第3卷 第1期
1983年 1月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.3 No.1
Jan. 1983

广义紧向量场*

秦成林 陈文嫄

（兰州大学数学力学系）

本文是［1］的继续，主要研究固定的有界连续映象经紧连续映象摄动以后得到的广义紧向量场．我们沿用［1］的符号和术语，特别，采用如下**基本假设**：

设X、Z为线性赋范空间，Ω为X中有界开集。设$I:\bar{\Omega}\to Z$为确定的连续映象，且

$$\sup_{x\in\bar{\Omega}}\|I(x)\|\leqslant M<\infty$$

设$F:\bar{\Omega}\to Z$紧连续，表$f(x)=I(x)-F(x)$．

首先建立广义紧向量场$f(x)$的平凡性和本质性判别法，特别是其中某些平凡性判别法，即使对Leray—Schauder映象而言，也是新结果．

定理 1 如下几个命题等价：

（Ⅰ）若存在紧连续映象$B:\bar{\Omega}\to Z$满足$\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|B(x)\|=l>0$，使得$x\in\partial\Omega$，$\lambda\geqslant0$时$f(x)\neq\lambda B(x)$，则$f\in C_I^0(\partial\Omega,Z)$平凡：

（Ⅱ）若$h=\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|F(x)\|>0$且从$x\in\partial\Omega,I(x)=\lambda F(x)$推得$\lambda<1$,则$f\in C_I^0(\partial\Omega,Z)$平凡；

（Ⅲ）若$h=\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|F(x)\|>0$，设$0\leqslant a$，$b\leqslant1\leqslant k$而且$a$，$b$，$k$不同时为1，使得

$$a\|F(x)\|^k+b\|f(x)\|^k\geqslant\|I(x)\|^k,$$

则当f在$\partial\Omega$不为0时，$f\in C_I^0(\partial\Omega,Z)$平凡；

（Ⅳ）若$h=\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|F(x)\|>0$，且$x\in\partial\Omega$时，$\|F(x)\|\geqslant\sigma\|I(x)\|$，$\sigma\geqslant1-\dfrac{\alpha}{M}$，其中$\alpha=\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|f(x)\|<M$，则当$f$在$\partial\Omega$不为0时，$f\in C_I^0(\partial\Omega,Z)$平凡；

（Ⅴ）若$h=\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|F(x)\|>0$且$x\in\partial\Omega$时$\|f(x)\|\geqslant\|I(x)\|$，则$f\in C_I^0(\partial\Omega,Z)$平凡．

证明 （Ⅰ）⇒（Ⅱ）．若命题（Ⅱ）的假设满足，则当$\lambda=1+\mu\geqslant1$时，$I(x)\neq\lambda F(x)$或$f(x)\neq\mu F(x)$,即对$B(x)=F(x)$,命题（Ⅰ）的假设满足,由（Ⅰ）知$f\in C_I^0(\partial\Omega,Z)$平凡．

（Ⅱ）⇒（Ⅲ）．若命题（Ⅲ）的假设满足，我们验证命题（Ⅱ）的假设也满足．若否,有$x\in\partial\Omega,\lambda\geqslant1$,使$I(x)=\lambda F(x)$．据（Ⅲ）的假设$f\in C_I^0(\partial\Omega,Z)$知$\lambda\neq1$．再据（Ⅲ）的假设及$\lambda$的定义

$$a\|F(x)\|^k+b\|f(x)\|^k\geqslant\|I(x)\|^k=\|\lambda F(x)\|^k=\lambda^k\|F(x)\|^k$$

$$a\|F(x)\|^k+b\|f(x)\|^k=a\|F(x)\|^k+b\|(\lambda-1)F(x)\|^k=(a+b(\lambda-1)^k)\|F(x)\|^k$$

由$\|F(x)\|\neq0$得出$a+b(\lambda-1)^k\geqslant\lambda^k$．但按$a$，$b$，$k$的规定，此不等式在$\lambda>1$时不能成立．

（Ⅲ）⇒（Ⅳ）．取（Ⅲ）中$a=1$，$b=0$，$k=1$得$\sigma=1$时之命题（Ⅳ），当然也推得$\sigma\geqslant1$时之命题（Ⅳ）．

下面考察$0<\sigma<1$情形，作$H(x,t)=\dfrac{t}{\sigma}F(x)$,则当$x\in\partial\Omega$，$0\leqslant t\leqslant1$时，$I(x)-H(x,$

