第3卷 第2期 1983年4月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.3 No.2 Apr. 1983

拓扑分子格的分离公理*

王国俊

（陕西师范大学数学系）

§1 引　　言

在〔1〕中我们建立了拓扑分子格的理论，它既是古典的点集拓扑学的推广，又是晚近发展起来的Fuzzy拓扑学的推广，对于某些Fuzzy格L（如L是线性序集或L是分子格等），它也是L—Fuzzy拓扑学的推广．因此，凡在拓扑分子格中得到的结果自然都是上述各种拓扑学中相应定理的一般化形式．在本文中我们将讨论拓扑分子格的分离公理．

我们熟知点集拓扑学中的分离公理有多种不同的等价形式．以正则性为例，设X是拓扑空间，X叫正则的，当且仅当对每个点$a\in X$以及a的每个开邻域U，a有开邻域V满足条件$V^-\subset U$．这一分离公理又可表述为：设$a\in X$，F是X中不包含a的闭集，则有开集P与Q满足条件$a\in P$，$F\subset Q$且$P\cap Q=\emptyset$．上述两种表述是等价的，因为V与$V^{-\prime}$就分别相当于P和Q．但是在Fuzzy拓扑学中，由于一个Fuzzy子集A与其补集A'的交可以不等于O，$A\wedge B=O$与$A\leqslant B'$一般不等价等原因，以上两种表述不再是等价的了．另一方面，鉴于点集拓扑学中各分离公理已被长期使用并被公认为是恰当的，Fuzzy拓扑工作者自然要以这些熟知的分离公理为兰本来建立Fuzzy分离公理，事实上，早在1975年B. Hutton就引入了Fuzzy正规性概念[2]，不久又在另一文章中引入了Fuzzy完全正则性概念[3]．这些分离性及其特征的刻划是与点集拓扑学中一种传统的方法完全平行的．1977年，蒲保明与刘应明首次引入了Fuzzy准T_0、T_0、T_1与T_2分离公理的概念[4]，并基于“重域”概念对这些分离性进行了系统的讨论，因而有其Fuzzy的特色．一些后继的文章指出这些分离性的定义是恰当的．如作者在[5]中证明了上述T_2分离性属于“好的推广”(good extension)[6]．但正如前面所说的，从不同的角度来推广点集拓扑学中的同一分离公理可以得出不同的Fuzzy分离公理，所以近年来出现大量的与Fuzzy分离性有关的文章，它们往往给出截然不同的同一称号的Fuzzy分离公理（参见〔7〕)．最近B. Hutton又发表一篇不涉及Fuzzy点的概念而定义各种Fuzzy分离性的文章[8]，其定义与前此的各定义自然也不尽相同．不过我们认为这并不意味着Fuzzy分离性的混乱，恰恰相反，我们相信经过一番如此热烈的讨论，那些不恰当的东西会被淘汰，而最终会肯定那些最合用的分离公理．比如，最近刘应明在他的论文〔9〕中给出了Fuzzy完全正则性的一种点式刻划，从而建立了重要的嵌入定理．这就进一步肯定并发展了〔3〕中的Fuzzy完全正则性理论．我们相信对其它的分离性而言，也会逐渐走向统一的．

* 1981年8月27日收到．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

§2 基本概念

为行文方便计，我们把本文中要用到的基本概念简述于下，详见[1].

1. 分子格* 设L是一具有逆序对合对应“′”的完全分配格，具有最小元0与最大元1．若L有子集π满足条件

① $0\notin\pi$.

② $a,b\in\pi$, $a\wedge b\neq 0\Rightarrow a\leqslant b$ 或 $b\leqslant a$.

③ $a,b,c\in\pi$, $a\leqslant c, b\leqslant c\Rightarrow a\wedge b\neq 0$.

④ 对任一$A\in L$, $A=\bigvee\{a|a\in\pi,\ a\leqslant A\}$.

⑤ 设π_0是π的线性有序子集，则$\bigvee\{a|a\in\pi_0\}\in\pi$.

