编辑同志：

贵刊1981年第1期刊载的叶懋冬同志的文章《关于 $E_n(W_p^r)_p$ 的一些结果》中有两处错误。

(a)
$$b\sin kx*\left(\frac{v_1}{\sqrt{\pi}}\sin kx+\frac{v_2}{\sqrt{\pi}}\cos kx\right)$$
$$=bv_1\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}-bv_2\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}$$

不成立。因为

$$b\sin kx*\left(\frac{v_1}{\sqrt{\pi}}\sin kx+\frac{v_2}{\sqrt{\pi}}\cos kx\right)$$
$$=\pi^{-1}\int_0^{2\pi}b\sin k(x-t)\left(\frac{v_1}{\sqrt{\pi}}\sin kt+\frac{v_2}{\sqrt{\pi}}\cos kt\right)dt$$
$$=\pi^{-1}b\int_0^{2\pi}(\sin kx\cos kt-\cos kx\sin kt)\cdot\left(\frac{v_1}{\sqrt{\pi}}\sin kt+\frac{v_2}{\sqrt{\pi}}\cos kt\right)dt$$
$$=bv_2\frac{\sin kx}{\sqrt{x}}-bv_1\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}.$$

从而该文中的(3)式是错误的。

(b) 该文第57页第一行的断语"易知上式的括号展开再积分后所有的非零项都是正的"不成立。举例如下：

取 $m=2$，$u(x)=\alpha(\cos nx-\cos(n+1)x-\cos(n+2)x-\cos(n+3)x)$，此处 $\alpha>0$ 是使 $\|u\|_{2m}=\|u\|_4=1$ 成立的常数。考虑

$$\int_0^{2\pi}(\cos nx-\cos(n+1)x-\cos(n+2)x-\cos(n+3)x)^4dx$$

中含有 $\cos nx\cdot\cos(n+1)x\cdot\cos(n+2)x\cdot\cos(n+3)x$ 的项。该项等于

$$-4!\int_0^{2\pi}\cos nx\ \cos(n+1)x\ \cos(n+2)x\ \cos(n+3)xdx$$
$$=-4!\int_0^{2\pi}\frac{\cos(2n+2)x+\cos 2x}{2}\cdot\frac{\cos(2n+4)x+\cos 2x}{2}dx$$
$$=-\frac{4!}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2 2x\,dx=-3!\pi.$$

由此便知上面这句话不对。所以引理2的证明关键的一步是过不去的。

(c) 即使引理2成立，也只是对 $D=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos kx$ 的情形成立。由此并不能得出对 $D=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx$ 也成立的结论。因为这时将出现 u 的共轭函数 $\tilde{u}$ 的Fourier展开，由 $\|u\|_{2m}\leqslant 1$ 未必能得到 $\|\tilde{u}\|_{2m}\leqslant 1$。

结论：该文只证明了 $E_n(W_p^r)_p\geqslant n^{-r}$。上方估计尚待证明。

孙永生 1982,7,19。