义$T_k=\{h\in C^\infty(M,J^r(M,N))|h\pitchfork_{\bar{A}_k}g\}$，由于$\bar{A}_k$是紧致集，故$g|_{\bar{A}_k}$是本质映射，由引理2，$T_k$是$C^\infty(M,J^r(M,N))$中的开集。又因为Whitney C^∞拓扑的定义使得j^r: $C^\infty(M,N)\to C^\infty(M,J^r(M,N))$是连续的，故$T_{A_k}=(j^r)^{-1}(T_k)$是$C^\infty(M,N)$中的开集。

由于 $g(\bar{A}_k)\subset W_k$，故由引理1，$j^rf\times g\pitchfork\Delta J^r(M,N)\cap W_k\times W_k$ 蕴含了 $j^rf\pitchfork_{\bar{A}_k}g$，即

$$T_{W_k}=\{f\in C^\infty(M,N)\,|\,j^rf\times g\pitchfork\Delta J^r(M,N)\cap W_k\times W_k\}\subset T_{A_k}$$

如果 T_{W_k} 在 $C^\infty(M,N)$ 中稠密，那么 T_{A_k} 也是稠密集。

设 $m=\dim M$，$n=\dim N$，$\psi:\bar{U}_k\to R^m$，$\eta:\bar{V}_k\to R^n$ 是坐标映射，由于 $\sigma(\bar{W}_k)\subset U_k$，$\tau(\bar{W}_k)\subset V_k$，而且 $\bar{W}_k$ 是紧致集，故存在函数

$$\rho: R^m\to[0,1],\quad \rho': R^n\to[0,1]$$

使得 ρ 在 $\psi\sigma(\bar{W}_k)$ 的一个邻域上等于1，在 $R^m-\psi(U_k)$ 上等于0．ρ' 在 $\eta\tau(\bar{W}_k)$ 的一个邻域上等于1，在 $R^n-\eta(V_k)$ 上等于0．

令
$$\varepsilon=\frac{1}{2}\min\{d(\operatorname{supp}\rho',R^n-\eta(V_k)),d(\eta\tau(\bar{W}_k)(\rho')^{-1}[0,1))\},$$

$$B_r=\{\text{所有次数不超过 } r \text{ 的 } R^m \text{ 到 } R^n \text{ 的多项式映射}\}$$

$$B=\{b\in B_r\,|\,|b\psi(x)|<\varepsilon,\ \psi(x)\in\operatorname{supp}\rho\},$$

B 当然是一个流形。

任给 $f\in C^\infty(M,N)$，$b\in B$，定义 $f_b: M\to N$，

$$f_b(x)=\begin{cases}f(x) & (x,f(x))\bar{\in}U_k\times V_k\\ \eta^{-1}[\rho\psi(x)\cdot\rho'\eta f(x)\cdot b\psi(x)+\eta f(x)] & (x,f(x))\in U_k\times V_k\end{cases}$$

这样，由 $\varphi(b)=j^rf_b\times g$ 定义了

$$\varphi: B\to C^\infty(M\times A,J^r(M,N)\times J^r(M,N)),$$

自然定义了映射：
$$\Phi: M\times A\times B\to J^r(M,N)\times J^r(M,N)$$
$\Phi(x,y,b)=(j^rf_b(x),g(y))$．

考虑由 $(x,b)\longmapsto j^rf_b(x)$ 定义的映射

$$\Phi^*: M\times B\longrightarrow J^r(M,N),$$

当 $\Phi^*(x,b)\in W_k$ 时，我们有 $x\in\sigma(\bar{W}_k)$，$f_b(x)\in\tau(\bar{W}_k)$ 那么 $d(\eta f(x),\eta f_b(x))<\varepsilon$，由 ε 的定义，我们知道 $\eta f\in\operatorname{Int}(\rho')^{-1}(1)$．这样存在 (x,b) 的一个邻域 $U_x\times U_b$，使得当 $(x',b')\in U_x\times U_b$ 时，有 $\eta f_{b'}(x')=b'\psi(x')+\eta f(x')$．设 $\alpha\in J^r(M,N)$ 在 $\Phi^*(x,b)$ 附近，设 $x'=\sigma(\alpha)$，b' 是使得 $\alpha=j^r(\eta[b'\cdot\psi+\eta f])(x')$ 的唯一的多项式映射，那么 $\alpha\longmapsto(x',b')$ 是映射，而且是 Φ^* 的逆，这说明 Φ^* 在局部是微分同胚。

在 $\Phi(x,y,b)\in W_k\times W_k$ 时，$(d\Phi)_{(x,y,b)}T_{(x,y,b)}M\times A\times B$ 包含子流形 $J^r(M,N)\times\{g(y)\}$ 在 $\Phi(x,y,b)$ 点的切空间 $T_{\Phi(x,y,b)}J^r(M,N)\times\{g(y)\}$．如果 $\Phi(x,y,b)\in\Delta J^r(M,N)\cap W_k\times W_k$，由于 $T_{\Phi(x,y,b)}J^r(M,N)\times\{g(y)\}+T_{\Phi(x,y,b)}\Delta J^r(M,N)\cap W_k\times W_k=T_{\Phi(x,y,b)}J^r(M,N)\times J^r(M,N)$，故 $\Phi\pitchfork\Delta J^r(M,N)\cap W_k\times W_k$．由引理3，$\{b\in B\,|\,j^rf_b\times g\pitchfork\Delta J^r(M,N)\cap W_k\times W_k\}$ 在 B 中稠密。

