第3卷 第2期 1983年4月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.3 No.2 Apr. 1983

左模张量积函子(Ⅱ)*

胡述安

（南京大学）

§4 Zh^R-平坦模的进一步讨论

在§3中，我们已经给出了 Zh^R-平坦模的一些初步性质与判别法则。本节给出 Zh^R-平坦模与古典的投射模、内射模、平坦模之间的关系，即下列定理4.1，这说明我们引入的 Zh^R-平坦模的概念是合理的。先引进一条引理，它实际上是文献[4]的一个习题[4, Exercise 6.4]。

引理 如T是从模范畴$\mathfrak{A}$到模范畴$\mathfrak{C}$的共变正合函子，则对于$\mathfrak{A}$中任一复形$\mathbf{A}$，$\forall n$，均有：$H_n(T\mathbf{A})\cong TH_n(\mathbf{A})$，其中$H_n(\mathbf{A})$表示复形$\mathbf{A}$的第$n$个同调群，$H_n(T\mathbf{A})$表示$\mathfrak{C}$中复形$T\mathbf{A}$的第$n$个同调群。

定理4.1 取定K、R、S，则以下条件等价：

i) S作为左S-模是Zh^R-平坦模；

ii) 任何投射左S-模都是Zh^R-平坦模；

iii) 任何平坦左S-模都是Zh^R-平坦模；

iv) $\forall M\in\mathscr{M}_{R\otimes S}$，$\forall A\in{}_R\mathscr{M}$，$\forall n\geqslant 0$，均有同构 $\mathrm{Tor}_n^{R\otimes S}(M,A\otimes S)\cong\mathrm{Tor}_n^R(M,A)$；

v) 任何平坦右$R\otimes S$-模都是平坦右R-模；

vi) $R\otimes S$作为右R-模是古典的平坦模；

vii) 对于任何平坦左S-模C，$\forall M\in\mathscr{M}_{R\otimes S}$，$\forall A\in{}_S\mathscr{M}$，均有同构 $\mathrm{Tor}_n^{R\otimes S}(M,A\otimes C)\cong\mathrm{Tor}_n^R(M,A)\otimes_S C$；

viii) 对于任何投射左S-模C，$\forall A\in{}_R\mathscr{M}$，$\forall N\in{}_{R\otimes S}\mathscr{M}$ $\forall n\geqslant 0$，有同构$\mathrm{Ext}_{R\otimes S}^n(A\otimes C,N)\cong\mathrm{Ext}_R^n(A,\mathrm{Hom}_S(C,N))$；

ix) $\forall A\in{}_R\mathscr{M}$，$AN\in{}_{R\otimes S}\mathscr{M}$，$\forall n\geqslant 0$，有同构$\mathrm{Ext}_{R\otimes S}^n(A\otimes S,N)\cong\mathrm{Ext}_R^n(A,N)$；

x) 对于每个投射左S-模C，$\forall A\in{}_R\mathscr{M}$，$\forall N\in{}_{R\otimes S}\mathscr{M}$，$\forall n\geqslant 0$，有同构$\mathrm{Ext}_{R\otimes S}^n(A\otimes C,N)\cong\mathrm{Hom}_S(C,\mathrm{Ext}_R^n(A,N))$；

xi) 任何内射左$R\otimes S$-模都是内射左R-模；

xii) 存在${}_{R\otimes S}\mathscr{M}$的一个内射上生成子$X$，是内射左$R$-模。

证明 i),ii),xi),xii) 的等价性见定理3.1的推论。其余的证明路线是：i)⇒iv)⇒vi)⇒iii)⇒i)；

v)⇒vii)⇒iv)；ii)⇒viii)⇒ix)⇒xi)；xi)⇒x)⇒xi)。

i)⇒iv)：取A的R-平坦分解为$\cdots\to F_n\to\cdots\to F_1\to F_0\to A\to 0$，删去$A$之后的复形记为

*本文之(Ⅰ)见本刊上期(Vol.3, No.1)

