第3卷 第1期
1983年 1月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.3 No.1
Jan. 1983

球面上n条经线所构成的图的带宽*

麦 结 华

（广西大学数学系）

一、主 要 结 论

设G是个图，$V(G)$是G的全体顶点的集合，$|V(G)|=p$。称任一个1—1对应的函数f：$V(G)\to\{1,2,\cdots,p\}$为$V(G)$上的一个标号．记

$$B(f)=\max\{f(u)-f(v)\text{：}u\text{与}v\text{是G上相邻顶点}\},$$

称$B(f)$为标号f的带宽．记

$$B(G)=\min\{B(f)\text{：}f\text{是}V(G)\text{上的标号}\},$$

称$B(G)$为图G的带宽．若f是$V(G)$上的一个标号且$B(f)=B(G)$，则称f为$V(G)$上的最佳标号．如何计算一个给定的图的带宽？这是一个很有实际意义而引人注目的问题[1]．但一般的图的带宽的计算往往十分困难，只有几种较为简单的图的带宽已经求出．例如，已求出平面上的格子图$P_m\times P_n$的带宽为$\min\{m,n\}$[2]，柱面上的格子图$P_m\times C_n$的带宽为$\min\{2m,n\}$[3]，等等．

Dewdney在1976年所作的一篇综述报告[4]中提出了几个未解决的问题，其中之一是求环面上的格子图的带宽．此带宽后来被李乔、陶懋颀及沈韵秋等人求出，为$B(C_m\times C_n)=2\min\{m,n\}-\delta_{mn}$[5]．Dewdney提出的另一问题是求一种本文记之为G_{mn}的图的带宽．此种图如图1所示，是由球面上会聚于南、北二极的n条经线所构成，每条经线均被m-1个顶点分成m段，（$n\geqslant3$，$m\geqslant2$）．本文解决了这个问题，得到了如下的结果：

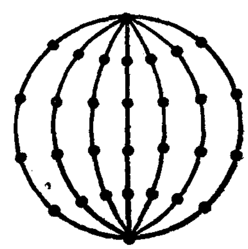

图1 G_{mn}

定理 设$\lambda=\left\lfloor\dfrac{n-2}{2m-1}\right\rfloor$，$\theta=n-2-\lambda(2m-1)$，则图$G_{mn}$的带宽

*1981年12月29日收到．

$$
B(G_{mn})=\begin{cases}\left\lceil\dfrac{n+2}{2}\right\rceil, & 若\ m=2;\\[2mm] \left\lceil\dfrac{3n+2}{4}\right\rceil, & 若\ m=3;\\[2mm] n-\lambda, & 若\ m\geqslant 4\ 且\ \lambda=0,\\ & 或\ m\geqslant 4\ 且\ \theta\ 为偶数,\\ & 或\ m\geqslant 4\ 且\ \theta\geqslant 2m-7;\\ n+1-\lambda, & 若\ m\geqslant 4,\ \lambda\geqslant 1\ 且\ \theta\ 是\\ & 小于\ 2m-7\ 的奇数。\end{cases}
$$

（对任一实数 r，本文以 $\lfloor r\rfloor$ 表示不大于 r 的最大整数，以 $\lceil r\rceil$ 表示小于 r 的最小整数）。

二、定理的证明

下面我们将对上述定理进行证明。为便于叙述，我们将建立几个引理。为便于用坐标表示 G_{mn} 的顶点，我们不妨把 G_{mn} 画成如图2所示的平面图。记 $V_{mn}=V(G_{mn})$，$B_{mn}=B(G_{mn})$，$p_{mn}=(m-1)n+2$。对任两个正整数 $k\leqslant l$，本文记 $J[k,l]=\{k,k+1,\cdots,l\}$，特别记 $J_k=J[1,k]$。对任一个有限集 S，以 $|S|$ 表示 S 的元素的个数。对某一个图 G 的某些顶点的集合 S，以 ∂S（或 $\partial_G S$）表示 S 在图 G 中的边界[6]。