则称L为分子格，记作$L(\pi)$，或简记为L．π中的元称为分子或简称为点．当点$a\leqslant A$时，称a为A中的点，这里A是L中的任意元．

设a是A中的点，如果对A中任一点b，当$a\wedge b\neq 0$时$b\leqslant a$，则称a为A的成分．1的成分称为L中的极大点，一切极大点之集记作π^*．包含点a的极大元记作m_a．当$a\in\pi\backslash\pi^*$时，记$m_a\wedge a'$为ca，并称ca为a的对点．

设L是分子格，如果对$A,B\in L$，当$A\wedge B=0$时有$A\leqslant B'$，则称L为正统分子格．如I^X就是正统分子格，这里$I=[0,1]$，X是非空分明集．

设$L(\pi)$是分子格，$a\in\pi$．如果$0\neq b\leqslant a$时有$b=a$，则称a为L的原子．如果每个分子都是原子，则称$L(\pi)$为原子格．分明集X的幂集2^X就是原子格的例子．

设L是分子格，如果L的每个分子都可表示为较小分子之并，则称L为密分子格．I^X就是密分子格的例子．但原子格不是密分子格．

2. 拓扑分子格 设L是分子格，$\mathscr{T}$是L中若干元之集．如果$\mathscr{T}$对有限交和任意并关闭并且$0,1\in\mathscr{T}$，则称$\mathscr{T}$为L上的一个拓扑，称$(L,\mathscr{T})$为拓扑分子格．

当$L=2^X$时，$(L,\mathscr{T})$是普通的点集拓扑空间；当$L=I^X$时，$(L,\mathscr{T})$是Fuzzy拓扑空间．

设$(L(\pi),\mathscr{T})$是拓扑分子格，$a\in\pi$，P是闭元且$a\nleqslant P$，则称P为点a的远域．a的一切远域之集构成一个理想基，记作$\eta(a)$．设$A\in L$．P是闭元，若对A的每个成分a，$P\in\eta(a)$，则称P为A的远域．A的一切远域之集记作$\eta(A)$．

对于$L=[0,1]$的情形，设P是a的远域，则P'就是a的开重域[4]，反之亦然．在拓扑分子格中，远域将像重域一样起着基本的作用（参看[1]）．

§3 T 分离性

3.1 定义 设$L(\pi)$是拓扑分子格．如果当$a\in\pi$，$b\in\pi$且$b<a$时，a有远域包含b，则称$L(\pi)$为T_{-1}分子格．

显然，拓扑原子格是T_{-1}的．

3.2 定理 设$L(\pi)$是拓扑分子格．为使$L(\pi)$是T_{-1}的，必须且只须对每个$a\in\pi$，a是a^-的成分．

* 国外也把这种格称作Fuzzy格或简称Fuzz．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

证　设 $L(\pi)$ 是拓扑分子格，每个点都是它的包的成分。设 $a,b\in\pi$，$b<a$。因为 b 是 b^- 的成分，b^- 是 a 的包含 b 的远域，所以 $L(\pi)$ 是 T_{-1} 的。反之，设 $L(\pi)$ 是 T_{-1} 的，$a,b\in\pi$，$a<b$，则 b 有远域包含 a，所以 $b\nleqslant a^-$。因此当 $c\leqslant a^-$ 且 $c\wedge a\neq 0$ 时 $c\leqslant a$，所以 a 是 a^- 的成分。

3.3 定理　设 $L(\pi)$ 是拓扑正统分子格，则为使 $L(\pi)$ 是 T_{-1} 的，必须且只须每个分子都是某开元的成分。

证　设 $L(\pi)$ 是 T_{-1} 的正统分子格，$a\in\pi$。如果 $a\in\pi^*$，则 a 是开元 1 的成分；如果 $a\in\pi\backslash\pi^*$，则由前一定理，a 的对点 ca 是 $(ca)^-$ 的成分，所以由[1]中定理 1.2.8 知 $a=c(ca)$ 是开元 $(ca)^{-\prime}$ 的成分。反之，设 $L(\pi)$ 不是 T_{-1} 的，则有 $a\in\pi$，a 不是 a^- 的成分，但 a^- 是一切包含 a 的闭元之交，所以 a 也不能是任何闭元的成分，这时自然 $a\notin\pi^*$，所以 a 的对点 ca 存在，它不是任何开元的成分。

