第3卷 第2期
1983年4月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.3 No.2
Apr. 1983

一些非交换的亚直不可约环*

傅昶林

（哈尔滨科技大学）

如果一个环，它的所有非零理想之交为一个非零理想，就称之为亚直不可约的。由于有著名的“每个环都同构于由一组亚直不可约环所成的亚直和”定理，而且它不需附加任何链条件，所以亚直不可约环的应用是非常广泛的。因而研究它就成为特别重要的了。

对于交换的亚直不可约环，Birkhoff、McCoy 和 Divinsky 等已经作了大量的研究，较为清楚地了解了这类环。本文试图把他们研究的几个结果推广到某些非交换环上去。

本文是在我的老师谢邦杰教授热诚帮助下写成的。对他的热情关怀和辛勤劳动，作者在此表示感谢。

文中若不特别声明，则用R表示一般的环，Z表示环R的中心，L表示R的一切非零左理想的交集。J表示亚直不可约环的极小非零理想(它是R的一切非零理想之交,自然是唯一的。)，A_l、A_r分别表示集合A的左、右零化子，$(x|$、(x) 分别表示元素x生成的左理想和双边的理想。

（一）亚直不可约环为除环的充要条件及亚直不可约环的分类

对于交换的亚直不可约环，Birkhoff 首先证明了“设R为亚直不可约交换环，如果R没有非零的幂零元素，则R必为域”[1]，其后 McCoy 和 Divinsky 又据此把亚直不可约环作了分类，并进行了一系列深入的研究。

但是，上述定理及分类法，对于任意的亚直不可约环，并不能适用。

首先，非交换的亚直不可约环，即使没有非零的幂零元素，也不见得是除环。

在[2]中给出了这样一个例子（例8）：

设R为所有关于x的多项式$\alpha_0+x\alpha_1+\cdots+x^m\alpha_m$所成的集合。其中系数$\alpha_i$是以$y$为变元的实系数有理函数。多项式的加法按通常方式规定，乘法则除x与系数α_i不能交换而规定$\alpha x=x\alpha+\alpha$外，不作其它变动。

该例指出了：R的每个左理想都有$Rf(x)$形式，而右理想都具有$h(x)R$的形式，因而具有左、右理想升链条件，它有1，因而$z\neq 0$，它是个单环，不含非零零因子，但却不是除环。

抛开此例的本来用意，它说明了在一般情况下，没有非零幂零元素的亚直不可约环，即使在很强的条件下，仍未必是除环。因此，这样类型的亚直不可约环，是不能被原有的对交换情况的分类所包括的。

* 1981年8月6日收到。

我们还可以举出一些非交换的亚直不可约环，它虽然有非零的幂零元素，但却没有非零的幂零理想。

于是，自然要提出问题：哪些亚直不可约环才是除环？对一般的亚直不可约环应该怎样分类？

这里将给出一些亚直不可约环为除环的充要条件，其中包括了对 Birkhoff 定理的不同形式的推广，并对亚直不可约环的分类作初步探讨。

首先，我们有

引理 1　设 R 为亚直不可约环。如果 R 中有非零零因子，则必有非零幂零元素。

推论　设亚直不可约环 R 满足左理想降链条件。如果 R 中无非零的幂零元素，则 R 必为除环。

为叙述方便，我们引入下面的定义：

定义 1　若在环 R 内，有非零理想 B 存在，使 B 中 R 的任一左（右）理想，均为双边理想，则 R 称为局部左（右）双环，理想 B 叫做 R 的子左（右）双环。若 R 既为局部左双环，又为局部右双环，则称 R 为局部双环。B 称为 R 的子双环。

当存在一个子左（右）双环 $B=R$ 时，R 即为（非局部的）左（右）双环。

定义 2　设 R 为亚直不可约环。如果对任一非零元素 a，集合 Ra（aR）或者为零，或者包含 J 中一确定的非零元素 j（j 与 a 无关），则称 R 是满足左（右）F-条件的，若有 J 中非零元素 j，使所有非零的 Ra、aR、均包含 j，则称 R 满足双边 F-条件。