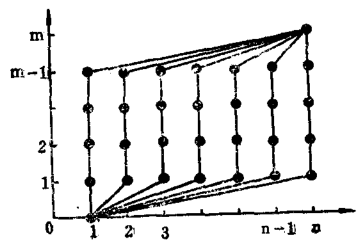

图 2　G_{mn} 的另一种画法

引理1　$B_{2n}=\left\lceil\dfrac{n+2}{2}\right\rceil$。

证　令 $a=\left\lceil\dfrac{n+2}{2}\right\rceil$，则 $n+2=2a$ 或 $2a-1$。作 V_{2n} 上的标号 f_0 为 $f_0(1,0)=a$，$f_0(n,2)=a+1$，$f_0(i,1)=i$（任 $i\in J_{a-1}$），$f_0(j,1)=j+2$（任 $j\in J[a,n]$）。易验 $B_{2n}\leqslant B(f_0)=f_0(n,2)-f_0(1,1)=a$。

另一方面，设 f 是 V_{2n} 上的一个最佳标号，令 $v_1=f^{-1}(1)$，$v_2=f^{-1}(n+2)$。若 v_1 与 v_2 在图 G_{2n} 中的距离 $d(v_1,v_2)=1$，则 $B(f)=n+2-1>a$。若 $d(v_1,v_2)>1$，则 $d(v_1,v_2)=2$，此时，在图 G_{2n} 中存在着另外两个顶点 v_3 及 v_4 使得 $v_1——v_3——v_2——v_4——v_1$ 依次相邻，因而有 $n+2=f(v_2)\leqslant\min\{f(v_3),\ f(v_4)\}+B(f)\leqslant(f(v_1)+B(f)-1)+B(f)=2B(f)$，最后亦可推出 $B_{2n}=B(f)\geqslant a$。

引理2　$B_{3n}=\left\lceil\dfrac{3n+2}{4}\right\rceil$。

证　令 $e=\left\lceil\dfrac{n-1}{2}\right\rceil$，$c=2n+2-e$，$a=\left\lceil\dfrac{c+1}{2}\right\rceil=\left\lceil\dfrac{2n+3-e}{2}\right\rceil$。取 $\mu\in J[2,5]$ 使得 $n\equiv\mu\pmod 4$。易验 $a-1=\dfrac{3n+\mu}{4}=\left\lceil\dfrac{3n+2}{4}\right\rceil$。作 V_{3n} 上的标号 f_0 为：① $f_0(i,1)=i$（对任 $i\in J_e$）；② $f_0(j,2)=e+j$（对任 $j\in J_{a-1-e}$）；③ $f_0(1,0)=a$；④ $f_0(k,2)=e+1+k$（对任 $k\in J[a-e,n-e]$；⑤ 对任 $(i,j)\in V_{3n}$ 均有

$$f_0(i,j)=2n+3-f_0(n+1-i,m-j)。$$

易验 $B(f_0)=f_0(1,0)-f_0(1,1)=a-1$，因此 $B_{3n}\leqslant a-1$.

下面还需证明$B_{3n}\geqslant a-1$. 为此考虑V_{3n}上的一个最佳标号f. 对$0\leqslant j\leqslant 3$，令$X_j=V_{3n}\cap\{(i,j):i\in J_n\}$. 不妨假定$f^{-1}(1)\in X_0\cup X_1$. 又令$W_1=f^{-1}(J_{2n+5-2a})$，$W_2=f^{-1}(J[2a-2,2n+2])$. 分三种情形讨论如下：

(i) 若存在 $v\in W_2\cap(X_0\cup X_1\cup X_3)$，则当$f^{-1}(1)\in X_1$时可由 $2a-2\leqslant f(v)\leqslant 1+2B_{3n}$ 推出 $B_{3n}\geqslant a-1$，当 $f^{-1}(1)\in X_0=\{(1,0)\}$ 时亦有 $B_{3n}\geqslant \max\{f(X_1)\}-1\geqslant n\geqslant a-1$.