3.4 定理　设 $L(\pi)$ 是拓扑密分子格，则为使 $L(\pi)$ 是 T_{-1} 的，必须且只须每个分子含于其各远域之并。

证　设 $L(\pi)$ 是拓扑密分子格，且每个分子都含于其各远域之并．设 $a,b\in\pi$ 且 $b<a$．以 $\eta_0(a)$ 记 $\eta(a)$ 中与 a 之交不为 O 的远域之集，则 $a\leqslant\vee\eta_0(a)$。对每个 $P\in\eta_0(a)$，令 $a_p=a\wedge P$，则 $a_p\in\pi$ 且 $a=a\wedge(\vee\eta_0(a))=\vee\{a_p|P\in\eta_0(a)\}$。这时由 $a_p\leqslant a$ 及 $b<a$ 知 $a_p\wedge b\neq 0$。如果每个 $a_p<b$ $(P\in\eta_0(a))$，则 $a\leqslant b$，此为不可能。所以必有 $P\in\eta_0(a)$ 使 $b\leqslant a_p$，这时 $b\leqslant P$，所以 $L(\pi)$ 是 T_{-1} 的。反之，设 $L(\pi)$ 是 T_{-1} 的拓扑密分子格，$a\in\pi$。以 π_1 记一切小于 a 的点之集，则 $a=\vee\pi_1$。因为 $L(\pi)$ 是 T_{-1} 的，对每个 $b\in\pi_1$，有 $P_b\in\eta(a)$ 使 $b\leqslant P_b$。这时 $a\leqslant\vee\{P_b|b\in\pi_1\}$。所以 $a\leqslant\vee\eta(a)$。

3.5 定义　设 $L(\pi)$ 是拓扑分子格。如果当 $a,b\in\pi$ 且 $a\neq b$ 时，a 有远域包含 b 或 b 有远域包含 a，则称 $L(\pi)$ 为 T_0 分子格。

设 $L(\pi)$ 是 T_0 分子格，$a,b\in\pi$ 且 $b<a$。因为这时 b 的远域一定不含 a，所以 a 必有远域包含 b，因此 $L(\pi)$ 是 T_{-1} 的。即 $T_0\Rightarrow T_{-1}$。

下面的定理是显然的：

3.6 定理　设 $L(\pi)$ 是拓扑分子格。为使 $L(\pi)$ 是 T_0 的，必须且只须当 $a,b\in\pi$ 且 $a\neq b$ 时有 $a\nleqslant b^-$ 或 $b\nleqslant a^-$。

最近，刘应明在[9]中针对不分明单位区间的特性在 L-不分明拓扑空间中引入了所谓次 T_0 分离性。容易验证，对 $L=[0,1]$ 等情形，$T_0\Rightarrow$ 次 T_0。

3.7 定义　设 $L(\pi)$ 是拓扑分子格。如果当 $a,b\in\pi$ 且 $a\nleqslant b$ 时，a 有远域包含 b，则称 $L(\pi)$ 为 T_1 分子格。

T_1 分子格自然是 T_0 的。即 $T_1\Rightarrow T_0$。

3.8 定理　设 $L(\pi)$ 是拓扑分子格。为使 $L(\pi)$ 是 T_1 的，必须且只须每个分子都是闭元。

证　设 $L(\pi)$ 是拓扑分子格且每个分子都是闭元。则当 $a\nleqslant b$ 时 b 就是 a 的包含 b 的远域。反之，若 $a\nleqslant b$ 时 a 有远域包含 b，则 a 不是 b 的附着点[1]，即 b 的附着点都在 b 中，所以 b 是闭元。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