满足上述条件的元素 j，一般说来不是唯一的，但只要有一个 $j\in Z$，则说 R 是满足 F-条件的 Z 环。

这里指出，若环 R 的一切非零左理想之交 $L\neq 0$，则 R 必满足左 F-条件。因为，若 $Ra\neq 0$，显然 $Ra\supset L$。又 $L\subset J$，由 $L\neq 0$ 和 R 为亚直不可约的。有 $j\in L\subset J$。使 $Ra\supset j$。

此外，对局部左双环 R，如果存在子双环 B，使 $B_r=R_r$，则 R 必满足左 F-条件。这样的局部左双环是容易找到的，例如，若在子双环 B 中有非左零因子时，必有 $R_r=B_r=0$。由于在上述情况下，Ra 与 Ba 同时为零或同时不为零。于是，当 $Ra\neq 0$ 时，就有 $j\in J\subseteq Ba\subseteq Ra$。即 R 满足 F-条件。

下面，我们给出亚直不可约环为除环的一些充要条件。由于必要性是易证的，所以，我们全部以充分性的形式给出：

定理 1　设 R 为满足左 F-条件的环，若 R 没有非零的幂零元素，则 R 为除环。

推论 1　设亚直不可约环 R 为局部左双环，如果 R 没有非零的幂零元素，则 R 为除环．且为（非局部的）左双环。

推论 2　设亚直不可约环 R 的中心含有 R 的非零理想。如果 R 没有非零的幂零元素，则 R 为域。

定理 1 及其两个推论，都是 Birkhoff 定理不同形式的推广．且其证明是非常初等的．

定理 2　若 $L^2\neq 0$，则 R 为除环。

这个定理不仅给出了一个环是除环的充要条件，而且也清楚地解释了交换的亚直不可约环的分类何以与一般的亚直不可约环不同。使我们可以据此定理来对一般的亚直不可约环进行分类。

由于在交换的情况之下，必有 $L=J$，于是 $L^2=J^2$ 或者为零或者不为零。且易知，对交换环，$J^2=0$ 的充要条件为 R 有非零的幂零元素。于是，交换的亚直不可约环，若无非零的幂零元，则为域；若有非零的幂零元素，则必有非零幂零理想。于是 McCoy和Divinsky 根据 Birkhoff 的定理，把交换的亚直不可约环分为三类：(1)、域；(2)、有非零的幂零元素；但至少有一个元素不为零因子；(3)、R 的全部元素都是零因子。

实际上，(2)、(3) 两类环可认为是一大类环（有非零幂零理想的环）中的两种情况。对交换的亚直不可约环来说，这类环也只可能有上述两种情况。

对于非交换的亚直不可约环，情况可能复杂些。不过，依据定理 2，可将它们分成三类：

(1) 当 $L^2\neq 0$ 时，由定理 2 知，R 此时为除环。

(2) 当 $L^2=0$ 但 $J^2\neq 0$ 时，此时有：

命题 1　设 R 为亚直不可约环，若 $J^2\neq 0$ 但 $L^2=0$，则必有 (1) $L=0$。(2) $N=0$。此处 N 为 R 的幂零理想。

上述命题说明，第二类亚直不可约环为诣零半单纯环，其一切非零左理想之交必为0。文中开始的例子就是属于这类环的。它没有非零的幂零元素，我们很容易看到它的任意两个非零左理想 $Rf_1(x)$、$Rf_2(x)$ 之交是非零的，在这类环中与此有明显不同的例子是 n 阶全阵环。它没有非零的幂零理想，但却有非零的幂零元素。容易看到它的两个非零左理想

$$L_1=\left\{\begin{pmatrix} a_1 & 0\cdots 0 \\ a_2 & 0\cdots 0 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_n & 0\cdots 0 \end{pmatrix}\right\},\qquad L_2=\left\{\begin{pmatrix} 0 & b_1\cdots 0 \\ 0 & b_2 \ \vdots\ 0 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & b_n\cdots 0 \end{pmatrix}\right\}$$