* 1982年1月13日收到．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$t)\neq 0$。若否，有 $x\in\partial\Omega$ 及 $0\leqslant t\leqslant 1$ 使 $\left(1-\frac{t}{\sigma}\right)I(x)=-\frac{t}{\sigma}f(x)$，据设 $f(x)$ 在 $\partial\Omega$ 上不为 0 知 $t\neq\sigma$，而当 $\sigma<t\leqslant 1$ 时，

$$\left(\frac{t}{\sigma}-1\right)M>\left(\frac{t}{\sigma}-1\right)\|I(x)\|=\frac{t}{\sigma}\|f(x)\|>\frac{t}{\sigma}\alpha$$

或 $\sigma<t\left(1-\frac{\alpha}{M}\right)\leqslant 1-\frac{\alpha}{M}$，此与 σ 的定义矛盾。

据同伦不变性，$f(x)=I(x)-F(x)$ 与 $g(x)=I(x)-\frac{1}{\sigma}F(x)$ 或者同时平凡或者同时本质。但据假设对 $G(x)=\frac{1}{\sigma}F(x)$ 有性质：$x\in\partial\Omega$ 时，$\|G(x)\|\geqslant\|I(x)\|$。因此由 $\sigma=1$ 时之命题(Ⅳ)得 $g\in C_I^0(\partial\Omega,Z)$ 平凡。

(Ⅲ)⇒(Ⅴ)。取 $a=0$，$b=1$，$k=1$ 即可，注意此时 $f(x)$ 在 $\partial\Omega$ 上总不为 0。

(Ⅳ) 或 (Ⅴ)⇒(Ⅰ)。命题(Ⅰ)的假设说：对任何 $\lambda>0$，$f(x)=I(x)-F(x)$ 与 $g(x)=I(x)-(F(x)+\lambda B(x))$ 在 $\partial\Omega$ 上同伦。为证命题(Ⅰ)，只须证 λ 充分大时 $g\in C_I^0(\partial\Omega,Z)$ 平凡。对 $G(x)=F(x)+\lambda B(x)$ 与 $g(x)=I(x)-G(x)$，当 $x\in\partial\Omega$ 时，

$$\|G(x)\|\geqslant\lambda\|B(x)\|-\|F(x)\|\geqslant\lambda l-\sup_{x\in\partial\Omega}\|F(x)\|$$

$$\|g(x)\|\geqslant\lambda\|B(x)\|-\|f(x)\|\geqslant l-\sup_{x\in\partial\Omega}\|f(x)\|$$

所以只要 λ 充分大，总可满足命题(Ⅳ)和(Ⅴ)的假设。定理 1 证完。

定理 2 设 Z 为无穷维空间，或者 $F(\partial\Omega)$ 与 $B(\partial\Omega)$ 均属于 Z 中某锥 K，则定理 1 中命题均成立。

证明 据定理 1，只须证命题(Ⅰ)成立。

第一步证 $\overline{B(\partial\Omega)}$ 不含某射线 $\{tp|t\geqslant 0\}$，其中 $p\in Z$，$\|p\|=1$。

在 $B(\partial\Omega)\subset K$ 的情形，此结论显然。下面考虑 Z 为无穷维情形，如结论不成立，对任何 $z\in Z,\|z\|=1$ 都有 $t(z)\geqslant 0$ 使 $t(z)z\in\overline{B(\partial\Omega)}$，据假设 $\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|B(x)\|\geqslant l>0$，故必 $t(z)\geqslant l$。

由 $B:\partial\Omega\to Z$ 紧，故 $A=\overline{\{t(z)z|\,\|z\|=1\}}$ 是 Z 中紧集，于是 $\overline{\text{co}}\,(A\cup\{0\})$ 也紧，但由 $t(z)\geqslant l$ 可知 $\overline{\text{co}}(A\cup\{0\})$ 包含半径为 l 的球，此与 Z 为无穷维的假设矛盾。

第二步证：存在 $\lambda_0>0$ 使 $f_{\lambda_0}(x)=I(x)-F(x)-\lambda_0B(x)$ 的象集 $f_{\lambda_0}(\partial\Omega)$ 不含射线 $\{tp|t\leqslant 0\}$。

若否，存在 $\lambda_n\to\infty$，$t_n\geqslant 0$ 及 $x_n\in\partial\Omega$，使得

$$I(x_n)-F(x_n)-\lambda_nB(x_n)=-t_np.$$

由 $I(x)$，$F(x)$ 均有界，故 $\frac{1}{\lambda_n}I(x_n)\to 0$，$\frac{1}{\lambda_n}F(x_n)\to 0$，再由 $B(x)$ 有界知 t_n/λ_n 有界，因而经选子列以后不妨设 $t_n/\lambda_n\to t_0\geqslant 0$。从

$$\frac{1}{\lambda_n}I(x_n)-\frac{1}{\lambda_n}F(x_n)-B(x_n)=-\frac{t_n}{\lambda_n}P$$