最近，B. Hutton 在[8]中引入的 T_1 分离性的特征之一是：L 中每个元都可表示为闭元之并。我们记这种分离性为 T_1^H。因为 L 中一切元都可表示为分子之并，所以由定理 3.8 知 $T_1 \Rightarrow T_1^H$。

由定理 3.8 以及[1]中推论 2.2.8 得：

3.9 推论 在 T_1 分子格中每个元的导元都是闭元。

3.10 定理 设 $L(\pi)$ 是拓扑正统分子格，则为使 $L(\pi)$ 是 T_1 的，必须且只须 $L(\pi)$ 是 T_{-1} 的且对任意的 $a,b\in\pi$，$a\wedge b=0$，有开元 U 满足 $a\leqslant U$ 和 $b\wedge U=0$。

证 设 $L(\pi)$ 是 T_1 正统分子格，则 $L(\pi)$ 是 T_{-1} 的。设 $a,b\in\pi, a\wedge b=0$，则 $m_a\wedge m_b=0$。因为 m_b 是闭元，所以 $U=m_b'$ 是开元。因为 $L(\pi)$ 是正统的，$a\leqslant m_a\leqslant U$，且 $b\wedge U\leqslant m_b\wedge m_b'=0$。反之，设定理条件成立，$a,b\in\pi$ 且 $a\nleqslant b$。这时 $a>b$ 或 $a\wedge b=0$。设 $a>b$，因为 $L(\pi)$ 是 T_{-1} 的，a 有远域包含 b。设 $a\wedge b=0$，则 $m_a\wedge m_b=0$。取开元 U 使 $m_a\leqslant U$，$m_b\wedge U=0$ 并令 $P=U'$，则 P 是闭元。因为 $L(\pi)$ 是正统的，$b\leqslant m_b\leqslant U'=P$。又由 $m_a\leqslant U$ 得 $U'\leqslant m_a'$。所以 $a\wedge P\leqslant m_a\wedge U'\leqslant m_a\wedge m_a'=0$。因此 P 是 a 的远域。总之，在 $a\nleqslant b$ 时 a 有远域包含 b，所以 $L(\pi)$ 是 T_1 的。

由定理 3.3 和 3.10 得：

3.11 推论 在 T_1 正统分子格中，每个分子都可表示为开元之交。

3.12 定义 设 $L(\pi)$ 是拓扑分子格。如果当 a，$b\in\pi$ 且 $a\wedge b=0$ 时，a,b 分别有远域 P，Q 使 $P\vee Q=1$，则称 $L(\pi)$ 为 T_2 分子格。

3.13 定理 设 $L(\pi)$ 是拓扑分子格。为使 $L(\pi)$ 是 T_2 的，必须且只须对每个分子网 S，网 S 的所有极限点的并 $\lim S$ 最多只含一个成分。

证 设 $S=\{s_n, n\in D\}$ 是 $L(\pi)$ 中的分子网，a 与 b 是 $\lim S$ 的两个不同的成分。任取 $P\in\eta(a)$，$Q\in\eta(b)$。因为易知 $S\to a$，$S\to b$，所以有 $n_1,n_2\in D$，使当 $n\geqslant n_1$ 时 $s_n\nleqslant P$，$n\geqslant n_2$ 时 $s_n\nleqslant Q$。取 $n_0\in D$ 使 $n_0\geqslant n_1$，$n_0\geqslant n_2$，则当 $n\geqslant n_0$ 时 $s_n\nleqslant P\vee Q$，所以 $P\vee Q\neq 1$，$L(\pi)$ 不是 T_2 分子格。反之，设 $L(\pi)$ 不是 T_2 分子格，则有 $a,b\in\pi$，$a\wedge b=0$，对任一 $P\in\eta(a)$ 和 $Q\in\eta(b)$ 都有 $P\vee Q\neq 1$。这时有 $e\in\pi$ 使 $e\nleqslant P\vee Q$。记此 e 为 $s_{(P,Q)}$。由[1]中定理 2.2.3 知 $\eta(a)$ 与 $\eta(b)$ 都是定向集，因此 $D=\eta(a)\times\eta(b)$ 也是定向集。令 $S=\{s_{(P,Q)}, (P,Q)\in D\}$，则 $a,b\in\lim S$ 而 $a\wedge b=0$，所以 $\lim S$ 的成分多于 1 个。