$\mathbf{F}_A$. 由于S是Zh^R-平坦的，$\sim\otimes S$是正合函子，再由定理2.3的推论，$F_n\otimes S$是左$R\otimes S$-平坦模。故$\mathbf{F}_A\otimes S$是$A\otimes S$在${}_{R\otimes S}\mathscr{M}$中的平坦分解再删去$A\otimes S$而得到的复形。用定理2.3给出的自然的同构，得到复形的同构：

$$M\otimes_{R\otimes S}(\mathbf{F}_A\otimes S)\cong(M\otimes_R\mathbf{F}_A)\otimes_S S\cong M\otimes_R\mathbf{F}_A.$$

这样相应的同调群也是同构的。由$\mathrm{Tor}_n^R(\sim,\sim)$与$\mathrm{Tor}_n^{R\otimes S}(\sim,\sim)$的定义，立得：$\mathrm{Tor}_n^{R\otimes S}(M,A\otimes S)\cong\mathrm{Tor}_n^R(M,A)$.

iv)$\Rightarrow$v) 如M是右平坦$R\otimes S$-模，则$\forall A\in{}_R\mathscr{M}$，有$\mathrm{Tor}_1^{R\otimes S}(M,A\otimes S)=0$. 由iv)的同构得$\mathrm{Tor}_1^R(M,A)=0$，故可得$M$是右平坦$R$-模。

v)$\Rightarrow$vi) 当然。

vi)$\Rightarrow$iii) 设C是一个平坦左S-模。取${}_R\mathscr{M}$中任一正合列$0\to A'\to A\to A''\to 0$. 由vi) $R\otimes S$作为右R-模是古典的平坦模，得$\mathscr{M}_S$中的正合列：

$$0\to(R\otimes S)\otimes_R A'\to(R\otimes S)\otimes_R A\to(R\otimes S)\otimes_R A''\to 0.$$

但C是平坦左S-模，则得加群正合列

$$0\to((R\otimes S)\otimes_R A')\otimes_S C\to((R\otimes S)\otimes_R A)\otimes_S C\to((R\otimes S)\otimes_R A'')\otimes_S C\to 0.$$

由定理2.3给出的自然同构，得到加群正合列：

$$0\to(R\otimes S)\otimes_{R\otimes S}(A'\otimes C)\to(R\otimes S)\otimes_{R\otimes S}(A\otimes C)\to(R\otimes S)\otimes_{R\otimes S}(A''\otimes C)\to 0.$$

即$0\to A'\otimes C\to A\otimes C\to A''\otimes C\to 0$正合。故$C$是$Zh^R$-平坦模。

iii)$\Rightarrow$i) 当然。

v)$\Rightarrow$vii) 取M在$\mathscr{M}_{R\otimes S}$中的一个平坦分解$\cdots\to F_n\cdots\to F_1\to F_0\to M\to 0$，由v)可知，它也是右$R$-模$M$在$\mathscr{M}_R$中的平坦分解。记删去$M$后得到的复形为$\mathbf{F}_M$. 由定理2.3给出的自然的同构得到复形的同构：$(\mathbf{F}_M\otimes_R A)\otimes_S C\cong\mathbf{F}_M\otimes_{R\otimes S}(A\otimes C)$. 当然相应的同调群也同构。但$C$是左$S$-平坦模，$\sim\otimes_S C$是共变正合函子，则由引理得：$\forall n\geqslant 0$,

$$H_n(\mathbf{F}_M\otimes_{R\otimes S}(A\otimes C))\cong H_n((\mathbf{F}_M\otimes_R A)\otimes_S C)\cong H_n(\mathbf{F}_M\otimes_R A)\otimes_S C.$$

由定义知$\mathrm{Tor}_n^{R\otimes S}(M,A\otimes C)\cong\mathrm{Tor}_n^R(M,A)\otimes_S C$.

vii)$\Rightarrow$iv) 取$C=S$即得。

ii)$\Rightarrow$viii) C是投射左S-模，由ii)知它是Zh^R-平坦模。则由定理3.1知，$\mathrm{Hom}_S(C,E)$是内射左R-模，其中E是内射左$R\otimes S$-模。