取极限得知 $B(x_n)\to t_0p$，此与第一步结论矛盾。

第三步证 $f_{\lambda_0}\in C_I^0(\partial\Omega,Z)$ 平凡。任取自然数 n，作 $H(x,t)=F(x)+\lambda_0B(x)+tnp$，$x\in\partial\Omega$，$0\leqslant t\leqslant 1$。

据命题(Ⅰ)假设 $I(x)\neq H(x,0)$。据第二步证明当 $0<t\leqslant 1$ 时，$I(x)\neq H(x,t)$。由同伦不变性定理 $f_{\lambda_0}(x)=I(x)-F(x)-\lambda_0B(x)$，$g(x)=f_{\lambda_0}(x)-np$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

或者同时平凡或者同时本质。但由于Ω及I、F、B均有界，只要n充分大，np不属于$f_{\lambda_0}(\bar{\Omega})$即$0\bar{\in}g(\bar{\Omega})$。这表明$g\in C_I^0(\partial\Omega,Z)$平凡。从而也得$f_{\lambda_0}\in C_I^0(\partial\Omega,Z)$平凡。

第四步证$f(x)=I(x)-F(x)$平凡。

作$H(x,t)=F(x)+t\lambda_0 B(x)$，$x\in\partial\Omega$，$0\leqslant t\leqslant 1$。据命题(Ⅰ)假设$I(x)\neq H(x,t)$，即$f$与$f_{\lambda_0}$同伦。由第三步结论$f_{\lambda_0}\in C_I^0(\partial\Omega,Z)$平凡，因而$f\in C_I^0(\partial\Omega,Z)$也平凡。定理2证完。

附注　对Z为无穷维情形，[1]已证命题(Ⅳ)，而锥映象情形实际上要更简单些。命题(Ⅰ)在Leray—Schauder理论中最早出现的形式是$X=Z$，$I(x)=x$，$B(x)=$固定元e。后来[3]、[4]推广到K—集压缩锥映象情形。

定理 3　设$I\in C_I^0(\partial\Omega,Z)$本质，又如下条件之一满足，则当$f$在$\partial\Omega$不为0时，$f\in C_I^0(\partial\Omega,Z)$本质。

(1) $x\in\partial\Omega$时，$\|F(x)\|\leqslant\tau\|I(x)\|$，$\tau\leqslant 1+\dfrac{\alpha}{M}$，其中$\alpha=\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|f(x)\|<M$；

(2) $x\in\partial\Omega$时，从$I(x)=\lambda F(x)$推得λ不属于开区间$(0,1)$；

(3) 存在$k>1$及Z上泛函$P(z)$，满足$p^{-1}(0)=0$，$p(\lambda z)=|\lambda|P(z)$使得

$$[p(F(x))]^k\leqslant[p(f(x))]^k+[p(I(x))]^k\qquad\text{(见[5])}.$$

定理 4　设Z无穷维，$I\in C_I^0(\partial\Omega,Z)$本质，且存在$m>0$，使$x\in\partial\Omega$时，$\|F(x)\|=\|I(x)\|\geqslant m$，则$f$在$\partial\Omega$上必有零点。

证明　如不然，$f\in C_I^0(\partial\Omega,Z)$。由定理1的命题(Ⅳ)，取$\sigma=1$得$f\in C_I^0(\partial\Omega,Z)$平凡。又由定理3的条件(1)，取$\tau=1$，得$f\in C_I^0(\partial\Omega,Z)$本质。此矛盾。定理4证完。

以下我们希望将Leray—Schauder理论中隔离解的定理推广到广义紧向量场。由于没有类似于度数的区域可加性，故Leray—Schauder理论中的方法不适用了，须要使用新的技巧。

在本段中恒假定Ω_1为Ω的子开集$\bar{\Omega}_1\subset\Omega$。

压缩型问题（即f在$\partial\Omega$本质，在$\partial\Omega_1$平凡）是简单的，可直接由定义得到

定理 5　若$f\in C_I^0(\partial\Omega,Z)$本质，$f\in C_I^0(\partial\Omega_1,Z)$平凡，则$f$在$\Omega/\bar{\Omega}_1$内必有零点。

拉伸型问题（即f在$\partial\Omega$平凡，在$\partial\Omega_1$本质）比较困难，这时须对$I(x)$作适当限制。

定义　称$I(x)$在$\bar{\Omega}\backslash\Omega_1$强本质，即$I\in C_I^0(\partial\Omega_1,Z)$本质，且任何开集$\Omega^*$满足$\Omega_1\subset\Omega^*\subset\Omega$，则从$I$在$\partial\Omega^*$上不取0推得$I\in C_I^0(\partial\Omega^*,Z)$本质。