3.14 定理 如果拓扑分子格 $L(\pi)$ 是 T_2 的和 T_{-1} 的，则 $L(\pi)$ 也是 T_1 的。

证明略。

3.15 定理 设 $L(\pi)$ 是 T_2 正统分子格，则对任意的 $a,b\in\pi\backslash\pi^*$，当 $a\wedge b=0$ 时有开元 U 和 V 满足 $a<U$，$b<V$ 且 $U\wedge V=0$。

证 设 $L(\pi)$ 是 T_2 正统分子格，$a,b\in\pi\backslash\pi^*$ 且 $a\wedge b=0$，则点 ca 与 cb 存在且 $ca\wedge cb=0$。取 $P\in\eta(ca)$，$Q\in\eta(cb)$ 使 $P\vee Q=1$。令 $U=P'$，$V=Q'$，则 U,V 是开元且 $U\wedge V=0$。因为 $ca\nleqslant P$，所以由[1]中定理 1.2.8 得 $a=c(ca)<P'=U$。同理可证 $b<V$。

作者在下面的定理中原要求 $(L(\pi),\mathscr{T})$ 为 T_2 密正统分子格，后经四川大学刘应明教授指出“密”的条件是不必要的，且比作者多考虑了 $a\in\pi^*$ 的情形。现在的定理及其证明是由刘应明给出的，即

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

3.16 定理　设 $(L(\pi),\mathscr{T})$ 是 T_2 正统分子格，则对任一 $a\in\pi-\pi^*$，或 $a\in\pi^*$ 但 a 不能表作 $\vee\{b\in\pi\mid b<a\}$ 的形式，则

$$\wedge\{U^-\mid a\leqslant U,U\in\mathscr{T}\}\leqslant m_a.$$

证　记 $A=\wedge\{U^-\mid a\leqslant U,U\in\mathscr{T}\}$。设 A 有成分 b 满足 $b\wedge a=0$。先讨论 $a\notin\pi^*$ 的情形。此时 ca 存在且显然 $ca\wedge b=0$。由 T_2 性，ca 与 b 有各自的远域 P 与 Q 使 $ca\not\leqslant P$，$b\not\leqslant Q$ 且 $P'\wedge Q'=0$。因为 $b\not\leqslant Q$，自然 $m_b\wedge Q<b$。同理可证 $m_a\wedge P<ca$。现在 $P'\wedge m_a=(P'\vee m_a')\wedge m_a=(P\wedge m_a)'\wedge m_a>(ca)'\wedge m_a=a$，即 P' 是含 a 之开元，故 $A\leqslant P'^-$。另一方面，$P'\wedge Q'=0$。由正统性得 $P'\leqslant(Q')'=Q$，即 $P'^-\leqslant Q^-=Q$。于是有

$$b=A\wedge m_b\leqslant P'^-\wedge m_b\leqslant Q\wedge m_b<b,$$

即 $b<b$，矛盾！

关于 $a\in\pi^*$ 的情形。令

$$\tilde{a}=\vee\{b\in\pi\mid b<a\},$$

则由定理的假设条件知 $\tilde{a}<a$。那么在上述讨论中将 a 代之以 $\tilde{a}$，ca 代之以 $c\tilde{a}$，就可类似地进行证明，唯一不同的是应注意由 $P'\wedge m_{\tilde{a}}>\tilde{a}$ 及 $\tilde{a}$ 是一切小于 a 的元中之最大者，那么 $P'\wedge m_{\tilde{a}}=a$。所以通过同样的推理可知 P' 是包含 a 的开元，从而得 $A\leqslant P'^-$。以下证明与第一段全同。