显然 $0\in B$，且 $f_0=f$，故存在 $b_n\in\{b\in B\,|\,j^rf_b\times g\pitchfork\Delta J^r(M,N)\cap W_k\times W_k\}$，即 $f_{b_n}\in T_{W_k}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}f_{b_n}=f$．故 T_{W_k} 在 $C^\infty(M,N)$ 中是稠密的。

定理1的第二个断言由引理2立可得．令 $T'=\{h\in C^\infty(M,J^r(M,N))\,|\,h\pitchfork g\}$，由条件 g 是本质映射，知 T' 在 $C^\infty(M,J^r(M,N))$ 中是开集，而 $T=(j^r)^{-1}(T')$，故得结论，这样就完全证明了定理1．

推论 1　设 M、N、A_n 是流形，$n\in\mathbf{N}$，$g_n\in C^\infty(A_n,\ J^{r_n}(M,\ N))$，则集合 $T=\{f\in C^\infty(M,N)\,|\,\text{对任意的 } n,\ j^{r_n}f\pitchfork g_n\}$ 是 $C^\infty(M,N)$ 中可数个开稠密集的交集。

三、Thom 的横截性定理和 Hirsch 猜测

利用定理 1，我们证明 Thom 的横截性定理和 Hirsch 猜测.

推论 2 （Thom 的横截性定理）设 M、N是流形，W是 $J^r(M,N)$ 的子流形，则集合 $T=\{f\in C^\infty(M,N)\mid j^r f\pitchfork W\}$ 是 $C^\infty(M,N)$ 中可数个开稠密集的交集. 如果W是闭的，那么 T 还是开集.

证明 令 $g: W\to J^r(M,N)$是包含映射，显然 $j^r f\pitchfork W$的充要条件是 $j^r f\pitchfork g$，当W是闭的时候，我们证明 g 还是本质映射. 设U是 $J^r(M,N)$中的紧致集，$g^{-1}(U)=U\cap W\subset U$，$U\cap W$是闭的，$U$是紧致的，故 $g^{-1}(U)$是紧致集，这就证明了W是闭的时候，g 是本质映射. 由定理 1，立得结论.

定理 2 （Hirsch 猜测）设M、N、A是流形，$g\in C^\infty(A,N)$，则集合 $T=\{f\in C^\infty(M,N)\mid f\pitchfork g\}$是 $C^\infty(M,N)$ 中的稠密集. 如果 g 是本质映射，那么T还是开集.

证明 由于$J^0(M,N)=M\times N$，而且$j^0 f(x)=(x,f(x))$. $id_M\times g: M\times A\to J^0(M,N)$是映射.

i) 若 $j^0 f(x)\bar{\in} id_M\times g(M\times A)$，则有 $f(x)\bar{\in} g(A)$.

ii) 若 $j^0 f(x)\in id_M\times g(M\times A)$，$j^0 f(x)=id_M\times g(x,y)$

则有 $f(x)=g(y)$，如果这时还有

$T_{j^0 f(x)}J^0(M,N)=(dj^0 f)_x T_x M+[(d(id_M))_x\times(dg)_y]T_{(x,y)}M\times A$,

用$(d\tau)_{j^0 f(x)}$ 在两边作用，有

$$T_{f(x)}N=(df)_x T_x M+(dg)_y T_y A.$$

故 $j^0 f\pitchfork id_M\times g$ 蕴含了 $f\pitchfork g$. 这样

$$T^*=\{f\in C^\infty(M,N)\mid j^0 f\pitchfork id_M\times g\}\subset T.$$

由定理1，T^* 在$C^\infty(M,N)$中稠密，故T也在$C^\infty(M,N)$中稠密. 第二个断言就是引理2.

由定理 2 立可得初等横截性定理.

推论 3 （初等横截性定理） 设M，N是流形，W是N的子流形，则集合 $T=\{f\in C^\infty(M,N)\mid f\pitchfork W\}$是 $C^\infty(M,N)$ 中的稠密集. 如果W是闭的，那么T还是开集.

参　考　文　献

1 Golubitsky, M. and Guillemin, V., Stable mappings and their singularites, Springer-Verlag 1973 P. 53.

2 Hirsch, M. W., Differential Topology. Springer-Verlag, New York 1976 P.84.

Transversality Theorem of Map

By Zhou Qing

Hirsch conjectured: M、N、A are differential manifolds, $g\in C^\infty(A,N)$, then the set $T=\{f\in C^\infty(M,N)\mid f\pitchfork g\}$ is dense in $C^\infty(M,N)$ and open if g is proper.

In this paper, we prove the transversality theorem of map in the Jet bundle.

Theorem 1 Let M, N. A be differential manifolds, $g\in C^\infty(A, J^r(M,N))$, then the set $T\{f\in C^\infty(M,N)\mid j^r f\pitchfork g\}$ is residual in $C^\infty(M,N)$ and open if g is proper.

Theorem 1 contains Thom's transversality theorem as a special case. We can obtain Hirsch's conjecture by using theorem 1.