取N在${}_{R\otimes S}\mathscr{M}$中的一个内射分解

$$0\to N\to E_0\to E_1\to\cdots\to E_n\to\cdots.$$

由于C是投射左S-模，$\mathrm{Hom}_S(C,\sim)$是${}_{R\otimes S}\mathscr{M}\to{}_R\mathscr{M}$的一个共变正合函子。这样

$$0\to\mathrm{Hom}_S(C,N)\to\mathrm{Hom}_S(C,E_0)\to\cdots\to\mathrm{Hom}_S(C,E_n)\to\cdots$$

是$\mathrm{Hom}_S(C,N)$在${}_R\mathscr{M}$中的一个内射分解。记N的内射分解删去N后的复形为$\mathbf{E}_N$，则$\mathrm{Hom}_S(C,\mathbf{E}_N)$就是$\mathrm{Hom}_S(C,N)$的内射分解删去$\mathrm{Hom}_S(C,N)$后而得到的复形。由定理2.1给出的伴随同构，有复形的同构：

$$\mathrm{Hom}_{R\otimes S}(A\otimes C,\mathbf{E}_N)\cong\mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_S(C,\mathbf{E}_N)).$$

当然相应的同调群也同构。由定义知，$\forall n\geqslant 0$,

$$H_{-n}(\mathrm{Hom}_{R\otimes S}(A\otimes C,\boldsymbol{E}_N))\cong H_{-n}(\mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_S(C,\boldsymbol{E}_N))).$$

即 $\mathrm{Ext}^n_{R\otimes S}(A\otimes C,N)\cong\mathrm{Ext}^n_R(A,\mathrm{Hom}_S(C,N))$.

viii)⇒ix)　取$C=S$立得。

ix)⇒xi)　如N是内射左 $R\otimes S$-模，则$\forall A\in{}_R\mathscr{M}$，有 $\mathrm{Ext}^1_{R\otimes S}(A\otimes S,N)=0$。由 ix)即得$\mathrm{Ext}^1_R(A,N)=0$，故$N$是内射左$R$-模。

xi)⇒x)　对 $N\in{}_{R\otimes S}\mathscr{M}$，取它的内射分解，删去 N后的复形记为 $\boldsymbol{E}_N$，则由定理2.1证明的伴随同构(对调 R与 S 的地位)，得到复形的同构：

$$\mathrm{Hom}_{R\otimes S}(A\otimes C,\boldsymbol{E}_N)\cong\mathrm{Hom}_S(C,\mathrm{Hom}_R(A,\boldsymbol{E}_N)).$$

相应的同调群也同构。但由 xi)，$\boldsymbol{E}_N$也是N在${}_R\mathscr{M}$中的内射分解删去N之后得到的复形。另外我们这儿的C是一个投射左S-模，故 $\mathrm{Hom}_S(C,\sim)$：${}_{R\otimes S}\mathscr{M}\to{}_R\mathscr{M}$ 是一个共变正合函子，这样由引理，可得：$\forall n\geqslant 0$,

$$\begin{aligned}H_{-n}(\mathrm{Hom}_{R\otimes S}(A\otimes C,\boldsymbol{E}_N))&\cong H_{-n}(\mathrm{Hom}_S(C,\mathrm{Hom}_R(A,\boldsymbol{E}_N)))\\&\cong\mathrm{Hom}_S(C,H_{-n}(\mathrm{Hom}_R(A,\boldsymbol{E}_N))).\end{aligned}$$

由定义就是

$$\mathrm{Ext}^n_{R\otimes S}(A\otimes C,N)\cong\mathrm{Hom}_S(C,\mathrm{Ext}^n_R(A,N)).$$

x)⇒xi)。在x)中取$C=S$，N是内射左 $R\otimes S$- 模，则 $\mathrm{Ext}^1_{R\otimes S}(A\otimes S,N)=0$。这样必要求$\mathrm{Hom}_S(S,\mathrm{Ext}^1_R(A,N))\cong\mathrm{Ext}^1_R(A,N)=0$，$\forall A\in{}_R\mathscr{M}$。故$N$也是内射左$R$-模。∎

由这个定理可以得出一些关于维数的不等式，我们只给出下列两个条件比较简明的推论。

推论1　取定 K、R、S。如 S 是 Zh^R- 平坦的，则 $\forall M\in\mathscr{M}_{R\otimes S}$，均有 $fd_R(M)\leqslant fd_{R\otimes S}(M)$。

