第3卷 第1期
1983年 1月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHFMATICAL RFSEARCH AND EXPOSITION

Vol.3 No.1
Jan. 1983

最小二乘辨识的强一致性

张有纮

（华东师范大学）

§1 引 言

系统辨识中参数估计的一致性问题巳有很多研究。[1,2] 研究了最小二乘辨识的弱一致性问题.[3,4]对离散时间系统、[5]对连续时间系统提出了保证最小二乘估计收敛且强一致的条件。但其中包含了噪声的条件协方差阵对(t,ω)一致有界。[6,7]把递推算法的收敛性、强一致性和某一常微分方程的稳定性建立了联系，这一类定理所讨论的并不是某一种特定的算法，而是一类算法。但[6]中所要求的条件很多，有的不容易验证，[7]中处理方法较[6]简单。但所要求的条件仍很强，特别是事先要求递推过程一致有界及常返某一紧集，这样一个不太合理的要求。

本文讨论的动态系统，并不要求噪声的条件协方差阵一致有界，也不事先要求递推过程一致有界及常返某一紧集。在一些比较简单的收敛阶数的条件下，利用鞅收敛定理，证明了最小二乘辨识的收敛性和强一致性.最后指出，L. Ljung [3] 的结果可视为本文的特例。

§2 问题的提法和基本结果：

设动态系统的输出y_n为m维向量，输入u_n为r维向量，它由下列差分方程描述。

$$y_n+A_1y_{n-1}+\cdots\cdots+A_py_p=B_1u_1+\cdots+B_qu_q+\varepsilon_n \tag{1}$$

记 $\theta^\tau=[A_1,\ A_2,\cdots,A_p,\ B_1,\cdots B_q]$

$$\varphi^\tau_{n-1}=[-y^\tau_{n-1},\cdots,-y^\tau_{n-p},\ u^\tau_{n-1},\cdots u^\tau_{n-q}]$$

此外：θ是$(mp+rq)\times m$维矩阵，φ_{n-1}是$mp+rq$维列向量。那么(1)可改写为：

$$y_n=\theta^\tau\varphi_{n-1}+\varepsilon_n. \tag{2}$$

θ是要估参数，初值y_0是确定性的用$\mathscr{F}_n$表示由$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$所产生的最小$\sigma$-代数.设

$$E[\varepsilon_{n+1}/F_n]=0,\ E[\varepsilon^\tau_{n+1}\varepsilon_{n+1}/F_n]=M_n,\ E[\varepsilon^\tau_{n+1}\varepsilon_{n+1}/F_n]<\infty\ \ \forall n \tag{3}$$

这里我们并不要求M_n对$(n,\ \omega)$一致有界。

u_n对F_n可测，这样就把带反馈控制的动态系统也包括进来了。我们要讨论在什么条件下，下列最小二乘递推辨识算法。当$u\to\infty$时的$\hat{\theta}_n$几乎处处收敛到真值θ.

$$\hat{\theta}_{n+1}=\hat{\theta}_n+P_{n+1}\varphi_n(Y^\tau_{n+1}-\varphi^\tau_n\hat{\theta}_n)\quad n=0,\ 1,\ 2,\cdots \tag{4}$$

$$P_{n+1}=P_n-\frac{P_n\varphi_n\varphi^\tau_nP_n}{1+\varphi^\tau_nP_n\varphi_n}\qquad n=0,\ 1,\ 2,\cdots \tag{5}$$

此处：θ_0和P_0为相应维数的任意确定性矩阵。

设：(i) $\limsup\limits_{n\to\infty}(tr\ P_{n+1})\cdot n^{\alpha}<\infty, \quad a.s,$ (6)

(ii) $\limsup\limits_{n\to\infty}(tr\ P_{n+1}^{-1})\cdot n^{\beta}<\infty, \quad a.s,$ (7)

(iii) $\limsup\limits_{n\to\infty} M_n n^{-\gamma}<\infty, \quad a.s,$ (8)

此处：$\alpha>0$，$\gamma\geqslant 0$，显然 $\alpha\leqslant\beta$.

定理：系统(1)，噪声 $\{\varepsilon_n\}$ 满足(3)，若 trP_n，trp_n^{-1}，M_n 的收敛级别分别为 α，β，γ(即(6)(7)(8)式所表达)。

且满足
$$\beta-2\alpha+\gamma<0 \tag{9}$$
$$E[\varphi_n^{\tau}P_n\varphi_nM_n]<\infty \quad 对\forall n \tag{10}$$

则最小二乘辨识算法(4)(5)给出的 $\hat{\theta}_n$，必有强一致性。即当 $n\to\infty$ 时
$$\hat{\theta}_n\longrightarrow\theta \quad a.s$$

证明要点：定义 $V_n=tr[(\hat{\theta}_n-\theta)^{\tau}P_n^{-1}(\hat{\theta}_n-\theta)]$ $n=0, 1, 2, \cdots$，可以证明
$$E[V_{n+1}/F_n]-V_n\leqslant\varphi_n^{\tau}P_{n+1}\varphi_nM_n.$$

再定义
$$\begin{cases} S_0=V_0+M \\ S_n=n^{-\delta}V_n+M-\sum\limits_{i=1}^{n-1}i^{-\delta}\varphi_i^{\tau}P_{i+1}\varphi_iM_i \quad (n\geqslant 1), \end{cases}$$

此处 $\beta-\alpha+\gamma<\delta<\alpha$，$\delta>0$，则可以证明：
$$\sum_{i=1}^{\infty}i^{-\delta}\varphi_i^{\tau}P_{i+1}\varphi_iM_i<M<\infty,$$

$\{S_n, F_n\ n=0, 1, 2, \cdots\}$ 是非负可积上鞅.

由收敛定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$ $a.s.$ 由此即可推出定理结论。

注：本文包含了L.Ljung1976年[3]中的结果，[3]中对噪声的要求比本文严厉，要求噪声的条件协方差阵一致有界。此要求按本文记号，为 $\gamma=0$。[3]中对数据要求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_{n+1}^{-1}}{n}=R>0$，$R$ 为任一正定阵，即要求 $\alpha=\beta=1$。此时，我们的定理要求 $\beta-2\alpha+\gamma<0$ 显然满足。从定理也立刻可看到，L.Ljung的结果中，或对噪声，或对数据可放松要求，只要它们的收敛阶次满足 $\beta-2\alpha+\gamma<0$，仍可得出 $\hat{\theta}_n$ 的强一致性的结论。

参考文献

[1] Rao, M, M., Consistency and limit distribution of estimators of parameters in explosive stochastic difference equation, *Ann. Math. Stat.*, 32(1961), pp195—218.

[2] Stigum, B., A asympotic properties of dynamic stochastic parameters estimates IV, J. Multivariate Analysis, 4, (1974), pp 351—381.

[3] Ljung, L., Consistency of the least squares identification method, *IEEE Tnans. Auto*, Control. 21, (1976), pp 779—81.

[4] Moore, J. B., On strong consistency of least square identification algorithms, Auto. Vol, 14, 1978, pp 505.

[5] Chen Han-fu, Least squares identification of continuous-times system, Proceeding of the fourth international Conference of analysis and optimization of systems, Vol. 28, (1980).

[6] Ljung, L., Analysis of recursive stochastic algorithms, *IEEE Tnans.* AC, —22, No. 4, (1977), pp 551—75

[7] Kushner, H. J. and Clark, D. S., Stochastic approximation methods for constrained and unconstrained system, Springer—Verlag, (1978).