下面我们给出 T_3 与 T_4 分子格的定义。

3.17 定义　设 $(L(\pi),\mathscr{T})$ 是拓扑分子格。如果对每个 $a\in\pi$ 和 $A\in\mathscr{T}'$，当 $a\wedge A=0$ 时有 $P\in\eta(a)$，$Q\in\eta(A)$ 使 $P\vee Q=1$，则称 $(L(\pi),\mathscr{T})$ 为 T_3 分子格。如果对任意的 A，$B\in\mathscr{T}'$，当 $A\wedge B=0$ 时有 $P\in\eta(A)$，$Q\in\eta(B)$ 使 $P\vee Q=1$，则称 $(L(\pi),\mathscr{T})$ 为 T_4 分子格。

显然，$T_3+T_1\Rightarrow T_2$，$T_4+T_1\Rightarrow T_3$。

关于拓扑分子格的 T 分离性，容易证明下面的定理

3.18 定理　设 L 是拓扑分子格，$L|E$ 是其拓扑子格[1]。则当 L 是 T_{-1}，T_0，T_1，T_2 或 T_3 分子格时，$L|E$ 相应地也是同类型的分子格。

至于 T_4 分子格，由于对分明拓扑空间而言，T_4 空间的子空间不必是 T_4 的，所以其拓扑子格也不必是 T_4 的。

§4　T^* 分离性

4.1 定义　设 L 是分子格，$A,B\in L$。如果 $A\leqslant B'$，则称 A 与 B 是准分离的。

4.2 注意　①　设 $A\leqslant B'$，则 $A'\geqslant(B')'$，即 $B\leqslant A'$，且反之亦然。所以 A 与 B 准分离等价于 B 与 A 准分离。

②　在正统分子格中，设 A 是中元[1]，则 A 与 A 是准分离的。

③　在正统分子格中，设 $A\wedge B=0$，则 A 与 B 是准分离的。但反之不真，如②所示。

④　在正统分子格中，设 A 是极大元[1]，则由 [1] 中定理 1.2.6 知 A 与 B 是准分离的当且仅当 $A\wedge B=0$。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

⑤ 在正统分子格中，如果a是A的成分，则ca与A是准分离的。事实上，因为a是A的成分，$a=m_a\wedge A$。所以$ca=a'\wedge m_a=(m_a\wedge A)'\wedge m_a=(m_a'\vee A')\wedge m_a=A'\wedge m_a\leqslant A'$。

4.3 定义 设$(L,\mathscr{T})$是拓扑分子格，$A\in L$，$U\in\mathscr{T}$且$A\leqslant U$，则称U为A的开邻域。

4.4 定义 设$L(\pi)$是拓扑分子格。如果当a，$b\in\pi$且a与b准分离时，a有与b准分离的开邻域或b有与a准分离的开邻域，则称$L(\pi)$为T_0^*分子格。

T_0拓扑空间作为拓扑分子格是T_0^*的。

4.5 定理 设$L(\pi)$是拓扑正统分子格，则为使$L(\pi)$是T_0^*的，必须且只须下面两个条件成立：

① 当$a,b\in\pi^*$且$a\wedge b=0$时，a有开邻域U_a与b不相交，或b有开邻域U_b与a不相交。

② 对任一$a\in\pi\backslash\pi^*$，a是某开元的成分或ca是某开元的成分。

证 充分性 设条件①与②成立，a与b是准分离的二点，如果$a\wedge b=0$，则$m_a\wedge m_b=0$。由条件①知，比如，m_a有开邻域U_a与b不相交。这时U_a是a的与b准分离的开邻域。如果$a\wedge b\neq 0$，则由a与b准分离以及[1]中定理1.2.6知$a\in\pi\backslash\pi^*$，$b\in\pi\backslash\pi^*$。由条件②，比如，a是某开元U_a的成分，这时$a\leqslant U_a$且$ca\leqslant U_a'$。但$b\leqslant a'$且$b\leqslant m_a$，所以$b\leqslant a'\wedge m_a=ca\leqslant U_a'$，即$U_a$是$a$的与$b$准分离的开邻域。