推论2　取定 K、R、S，如 S 是Zh^R-平坦的，则$\forall N\in{}_{R\otimes S}\mathscr{M}$，均有 $id_R(N)\leqslant id_{R\otimes S}(N)$。
这两个推论可分别由 iv)、ix)推出。而且还容易看出，它们实际上都是充要条件。

§5　左模张量积函子的导出函子

定义5.1　给定 K、R、S，$C\in{}_S\mathscr{M}$，$\sim\otimes C$作为${}_R\mathscr{M}\to{}_{R\otimes S}\mathscr{M}$的共变右正合函子，其第$n$个左导出函子$L_n(\sim\otimes C)$记成 $\mathrm{Tor}_n(\sim,C)$。对$A\in{}_R\mathscr{M}$，把 $\mathrm{Tor}_n(\sim,C)(A)$记为 $\mathrm{Tor}_n(A,C)$。其余的符号是自明的。其具体构造参见文献[4.p178—193]。

同样由同调代数的基本定理（见[4 ch6]），容易得到下列性质，我们略去其证明。

命题5.1　$\mathrm{Tor}_n(\sim,C)$是${}_R\mathscr{M}\to{}_{R\otimes S}\mathscr{M}$的一个加法共变函子。

命题5.2　如A是R-投射模，则有$\mathrm{Tor}_n(A,C)=0$，$\forall C\in{}_S\mathscr{M}$，$\forall n\geqslant 1$。

命题5.3　如C是Zh^R-平坦模，则有$\mathrm{Tor}_n(A,C)=0$，$\forall A\in{}_R\mathscr{M}$，$\forall n\geqslant 1$。

命题5.4　函子$\mathrm{Tor}_0(\sim,C)$与$\sim\otimes C$自然等价。

命题5.5　(长正合列定理)如${}_R\mathscr{M}$中有正合列

$$0\longrightarrow A'\xrightarrow{\sigma}A\xrightarrow{\pi}A''\longrightarrow 0.$$

则$\forall C\in{}_S\mathscr{M}$，有${}_{R\otimes S}\mathscr{M}$中的长正合列：

$$\cdots\to\mathrm{Tor}_{n+1}(A'',C)\xrightarrow{\Delta_{n+1}}\mathrm{Tor}_n(A',C)\xrightarrow{\mathrm{Tor}_n(\sigma,1_C)}\mathrm{Tor}_n(A,C)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{Tor}_n(\pi,1_C)}\mathrm{Tor}_n(A'',C)\xrightarrow{\Delta_n}\mathrm{Tor}_{n-1}(A',C)\to\cdots$$

$$\to\mathrm{Tor}_1(A'',C)\xrightarrow{\Delta_1}A'\otimes C\xrightarrow{\sigma\otimes 1}A\otimes C\xrightarrow{\pi\otimes 1}A''\otimes C\to 0.$$

其中 $\Delta_n, n=1,2,\cdots$,的定义类似于通常的关于 $\mathrm{Tor}_n^R(\sim,\sim)$ 的长正合列定理[4. Theorem 6.3]中的联带映射.

命题5.6　如 $0\to A'\to A\to A''\to 0$ 是 $_R\mathscr{M}$ 中正合列,其中A是投射R-模,则 $\forall n\geqslant 1$, $\forall C\in{}_S\mathscr{M}$,有同构

$$\mathrm{Tor}_n(A',C)\cong\mathrm{Tor}_{n+1}(A'',C).$$

命题5.7　记 $\mathrm{Tor}_n(A,C)$ 的定义中的A的投射分解为 $P=\cdots\to p_{n+1}\xrightarrow{d_{n+1}}p_n\xrightarrow{d_n}p_{n-1}\to\cdots\to p_1\xrightarrow{d_1}p_0\xrightarrow{d_0^*}A\to 0$. 记 $\mathrm{Ker}\,d_n=L_n$, $\forall n\geqslant 1$; $\mathrm{Ker}\,d_0^*=L_0$. 则 $\forall n\geqslant 1$,有

$$\mathrm{Tor}_{n+1}(A,C)\cong\mathrm{Tor}_n(L_0,C)\cong\cdots\cong\mathrm{Tor}_1(L_{n-1},C).$$