(ii) 若 $W_2\subset X_2$且$W_1\not\subset X_1$，则与(i)所述相似，同样可以推出 $B_{3n}\geqslant a-1$.

(iii) 若$W_2\subset X_2$且$W_1\subset X_1$，则由 $|W_1|=|W_2|=2n+5-2a=\frac{1}{2}(n+6-\mu)>\frac{n}{2}$ 可知，存在 $i\in J_n$ 使得 $(i,1)\in W_1$ 且 $(i,2)\in W_2$. 由此推出 $B_{3n}\geqslant f(i,2)-f(i,1)\geqslant 2a-2-(2n+5-2a)=n+\mu-3\geqslant\frac{3n+\mu}{4}=a-1$.

综上所述可知 $B_{3n}\geqslant a-1$ 亦成立. 引理 2 证完.

引理3　设 $\lambda=\left\lfloor\frac{n-2}{2m-1}\right\rfloor$及 $\theta=n-2-\lambda(2m-1)$，如前面所述. 若 $m\geqslant 4$，则

$$B_{mn}\geqslant n-\lambda; \tag{1}$$

若 $\lambda\geqslant 1$ 且 θ 是小于 $2m-7$ 的奇数，则

$$B_{mn}\geqslant n+1-\lambda. \tag{1'}$$

证　(i) 当 $B_{mn}\geqslant n$ 时，(1)式自然成立. 下面只考虑$B_{mn}<n$的情形. 对$i\in J_n$，记$Y_i=\{(i,j):j\in J_{m-1}\}$，称 Y_i 为 V_{mn} 的第 i 条经线. 又记 $X=\{(i,m-1):i\in J_n\}$. 设 f 是 V_{mn}上的一个最佳标号，$a=f(1,0)$，$b=f(n,m)$. 不妨假定 $b>a$. 因 $|\partial(f^{-1}(J[a+1,p_{mn}]))|\leqslant B(f)<n$，故 $f^{-1}(J[a+1,p_{mn}])$至少与V_{mn}的一条经线不相交. 由此推知 $X\cap f^{-1}(J_a)\neq\emptyset$. 令 $v=f^{-1}(\min\{f(X\cap f^{-1}(J_a))\})$，便有

$$b-f(v)\leqslant B_{mn}. \tag{2}$$

设 V_{mn} 之中，与 $f^{-1}(J_a)$ 有至少两个交点的经线共有 k 条，与$f^{-1}(J_a)$恰有一个交点的经线共有 δ 条. 令 $Z=J_n\times J_{m-2}=\{(i,j):i\in J_n,j\in J_{m-2}\}$. 因

$$2k+\delta\leqslant|\partial(f^{-1}(J_{a-1}))|\leqslant B_{mn}, \tag{3}$$

又因

$$|f^{-1}(J_a)\cap Z|\leqslant(m-2)k+\delta, \tag{4}$$

故

$$\begin{aligned} f(v)&\leqslant|f^{-1}(J_a)\cap Z|+1\leqslant(m-2)k+\delta+1\\ &\leqslant\frac{m-2}{2}(2k+\delta)+1\leqslant\frac{m-2}{2}B_{mn}+1. \end{aligned} \tag{5}$$

由(2)及(5)式推出

$$b\leqslant\frac{m}{2}B_{mn}+1. \tag{6}$$

据图 G_{mn} 的对称性我们显然可以照样推出

$$a \geqslant p_{mn}+1-\left(\frac{m}{2}B_{mn}+1\right)=p_{mn}-\frac{m}{2}B_{mn}. \tag{7}$$