必要性 由注意4.2④知条件①是必要的。今设$a\in\pi\backslash\pi^*$。则$ca=a'\wedge m_a\leqslant a'$，即$a$与$ca$是准分离的。由$L(\pi)$的$T_0^*$分离性，不妨设有开元$U_a$满足$a\leqslant U_a$和$ca\leqslant U_a'$。这时$a$必为$U_a$的成分。事实上，如果不然，则$U_a$有成分$b$使$a<b\leqslant U_a$。这时$cb$是$U_a'$的成分。但这与$cb<ca\leqslant U_a'$相矛盾！

因为A是开元当且仅当A'是闭元，且由[1]中定理1.2.8知a是A的成分等价于ca是A'的成分，所以上面的定理还可叙述为

4.6 定理 设$L(\pi)$是拓扑正统分子格。则为使$L(\pi)$是T_0^*的，必须且只须下面的两个条件成立：

① 当$a,b\in\pi^*$且$a\wedge b=0$时，有闭元P_a满足$a\leqslant P_a$且$P_a\wedge b=0$或有闭元P_b满足$b\leqslant P_b$且$P_b\wedge a=0$。

② 对任一$a\in\pi\backslash\pi^*$，a是某闭元的成分，或ca是某闭元的成分。

4.7 定义 设$L(\pi)$是拓扑分子格。如果当$a,b\in\pi$且a与b准分离时a有开邻域U_a与b准分离，则称$L(\pi)$为T_1^*分子格。

T_1^*分子格自然是T_0^*的。

和上面类似，可以证明下面的定理

4.8 定理 设$L(\pi)$是拓扑正统分子格，则为使$L(\pi)$是T_1^*的，必须且只须下面两个条件成立：

① 当$a,b\in\pi^*$且$a\wedge b=0$时，有开元U_a（闭元P_a）满足$a\leqslant U_a(a\leqslant P_a)$和$U_a\wedge b=0$ $(P_a\wedge b=0)$。

② 当$a\in\pi\backslash\pi^*$时，a是某开元（闭元）的成分。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

4.9 定理　设 $L(\pi)$ 是拓扑正统分子格，则为使 $L(\pi)$ 是 T_1^* 的，必须且只须 $L(\pi)$ 是 T_1 的。

证　只须证明 $L(\pi)$ 是 T_1^* 的当且仅当每个分子都是闭元。由定理 4.8 直接看出，当每个分子都是闭元时 $L(\pi)$ 是 T_1^* 的。反之，设 $L(\pi)$ 是 T_1^* 的，$a\in\pi$。如果 $a\in\pi^*$，则由定理 4.8 的①知 a 可表示为若干闭元之交，从而是闭的。如果 $a\in\pi\setminus\pi^*$，则由定理 4.8 的②知 a 是某闭元 P 的成分。这时 $a=P\wedge m_a$，所以仍是闭元。

4.10 定义　设 $L(\pi)$ 是拓扑分子格。如果对任意的 $a,b\in\pi$，当 a 与 b 准分离时 a 与 b 有准分离的开邻域，则称 $L(\pi)$ 为 T_2^* 分子格。

T_2^* 分子格自然是 T_1^* 的。

与定理 4.5 类似，可以证明

4.11 定理　设 $L(\pi)$ 是拓扑正统分子格，则为使 $L(\pi)$ 是 T_2^* 的，必须且只须下面的两个条件成立：

① 当 $a,b\in\pi^*$ 且 $a\wedge b=0$ 时，a 有开邻域 U_a 满足 $U_a^-\wedge b=0$。

② 当 $a\in\pi\setminus\pi^*$ 时，a 是它的某开邻域的包的成分。

4.12 推论　在 T_2^* 正统分子格中，每个分子都等于其一切开邻域的包的交。

B. Hutton 在［8］中定义 T_2 分离性如下：

T_2^H：L 中每个元 U 可表示为 $U=\bigvee_i\bigwedge_{j\in J_i}U_{ij}=\bigvee_i\bigwedge_{j\in J_i}U_{ij}^-$。这里 U_{ij} 是开元。