称$I(x)$在$\bar{\Omega}\backslash\Omega_1$满足条件$(P_0)$，即若有$x_n\in\bar{\Omega}\backslash\Omega_1$，使$I(x_n)\to 0$则$x_n$有收敛子列。

定理 6　设Z无穷维。I在$\bar{\Omega}\backslash\Omega_1$中强本质且满足条件$(P_0)$。此外，$\inf\limits_{x\in\partial\Omega_1}\|I(x)\|=m>0$且

$$x\in\partial\Omega\text{时，}\quad\|F(x)\|\geqslant\|I(x)\|$$
$$x\in\partial\Omega_1\text{时，}\quad\|F(x)\|\leqslant\|I(x)\|$$

则f在$\bar{\Omega}\backslash\Omega_1$内有零点。

如果f在$\partial\Omega_1$上不为0，则f在Ω_1还有一零点。

证明　用反证法，假设f在$\bar{\Omega}\backslash\Omega_1$没有零点。表$G=\{x\in\Omega\,|\,\|F(x)\|<\|I(x)\|\}$。

若G空，则任何$x\in\partial\Omega_1$，一方面由$x\notin G$知$\|F(x)\|\geqslant\|I(x)\|$，另一方面由定理假设$\|F(x)\|\leqslant\|I(x)\|$，从而得$\|F(x)\|=\|I(x)\|$。由定理4，$f$在$\partial\Omega_1$上有零点，此与反证法假设矛盾。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

若G不空，由范数连续性知G是有界开集，且当$x\in\partial G$时，$\|F(x)\|=\|I(x)\|$。考察$\Omega^*=G\cup\Omega_1$，则Ω^*仍为有界开集且$\Omega_1\subset\Omega^*\subset\Omega$。

下面证断言：$x\in\partial\Omega^*$时，$\|F(x)\|=\|I(x)\|$。

如果$x\in\partial G$，当然$\|F(x)\|=\|I(x)\|$；如果$x\notin\partial G$，必然$x\in\partial\Omega_1$，因而由假设有$\|F(x)\|\leqslant\|I(x)\|$。此时有两种可能，或者$\|F(x)\|=\|I(x)\|$或者$\|F(x)\|<\|I(x)\|$，而后一种可能必然是$x\in G\subset\Omega^*$，因而$x\notin\partial\Omega^*$。总之，断言得证。

下面验证 $m^*=\inf\limits_{x\in\partial\Omega^*}\|I(x)\|>0$。

如不然，有$x_n\in\partial\Omega^*$，使$I(x_n)\to0$，根据性质(P_0)，存在x_n的子列$x_{n_k}\to x_0\in X$。但$\partial\Omega^*$闭，故$x_0\in\partial\Omega^*$，因而

$$\|F(x_0)\|=\|I(x_0)\|.$$

另一方面，由I连续应有$I(x_0)=0$，于是也得$F(x_0)=0$且$f(x_0)=I(x_0)-F(x_0)=0$。

这得到$x_0\in\partial\Omega^*$是f的零点，与反证法假设矛盾。

既然$m^*>0$，当然$I(x)$在$\partial\Omega^*$上不为0，由强本质性得到$I\in C_I^0(\partial\Omega^*,Z)$本质。

根据定理4（只将假设中m代成m^*），f在$\partial\Omega^*$上有零点。它又与反证法假设矛盾。总之，定理前一部分结论证完。

定理后一部分结论是简单的，因若f在$\partial\Omega_1$不为0，由定理4，$f\in C_I^0(\partial\Omega_1,Z)$本质，因而$f$在$\Omega_1$内存在第二个零点。定理6证完。

参 考 文 献

[1] 陈文嫄、秦成林，紧摄动连续映象，数学研究与评论，创刊号（1981年），39—46.

[2] Zeidler, E., Vorlesungen über nichtlinear Funktionalanalysis I. Fixpunktsätze (1977).

[3] Fitzpatrick P. M., Positive Eigenvalues for Nonlinear Multivalued Noncompact Operators with Applications to Differential Operators. *J. Diff. Equa*., 22 (1976), 428—441.

[4] Petryshyn W. V., On the Solvability of $x\in Tx+\lambda Fx$ in Quasinormal Cones with T and F k—set—Contractive. Nonlinear Analysis TMA 5: 5 (1981). 585—591.

[5] Granas A., Sur lamê thode de continuité de poincaré. *C. R. Acad. sci*.; Paris, 282 (1976), 983—985.

Generalized Compact Vector Field

By *Qin Chenglin* (秦成林) and *Chen Wenyuan* (陈文嫄)

Abstract

This paper is sequel of [1]. The main Results are:

(1) The equivalent propositions concerning the properties essential and nonessential of generalized compact vector fields (i. e. Compact perturbation of a continuous mapping);

(2) The theorems about the generalized Compression and expansion of a domain.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.