如 $A\in{}_R\mathscr{M}$,则函子 $A\otimes\sim$: $_S\mathscr{M}\to{}_{R\otimes S}\mathscr{M}$ 也是共变右正合函子,同样可以定义它的第n个左导出函子,记为 $\mathrm{tor}_n(A,\sim)$. 当然对于 $\mathrm{tor}_n(A,\sim)$,上述七个命题都成立,不过R与S、A与C的地位要颠倒过来.

值得注意的是,与古典的$\mathrm{Tor}_n^R(\sim,\sim)$不同,$\mathrm{Tor}_n(A,C)$ 与 $\mathrm{tor}_n(A,C)$ 未必同构. 原因在于投射S-模不一定是Zh^R-平坦的,投射R-模不一定是Zh^S-平坦的. 我们有下列

命题5.8　如R作为左R-模是Zh^R-平坦的,S作为左S-模是Zh^R-平坦的,则 $\forall n\geqslant 0$, $\forall A\in{}_R\mathscr{M}$, $\forall C\in{}_S\mathscr{M}$,均有

$$\mathrm{Tor}_n(A,C)\cong\mathrm{tor}_n(A,C).$$

证明　$n=0$,由命题5.4显然可得,并不需要附加的条件.

$n=1$,取$_R\mathscr{M}$与$_S\mathscr{M}$中的正合列 $0\to A'\xrightarrow{\sigma}P\xrightarrow{\pi}A\to 0$, 与 $0\to C'\xrightarrow{\alpha}Q\xrightarrow{\beta}C\to 0$,其中$P$、$Q$分别是$R$-、$S$-投射模. 由定理4.1,$P$是$Zh^S$-平坦的,$Q$是$Zh^R$-平坦的,再由命题5.2、命题5.4与命题5.5,可知下图可换,其中后三行、后三列均正合.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & \mathrm{tor}_1(A',C) \arrow[r] \arrow[d, "\delta_1"] & \mathrm{tor}_1(P,C)=0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{tor}_1(A,C) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1(A,C) \arrow[r, "\Delta_1"] \arrow[d] & A'\otimes C' \arrow[r, "\sigma\otimes 1_{C'}"] \arrow[d, "1_{A'}\otimes\alpha"] & P\otimes C' \arrow[r] \arrow[d] & A\otimes C' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1(A,Q)=0 \arrow[r] \arrow[d] & A'\otimes Q \arrow[r] \arrow[d] & P\otimes Q \arrow[r] \arrow[d] & A\otimes Q \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1(A,C) \arrow[r] & A'\otimes C \arrow[r, "\sigma\otimes 1_C"] \arrow[d] & P\otimes C \arrow[r] \arrow[d] & A\otimes C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

注意虚线界的部分满足蛇形引理（Snake Lemma[4, Theorem 6.5]）的条件，故有正合列

$$0\to \mathrm{tor}_1(A,C)\to A'\otimes C\xrightarrow{\sigma\otimes 1_C}P\otimes C\to A\otimes C\to 0,$$

与图中最后一行比较，立得$\mathrm{Tor}_1(A,C)$与$\mathrm{tor}_1(A,C)$都是$\sigma\otimes 1_c$的核，因而同构。

再考虑图的左上角部分。由于$(1_{A'}\otimes\alpha)\cdot\Delta_1=0$，故$\mathrm{Im}\Delta_1\subseteq\mathrm{Ker}(1_{A'}\otimes\alpha)=\mathrm{Im}\,\delta_1$。类似地有$\mathrm{Im}\,\delta_1\subseteq\mathrm{Im}\Delta_1$。故$\mathrm{Im}\Delta_1=\mathrm{Im}\delta_1$。但$\Delta_1$与$\delta_1$均为单射，故得到$\mathrm{Tor}_1(A,C')\cong\mathrm{tor}_1(A',C)$。再结合前一段的证明，有

$$\mathrm{Tor}_1(A',C)\cong\mathrm{tor}_1(A',C)\cong\mathrm{Tor}_1(A,C')\cong\mathrm{tor}_1(A,C').$$