之交集为零，从而 $L=0$。

(3) 当 $J^2=0$ 时，R 有非零的幂零理想。

由于环的非交换性，左、右零因子集合未必一致，在这一类环中，可能会比交换环出现更多的不同情况。

我们除了用定理 2 作为对亚直不可约环分类的依据之外，还可以用它给出一些亚直不可约环为除环的充要条件。首先，可证明

引理 2　设 R 为亚直不可约环，若存在 R 的非零左理想 L_1 及非零双边理想 Q，使 $L_1\cap Q=0$。则 R 必有非零的幂零元素。

引理 3　若亚直不可约环 R 的含于 J 内的左理想升链必在有限处终止，x、$y\in J$，且有 $(x|\cap(y|=0$。则 x、y 都是右零因子。

于是，就可有

定理 3　设 R 为亚直不可约环。R 的含于 J 内的左理想，同时满足左理想升、降链条件。如果 R 没有非零的幂零元素，则 R 为除环。

有趣的是，这个定理又是 Birkhoff 定理的推广。交换环、双环、或者更一般的局部左双环都是满足定理条件的。因为，对这些环而言，任取 $x\in J$，都有 $(x|=(x)=J$。于是，任何一个左理想升链或降链，都只能有两项：0 理想和 J。

（二） 满足F-条件的有非零的幂零理想的环及其例子

对于有非零幂零理想的亚直不可约交换环，McCoy在[3]中作了非常成功的研究；后来，Thierrin在[4]中把McCoy的结果推广到双环；最近，樊复生又推广到右双环[5]；下面，我们把定理推广到满足F-条件的一些环上去．

首先，我们研究在R中至少有一个非左（右）零因子的情形．此时，对任何$0\neq a\in R$．必有$Ra\neq 0$（$aR\neq 0$）．

对这种情况，我们只来研究满足F-条件的Z环或局部左（右）双环．首先，我们有

命题2 设R为满足左（右）F-条件的Z环，或者为满足双边F-条件的环．如果R有非零的幂零元素，则必有$j^2=0$（若存在中心的非零幂零元素，可不要求Z环条件）．

由此命题易见：满足F-条件的Z环和局部左（右）双环，与交换环具有下列相同的性质：如有非零幂零元素，必有非零幂零理想．

下面即可将McCoy定理加以推广：

定理4 设R为满足左（右）F-条件的Z环，R中至少有一个非左（右）零因子．用D、E分别表示R的左（右）零因子集合，并设$D\subseteq E$（$E\subseteq D$）．则必有$D=E$，且

（1）集合$\{x|Dx=0\}$（集合$\{x|xD=0\}$）．

（2）集合$\{y|yJ=0\}$恰为D（集合$\{y|Jy=0\}$恰为D）因此D为R的理想．

（3）R/D为除环．

（4）如果$d_1\in D$，$d_1\notin J$．则存在$d_2\in D$，$d_2\notin J$，使$d_2d_1=j$（$d_1d_2=j$）．

反之，如果环R满足上述四个条件，且（1）中之J可表为$\{nj+rj\}$（$\{mj+ir\}$）形式，则R必为亚直不可约环．

当R满足双边F-条件时，可去掉$D\subseteq E$（$E\supseteq D$）条件．但当R不是Z环时，只须将定理叙述作如下变动即可得定理4*：

A 在（1）、（2）中，括号内之D改为E．

B （3）、（4）两条作如下叙述

（3）R/D（R/E）为除环．

（4）如果$d_1\in D$，$d_1\notin J$．（$d_1\in E$，$d_1\notin J$），则存在$d_2\in R$，使$d_2d_1=j$（$d_1d_2=j$）．

其次，我们研究R中元素全部为零因子的情况．对此，我们有

定理5 设R中全部元素均为左（右）零因子．如果$R_l\supseteq R_r$（$R_r\supseteq R_l$），且R为满足左（右）F-条件的环，则必有