与(4)式相似，我们还有 $|f^{-1}(J_{a-1})| \leqslant (m-1)k+\delta$，因此

$$a \leqslant (m-1)k+\delta+1. \tag{8}$$

由(3)及(8)式推出

$$a \leqslant \frac{m-1}{2}(2k+\delta)+1 \leqslant \frac{m-1}{2}B_{mn}+1. \tag{9}$$

由(7)及(9)式可得 $(m-1)n+2-\frac{m}{2}B_{mn} \leqslant \frac{m-1}{2}B_{mn}+1$，由此即可推出

$$B_{mn} \geqslant \left\lceil \frac{(2m-2)n+2}{2m-1} \right\rceil = n-\lambda.$$

(ii) 当 $\lambda \geqslant 1$ 且 θ 是小于 $2m-7$ 的奇数时，$m \geqslant 4$ 必定成立。若 (1)′ 式不成立，则由(1)式得

$$B_{mn}=n-\lambda=(2m-2)\lambda+2+\theta. \tag{10}$$

由(10)式可知 B_{mn} 是个奇数。于是，由(3)式可得

$$k \leqslant \frac{B_{mn}-1}{2}. \tag{3$'$}$$

由(3)、(3)′及(5)式可推出

$$f(v) \leqslant (m-4)k+2k+\delta+1 \leqslant \frac{m-2}{2}(B_{mn}-1)+2. \tag{5$'$}$$

由(2)及(5)′式推出

$$b \leqslant \frac{m}{2}(B_{mn}-1)+3. \tag{6$'$}$$

由图 G_{mn} 的对称性知下一式亦照样成立：

$$a \geqslant p_{mn}+1-\frac{m}{2}(B_{mn}-1)-3=(m-1)n-\frac{m}{2}(B_{mn}-1). \tag{7$'$}$$

更由(3)，(3)′及(8)式可得

$$a \leqslant (m-3)k+2k+\delta+1 \leqslant \frac{m-1}{2}(B_{mn}-1)+2. \tag{9$'$}$$

由(7)′及(9)′式可得

$$(m-1)n \leqslant \frac{2m-1}{2}(B_{mn}-1)+2. \tag{11}$$

由(10)及(11)式可得 $(2m-2)n \leqslant (2m-1)(n-\lambda-1)+4$，推出 $(2m-1)(\lambda+1)-4 \leqslant n=(2m-1)\lambda+\theta+2$，进而推出 $\theta \geqslant 2m-7$。但这与原来所述条件相违，故(10)式不能成立，(1)′式必定成立。引理3证完。

引理4 设 $m \geqslant 4$，λ 及 θ 如上所述，则

$$B_{mn}\leqslant\begin{cases} n-\lambda, & \text{若 } \lambda=0\text{，或 }\theta\text{ 是偶数，或 }\theta\geqslant 2m-7\text{；}\\ n+1-\lambda, & \text{若 } \lambda\geqslant 1\text{ 且 }\theta\text{ 是小于 }2m-7\text{ 的奇数。}\end{cases}$$

证 (i) 当 $\lambda=0$ 时，作 V_{mn} 上的标号 f 为：$f(1,0)=1$；$f(n,m)=p_{mn}$；$f(i,j)=(j-1)n+i+1$，(对任 $i\in J_n, j\in J_{m-1}$)。易验此时 $B_{mn}\leqslant B(f)=n$。

(ii) 当 θ 是偶数时，令

$$g_m(j)=\begin{cases} 2j-m, & \text{若 } j\geqslant\dfrac{m}{2}\text{；}\\ m-2j-1, & \text{若 } j<\dfrac{m}{2}\text{。}\end{cases} \tag{12}$$