这样由命题5.7，便得到(其中L_i'的定义类似于L_i)：$\forall n\geqslant 1$,

$$\mathrm{Tor}_{n+1}(A,C)\cong\mathrm{Tor}_1(L_{n-1},C)\cong\mathrm{tor}_1(L_{n-2},L_0')\cong\mathrm{tor}_1(L_{n-3},L_1')$$
$$\cong\cdots\cong\mathrm{tor}_1(L_0,L_{n-2}')\cong\mathrm{tor}_1(A,L_{n-1}')\cong\mathrm{tor}_{n+1}(A,C).\ \blacksquare$$

我们还可以把命题5.3加以改进，即得

命题5.9　取定K、R、S，$C\in{}_S\mathscr{M}$，则下列条件是等价的：

i) C是Zh^R-平坦模；

ii) $\forall A\in{}_R\mathscr{M}$，$\forall n\geqslant 1$，均有$\mathrm{Tor}_n(A,C)=0$；

iii) $\forall A\in{}_R\mathscr{M}$，均有$\mathrm{Tor}_1(A,C)=0$；

iv) 对于R的任何有限生成左理想L，均有$\mathrm{Tor}_1(R/L,C)=0$。

证明　i)⇒ii)即命题5.3。

ii)⇒iii)⇒iv)是当然的。

iv)⇒i) 对${}_R\mathscr{M}$中的正合列$0\to L\to R\to R/L\to 0$，其中L即R的一个有限生成左理想。由长正合列定理及条件iv)，得到${}_{R\otimes S}\mathscr{M}$中正合列

$$0\to L\otimes C\to R\otimes C\to R/L\otimes C\to 0.$$

再由命题3.3立得C是Zh^R-平坦模。$\blacksquare$

命题5.10　取定K、R、S，R作为左R-模是Zh^S-平坦的，S作为左S-模是Zh^R-平坦的。$0\to C'\to C\to C''\to 0$是${}_S\mathscr{M}$中正合列，其中C''是Zh^R-平坦的。如C、C'中有一个是Zh^R-平坦的，则另一个也是Zh^R-平坦的。

证明　如C'是Zh^R-平坦的。$\forall A\in{}_R\mathscr{M}$，由关于$\mathrm{tor}_n(A,\sim)$的长正合列定理，有${}_{R\otimes S}\mathscr{M}$中的正合列

$$\cdots\to\mathrm{tor}_1(A,C')\to\mathrm{tor}_1(A,C)\to\mathrm{tor}_1(A,C'')\to\cdots,$$

但由命题5.8，可以把tor。改写成Tor再由命题5.9，立得前后两项均为0。故$\mathrm{Tor}_1(A,C)=0$。再用一次命题5.9，知C是Zh^R-平坦模。

另一情况类似可证。$\blacksquare$

利用$\sim\otimes C$保持正向极限，因而也保持直和等性质，可以得到$\mathrm{Tor}_n(\sim,C)$保持正向极限直和等性质。但我们不再赘述。

我们定义的Tor函子的一个重要用途就是建立在左模张量积情况下的同调泛系数定理，古典的同调泛系数定理只是它的一个特例。这样就保证了理论的完整性。

定理5.1 取定K、R、S，其中R是左遗传环

$$P=\cdots\to P_{n+1}\xrightarrow{d_{n+1}}P_n\xrightarrow{d_n}P_{n-1}\to\cdots$$

是${}_R\mathscr{M}$中的一个投射复形。$\forall C\in{}_S\mathscr{M}$。${}_{R\otimes S}\mathscr{M}$中的列

$$0\to H_n(P)\otimes C\xrightarrow{\sigma_n}H_n(P\otimes C)\xrightarrow{\pi_n}\mathrm{Tor}_1(H_{n-1}(P),C)\to 0$$

