第3卷 第1期
1983年 1月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.3 No.1
Jan. 1983

关于Euler-Poisson-Darboux方程在奇线附近的正规解*

刘家沛

（陕西机械学院）

关于含奇线的方程，其解在奇线附近性质的研究，在许多问题的研究中都被触及到[3]—[6]，著名的方程 $E(\beta,\beta')$：

$$L(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\beta'}{x-y}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\beta}{x-y}\frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad (0<\beta,\beta'<1).$$

是最早和最多被研究的。本文主要解决文[1]、[2]中提出的"至今尚未被解决的问题"。我们证明了：

定理1 方程 $E(\beta,\beta')$ 当 $\beta+\beta'=1$ 时在 $y=x$ 附近（除 $y=x$ 上各点）为正规的解恒可以写为：

$$Z(\beta,1-\beta)=\int_y^x P(\alpha)(x-\alpha)^{-\beta}(\alpha-y)^{\beta-1}d\alpha$$
$$+\int_y^x Q(\alpha)(x-\alpha)^{-\beta}(\alpha-y)^{\beta-1}\cdot \lg\frac{(x-\alpha)(\alpha-y)}{(x-y)}d\alpha. \qquad (1)$$

其中 $P(\alpha)$、$Q(\alpha)$ 是适当正规的任意函数。

证 考虑 $E(\beta,\beta')$ 的一般第一问题，运用Poisson公式，和Riemann函数及Darboux的一个极限以及Gauss超几何函数的性质及一定技巧后等等，便可得该一般第一问题在 $\beta+\beta'=1$ 时于 $y_1\leqslant y<x\leqslant x_1$ 中的正规解(1)。其中

$$P(\alpha)=\frac{(x_1-y_1)(x_1-\alpha)^{\beta-1}(\alpha-y_1)^{-\beta}}{[\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)]^2}\lg\frac{(x_1-\alpha)(\alpha-y_1)}{(x_1-y_1)}\psi(x_1)$$
$$-\frac{(\alpha-y_1)^{-\beta}}{[\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)]^2}\int_\alpha^{x_1}(\xi-y_1)(\xi-\alpha)^{\beta-1}\lg\frac{(\xi-\alpha)(\alpha-y_1)}{(\xi-y_1)}[\psi'+b\psi]d\xi$$
$$+\frac{(x_1-\alpha)^{\beta-1}}{[\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)]^2}\int_{y_1}^{\alpha}(x_1-\eta)(\alpha-\eta)^{-\beta}\lg\frac{(x_1-\alpha)(\alpha-\eta)}{(x_1-\eta)}[\varphi'+a\varphi]d\eta,$$

$$Q(\alpha)=-\frac{(x_1-y_1)(x_1-\alpha)^{\beta-1}(\alpha-y_1)^{-\beta}}{[\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)]^2}\psi(x_1)$$

*1981年11月20日收到。本文全文曾于1980年3月在第三届全国微分方程会议上宣读过。

$$+\frac{(a-y_1)^{-\beta}}{[\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)]^2}\int_a^{x_1}(\xi-y_1)(\xi-a)^{\beta-1}[\psi'+b\psi]d\xi$$

$$-\frac{(x_1-a)^{\beta-1}}{[\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)]^2}\int_{y_1}^{a}(x_1-\eta)(a-\eta)^{-\beta}[\varphi'+a\varphi]d\eta,$$

而φ,ψ为特征上的适当正规任意函数，并且

$$b=\beta/(\xi-y_1),\quad a=\beta'/(x_1-\eta).$$ 证毕。

定理2. 方程$E(\beta,\beta')$，$(\beta+\beta'=1)$ 的Riemann函数在$y=x$附近(除$y=x$上各点)可写为：

$$V(x,y;x_0,y_0)=\int_{y_0}^{x_0}\frac{(x-y)(x-\alpha)^{\beta-1}(\alpha-y)^{-\beta}}{[\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)]^2}(x_0-\alpha)^{-\beta}(\alpha-y_0)^{\beta-1}$$

$$\cdot\lg\frac{(x-\alpha)(\alpha-y)(x_0-y_0)}{(x_0-\alpha)(\alpha-y_0)(x-y)}d\alpha. \tag{2}$$

证 仿定理1可得；或由定理1及Riemann对称定理亦可得。 证毕。

作者衷心感谢中国科学院数学所王光寅教授和西北大学凌岭教授的关心和指导。

参 考 文 献

[1] 吴新谋，数学物理方程，1959，科学出版社。

[2] Darboux, G., Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces, T. 2. 1914.

[3] 邱佩璋、凌岭，科学记录，T. 1, No. 3. (N. S). 1957.

[4] Бицадзе А. В. 数学进展，T. 4, No. 3, 1958.

[5] 凌岭，数学学报，T. 23, No. 4, 1980.

[6] 王光寅，数学学报，T. 7, No. 4, 1957, 12.

On Regular Solutions of E-P-D Equation in Neighborhood of Singular Line

By Liu Jiapei (刘家沛)

(Shensi Mechanical Engineering Institute)

Abstract

In this paper, We have proved that the regular solutions of equations $E(\beta,\beta')$ $(0<\beta,\beta'<1,\beta+\beta'=1)$ are always expressed in general form in neighborhood of singular line (with exception of points on singular line). Our result implies the theorem that had been proved for $\beta=\beta'=\frac{1}{2}$. We obtain Th. 1. and Th. 2.