由推论 4.12 不难验证 $T_2^*\Rightarrow T_2^H$。

4.13 定义　设 $L(\pi)$ 是拓扑分子格。如果对每个 $a\in\pi$ 和闭元 P，当 a 与 P 准分离时 a 与 P 各有彼此准分离的开邻域，则称 $L(\pi)$ 为 T_3^* 分子格。

显然，T_3^* 分子格若是 T_1 的，则也是 T_2^* 的。

4.14 定理　设 $L(\pi)$ 是拓扑分子格，则为使 $L(\pi)$ 是 T_3^* 的，必须且只须对每个 $a\in\pi$ 和 a 的任一开邻域 U，a 有开邻域 V 满足 $V^-\leqslant U$。

证明略。

［8］中称 L 为正则的当且仅当每个开元都是若干开元的闭包之并。容易验证 T_3^* 分离性蕴含这种正则性。

4.15 定理　在 T_3^* 正统分子格中，每个闭元都等于它的一切开邻域的包之交。

4.16 定义　设 L 是拓扑分子格。如果每两个准分离的闭元都有彼此准分离的开邻域，则称 L 为 T_4^* 分子格。

显然，T_4^* 分子格若是 T_1 的，则也是 T_3^* 的。

不难证明下述定理

4.17 定理　设 L 是拓扑分子格，则为使 L 是 T_4^* 的，必须且只须对任一闭元 A 和 A 的开邻域 U，A 有开邻域 V 满足 $V^-\leqslant U$。

由此定理易知 T_4^* 分离性等价于［8］中的正规性。

4.18 定理　设 L 是拓扑分子格，$L|E$ 是其拓扑子格。则当 L 是 T_0^*，T_1^*，T_2^* 或 T_3^*，时，$L|E$ 相应地也是同类型的分子格。

当然 T_4^* 分子格的拓扑子格不必是 T_4^* 的。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

参 考 文 献

〔1〕 王国俊，拓扑分子格，陕西师大学报（自然科学版，1979），1—15.

〔2〕 Hutton, B., Normality in fuzzy topological spaces, J. Math. Anal. Appl., 50 (1975), 74—79.

〔3〕 Hutton, B., Uniformities On fuzzy topological spaces, ibid, 58 (1977), 559—571.

〔4〕 蒲保明与刘应明，不分明拓扑学 I— 不分明点的邻近构造与 Moore—Smith 式收敛，四川大学学报（自然科学版，1977），1，31—50. 或 J. Math. Anal. Appl. 76 (1980), 571—599.

〔5〕 王国俊，一种比较理想的 Fuzzy 紧性，模糊数学，2 (1982)，1:11—22.

〔6〕 Lowen, R., A comparison of different compactness in fuzzy topological spaces, J. Math. Anal. Appl., 64 (1978), 446—454.

〔7〕 金长泽，不分明拓扑学的某些发展概况，东北师大学报（自然科学版）2 (1981)，53—67.

〔8〕 Hutton, B. and Reilly, I., Separation axioms in Fuzzy topological spaces, Fuzzy sets and Systems, 3 (1980), 93—104.

〔9〕 刘应明，不分明拓扑空间中完全正则性的点式刻划与嵌入定理，中国科学，A辑，1982，8:675—682.

Separation Axioms in Topological Molecular Lattices

Wang Guojun

Abstract

In this paper two classes of separation axioms (T_i and T_i^*) are introduced in topological molecular lattices (TML)[1], and some of their characterizations are discussed. T_i and T_i^* separation axioms in TML are both generalizations of T_i separation axiom in general topological spaces and in some fuzzy topological spaces as well.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.