是可裂正合的，而且σ_n、π_n都是自然的。

证明 由n-圈(n-cycles)、n-界(n-boundaries)与第n个同调群(n^{th} homology group)的定义，我们知道$\mathrm{Ker}\,d_n=Z_n(P)$，$\mathrm{Im}\,d_{n+1}=B_n(P)$，$\mathrm{Ker}\,d_n/\mathrm{Im}\,d_{n+1}=H_n(P)$。(以下分别用$Z_n$、$B_n$、$H_n$表示.)而且有${}_R\mathscr{M}$中的两个短正合列：

$$0\to Z_n\xrightarrow{i_n}P_n\xrightarrow{d_n'}B_{n-1}\to 0, \qquad ①$$

$$0\to B_{n-1}\xrightarrow{\sigma}Z_{n-1}\xrightarrow{\pi}H_{n-1}\to 0. \qquad ②$$

其中B_n、Z_n都是R-投射模P_n的子模，而R是左遗传环，故B_n、Z_n也是投射R-模。这样①是可裂的，Z_n是P_n的直和加项。把①、②连接起来，得到一个较长的${}_R\mathscr{M}$中正合列

$$0\to Z_n\xrightarrow{i_n}P_n\xrightarrow{\sigma d_n'}Z_{n-1}\xrightarrow{\pi}H_{n-1}\to 0,$$

这是H_{n-1}的一个投射分解。用函子$\sim\otimes C$作用，得到${}_{R\otimes S}\mathscr{M}$中的复形

$$0\to Z_n\otimes C\xrightarrow{i_n\otimes 1}P_n\otimes C\xrightarrow{d_n''\otimes 1}Z_{n-1}\otimes C\to H_{n-1}\otimes C\to 0. \qquad ③$$

但是$Z_n\otimes C$仍是$P_n\otimes C$的直和加项，$i_n\otimes 1$仍是单射，可把$Z_n\otimes C$与$\mathrm{Im}(i_n\otimes 1)$等同起来。由③计算：

$$\mathrm{Tor}_2(H_{n-1},C)=\mathrm{Ker}(i_n\otimes 1)/\mathrm{Im}\,0=0.$$

$$\mathrm{Tor}_1(H_{n-1},C)=\mathrm{Ker}(d_n''\otimes 1)/\mathrm{Im}(i_n\otimes 1)\cong\mathrm{Ker}(d_n''\otimes 1)/Z_n\otimes C \qquad ④$$

$$\mathrm{Tor}_0(H_{n-1},C)\cong H_{n-1}\otimes C\cong Z_{n-1}\otimes C/\mathrm{Im}(d_n''\otimes 1). \qquad ⑤$$

再由定义，$H_n(P\otimes C)=\mathrm{Ker}(d_n\otimes 1)/\mathrm{Im}(d_{n+1}\otimes 1)$.

注意到d_n与d_n''满足下列可换图

$$\begin{tikzcd}
P_n \arrow[r, "d_n''"] \arrow[dr, "d_n"'] & Z_{n-1} \arrow[d, "i_{n-1}"] \\
 & P_{n-1}
\end{tikzcd}$$

其中i_{n-1}是嵌入映射。由于Z_{n-1}是P_{n-1}的直和加项，$i_{n-1}\otimes 1$也是单射，故有

$$\mathrm{Ker}(d_n\otimes 1)=\mathrm{Ker}(i_{n-1}d''_n\otimes 1)=\mathrm{Ker}((i_{n-1}\otimes 1)(d''_n\otimes 1))=\mathrm{Ker}(d''_n\otimes 1),$$

而且$\mathrm{Im}(d_n\otimes 1)=(i_{n-1}\otimes 1)\mathrm{Im}(d''_n\otimes 1)\cong\mathrm{Im}(d''_n\otimes 1)$。这样在⑤中，可以把$\mathrm{Im}(d''_n\otimes 1)$换成$P_{n-1}\otimes C$的子模$\mathrm{Im}(d_n\otimes 1)$，同时把$Z_{n-1}\otimes C$也看成是$P_{n-1}\otimes C$的子模。⑤可以写成$H_{n-1}\otimes C\cong Z_{n-1}\otimes C/\mathrm{Im}(d_n\otimes 1)$。代换足标得：

$$H_n\otimes C\cong Z_n\otimes C/\mathrm{Im}(d_{n+1}\otimes 1).$$

同样④可以变成$\mathrm{Tor}_1(H_{n-1},C)=\mathrm{Ker}(d_n\otimes 1)/Z_n\otimes C$。

用通常的办法可以验证下列包含关系：

$$\mathrm{Im}(d_{n+1}\otimes 1)\subseteq Z_n\otimes C\subseteq \mathrm{Ker}(d_n\otimes 1)\subseteq P_n\otimes C,$$