因 $n-\lambda=(2m-2)\lambda+2+\theta$ 是偶数，故可以作 V_{mn} 上的标号 f 使之满足下列三个条件：

① 对任 $i\in J\left[1,\dfrac{n-\lambda}{2}\right]$ 及 $j\in J_{m-1}$ 有

$$f(i,j)=\frac{n-\lambda}{2}g_m(j)+i\text{；}$$

② $f(1,0)=\dfrac{n-\lambda}{2}(m-1)+1$；

③ 对任 $(i,j)\in V_{mn}$ 均有

$$f(i,j)=p_{mn}+1-f(n+1-i,m-j)\text{。}$$

不难看出，此时 $B(f)=\max\{f(1,0)-f(1,1),f(n,1)-f(1,0)\}=\max\left\{n-\lambda,\ p_{mn}+1-\dfrac{n-\lambda}{2}(m-2)-1-\dfrac{n-\lambda}{2}(m-1)-1\right\}=\max\left\{n-\lambda,n-\lambda-\dfrac{\theta}{2}\right\}=n-\lambda$。由此推出 $B_{mn}\leqslant n-\lambda$。

(iii) 当 θ 是大于 $2m-8$ 的奇数时，令 g_m 的定义仍如 (12) 式所述。因 $n-\lambda-1=(2m-2)\lambda+1+\theta$ 是偶数，故可以作 V_{mn} 上的标号 f 使之满足下列三个条件：

① 令 $\mu=\dfrac{n-\lambda-1}{2}$。对任 $(i,j)\in J_\mu\times J_{m-1}$，有

$$f(i,j)=\begin{cases}\mu g_m(j)+i, & \text{若 } j\in J_{m-2}\text{；}\\ \mu(m-2)+i+1, & \text{若 } j=m-1\text{。}\end{cases}$$

② $f(\mu+1,1)=\mu(m-2)+1$，

$f(1,0)=\mu(m-1)+2$，

$f(\mu+1,2)=\mu(m-1)+3$。

③ 对任 $(i,j)\in V_{mn}$ 均有

$f(i,j)=p_{mn}+1-f(n+1-i,m-j)$。

不难看出，此时 $B(f)=\max\{f(1,0)-f(1,1),f(n,1)-f(1,0)\}=\max\{n-\lambda,\ p_{mn}+1-\mu(m-2)-2-\mu(m-1)-2\}=\max\left\{n-\lambda,n-\lambda+\dfrac{2m-7-\theta}{2}\right\}=n-\lambda$。由此亦可推出 $B_{mn}\leqslant n-\lambda$。

(iv) 当 θ 是小于 $2m-7$ 的奇数时，因 G_{mn} 同构于 $G_{m,n+1}$ 的一个子图，据情形 (ii) 所得结论可推出 $B_{mn}\leqslant B_{m,n+1}\leqslant n+1-\left[\dfrac{n+1-2}{2m-1}\right]=n+1-\lambda$。

至此，引理 4 证完。

把上述四个引理综合起来，即得到本文前面所给出的定理。

参考文献

[1] Harary, F., Theory of Graphs and Its Applications, Czech. Acad Sci.,Prague (1967).

[2] Chvátalová, J., Optimal labelling of a product of two paths, *Discrete Math.*, 11 (1975), 249—253.

[3] Chvátalová, J., Dewdney, A. K., Gibbs, N. E., Korfhage, R. R., The bandwidth problem for graphs, Research Report, Dept. of Computer Science, University of Western Ontario and Southern Methodist University (1975).

[4] Dewdney, A. K., The bandwidth of a graph——some recent results, Proc. 7th S-E Conf. Combinatorics, Graph Theory and Computing, (1976), 273—288.

[5] 李乔，陶懋颀，沈韵秋，环面上格子图$C_m\times C_n$的带宽，中国科学技术大学学报，第11卷(1981)，第1期，1—16.

The Bandwidth of the Graph Constructed by n Meridian Lines on a Sphere

By Mai Jie-hua (麦结华)

(Department of Mathematics, Guangxi University)

Abstract

In this paper we solve a problem announced by A. K. Dewdney in 1976[4], count the bandwidth of the graph G_{mn} which is illustrated in Fig.1 or Fig.2.