（1）有一固定的素数p，使得，若$Ra=0$（$aR=0$），则$p^ka=0$．其中k为与a有关的自然数．

（2）集合$\{a|Ra=0,\ pa=0\}$（$\{a|aR=0\ \ pa=0\}$）为主理想$J=(j)\neq 0$．

（3）若$Rb\neq 0$（$bR\neq 0$），则有$f\in R$，使$fb=j$（$bf=j$）．

反之，若R满足上述三条性质，则R为亚直不可约环．

当R满足双边F-条件时，则不必对R_l、R_r有任何要求，只要将定理中之三条件作如下改动，便可得到定理5*：

A 在（1）、（2）中，将 $aR=0$（$Ra=0$）改为 $aR=Ra=0$。

B（3）改为，若 $Rb\neq 0$，则有 $f\in R$，使 $fb=j$。若 $b'R\neq 0$，则有 $f'\in R$，使 $b'f'=j$。

定理 4 及 4*与定理 5 及 5*均为[3]中定理 2 、 3 之推广，而定理 4* 及定理 5* 又为[4]中相应定理之推广。

下面举出符合定理 4 、 5 条件的两个亚直不可约环的例子：

定理 4 之例：

设 R 为特征数为 0 之域上代数。其底为 e_1、e_2、z_0、z_1、z_2。其底之乘法表如下。可验证此乘法满足结合律，R 为既有非零因子，又有非零幂零理想的一个环。

	e_1	e_2	z_0	z_1	z_2
e_1	e_1	e_2	z_0	z_1	z_2
e_2	e_2	$-e_1$	z_0	z_0	z_2
z_0	z_0	z_0	0	0	0
z_1	z_1	z_1	0	z_0	0
z_2	z_2	z_0	0	0	z_0

我们可证明 R 为满足双边 F-条件的 Z 环。但 R 既非交换环又非双环。

定理 5 之例：

考虑特征数为 p 的域上代数。其基底为：x_1、x_2、$\cdots x_n\cdots x_{t-1}$、x_{t-2}、$\cdots x_{t-m}$。x 与 t 均为一未定元。设 R 为所有形如 $\sum\alpha_i x_i+\sum\beta_j x_{t-j}$ 形式的有限和。规定基底间乘法为：

$$x_i\cdot x_j=x_j \qquad \text{当 } i\text{、}j \text{ 为自然数时，}$$

$$x_i\cdot x_{t-s}=x_{t-s}\cdot x_i=\begin{cases}x_{t-s+i} & \text{当 } i<s \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } i\geqslant s \text{ 时}\end{cases}$$

$$x_{t-p}\cdot x_{t-q}=0.$$

由 $(\sum\alpha_i x_i+\sum\beta_j x_{t-j})x_{t-1}=x_{t-1}(\sum\alpha_i x_i+\sum\beta_j x_{t-j})=0$。故 R 中全部元素为零因子，且 $x_{t-1}\in z$。易证 R 满足左 F-条件，但既非交换环又非双环。

参 考 文 献

[1] G. Birkhoff, Subdirect unions in universal algebra, Bulletin of the American Math, Soe., Vol. 50 (1944), 764—768.

[2] N. Divinsky, Rings and Radials, 1965.

[3] N. McCoy, Subdirect irreducible commative rings, Duke Math. J., 12 (1945), 381—387,

[4] G. Thierrin, On duo rings, Conadian Math, Boll., 3 (1960), 167—172.

[5] 樊复生，关于右双环(未发表).

[6] N. Divinsky, Commative subdirectly irreducible rings, Proe. Amer. Math. soc., 8 (1957) 642—648.

Some Non-commutative Subdirectly Irreducible Rings

Fu Changlin (傅昶林)

Abstract

In this paper, we generalize three theorems of commutative subdirectly irreducible rings due to Birkhoff and McCoy to some non-commutative rings and make an elementary discussion of the classification of non-commutative subdirectly irreducible rings.

更　　正

由于本人的疏忽，在"评 Pólya 的代表性著作《数学发现》"一文中(发表于本刊1983年第1期)误将鲍利亚写成"已故的著名美籍匈牙利数学家."。事实上鲍利亚现仍健在，为美国斯坦福大学退休名誉教授．特此更正，并致歉意．

郑毓信

1983年3月4日

编辑部启事

本刊1983年第1期(总第8期)第213页郑毓信同志的文章中提到的 G. Pólya 教授，现在美国 Stanford 大学退休为名誉教授．由于我们工作中的疏忽，未能更正原文中的错误．特向广大读者与 Pólya 教授致歉，并祝 Pólya 教授健康长寿．

编辑部

1983年2月25日