注意到$Z_n\otimes C$是$P_n\otimes C$的直和加项，当然也是$\mathrm{Ker}(d_n\otimes 1)$的直和加项，故$Z_n\otimes C/\mathrm{Im}(d_{n+1}\otimes 1)$也是$\mathrm{Ker}(d_n\otimes 1)/\mathrm{Im}(d_{n+1}\otimes 1)$的直和加项。由第三同构定理，有可裂正合列：

$$0\to Z_n\otimes C/\mathrm{Im}(d_{n+1}\otimes 1)\to\mathrm{Ker}(d_n\otimes 1)/\mathrm{Im}(d_{n+1}\otimes 1)\to\mathrm{Ker}(d_n\otimes 1)/Z_n\otimes C\to 0,$$

即　$$0\to H_n(\boldsymbol{P})\otimes C\xrightarrow{\sigma_n}H_n(\boldsymbol{P}\otimes C)\xrightarrow{\pi_n}\mathrm{Tor}_1(H_{n-1}(\boldsymbol{P}),C)\to 0.$$

验证σ_n、π_n的自然性是机械而繁琐的，从略。▊

推论1　如R是半单环，$\boldsymbol{P}$是$_R\mathscr{M}$中任一复形，$\forall C\in{}_S\mathscr{M}$，则有自然的同构：

$$H_n(\boldsymbol{P})\otimes C\cong H_n(\boldsymbol{P}\otimes C).\qquad\forall n.$$

事实上，任何R-模均投射，任何S-模C是Zh^R-平坦的。故由命题5.9与本定理立得。

特别当$R=S=K$为域时，就得到熟知的

推论2　[4: Corollary 8.24] 如$\boldsymbol{P}$是域R上向量空间的复形，V是R上任一向量空间，则$\forall n$，有：

$$H_n(\boldsymbol{P}\otimes_R V)\cong H_n(\boldsymbol{P})\otimes_R V.$$

本文是在周伯壎教授的指导下完成的。严栋开教授、丁石孙教授、佟文庭付教授详细地审阅了本文的初稿，并提出了很多宝贵的意见。作者谨在此致谢。

参　考　文　献

[1]　周伯壎：左环模的张量积与范畴．南京大学学报，自然科学版 I (1979)．
[2]　N. Jacobson: Structure of Rings (1956).
[3]　周伯壎：左模的张量积与同调维数．数学研究与评论，创刊号 (1981)．
[4]　J. J. Rotman: An Introduction to Homological Algebra. (1979).

On the Functor of the Tensor Product of Left Modules (Ⅱ)

Hu Shuan

(Nanking University)

Abstract

In §4, we went on to discuss on Zh^R-flat module. We obtain twelve equivalent relations on the projective, injective, flat and Zh^R-flat modules. This says that the concept of the Zh^R-flat module introduced is natural.

In §5, we define the *nth* left derived functors of $\sim\otimes C$, written as $\mathrm{Tor}_n(\sim, C)$, Some fundamental properties of $\mathrm{Tor}_n(\sim, C)$ are showed. At the end of this paper we prove the Universal Coefficient Theorem for Homology in the case of the tensor product of left modules; if R is a left hereditary ring, $\mathbf{P}$ is a projective complex in ${}_R\mathscr{M}$, $\forall C\in {}_S\mathscr{M}$, then there exists a split exact sequence

$$0\to H_n(\boldsymbol{P})\otimes C\xrightarrow{\sigma_n}H_n(\boldsymbol{P}\otimes C)\xrightarrow{\pi_n}\mathrm{Tor}_1(H_{n-1}(\boldsymbol{P}),C)\to 0,$$

where σ_n and π_n are natural. The classical result is its corollary.