第3卷 第2期
1983年4月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.3 No.2
Apr. 1983

酉辛群上的调和分析Ⅲ——Fourier级数的Abel求和*

陈广晓 贺祖琪

(中国科学院应用数学研究所)

§3.1 引 言

从多复变函数论典型域的调和分析出发，华罗庚教授[1][2]和龚升教授[3]研究了酉群上Fourier级数的Abel求和，求出了求和系数 $\rho^f(r)$ 的具体表达式；在实典型域的调和分析的基础上，钟加庆同志研究了旋转群上调和分析的同一问题[4]。沿用他们的方法我们研究了酉辛群上Abel求和，得到相应的Abel收敛定理，并用钟加庆同志用到的母函数方法，解决了计算 $\rho^f(r)$ 具体表达式的问题。

§3.2 Poisson核的性质

作为 $\alpha\to\infty$ 时 $USp(2n)$ 上Cesáro求和核的极限，

$$P_r(W)=\left(\frac{(1-r^2)^n}{\det(I-rW)}\right)^{2n+1}\qquad(0\leqslant r<1)\tag{3.2.1}$$

称为USp(2n)的Poisson核。令单变元Poisson核为 $P_r(\theta)$。设W的特征根为 $\epsilon^{\pm i\theta_1},\cdots,\epsilon^{\pm i\theta_n}$，则(3.2.1)等于

$$\left(\prod_{j=1}^{n}P_r(\theta_j)\right)^{2n+1}=\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta_j}\right)^{2n+1},\tag{3.2.2}$$

故为正定的。利用交换图表

$$\begin{array}{ccc} H & \longmapsto & \widetilde{H}=\dfrac{1+r}{1-r}H\\ \big\downarrow & & \big\downarrow\\ U=(I+H)(I-H)^{-1} & \longmapsto & \widetilde{U}=(I+\widetilde{H})(I-\widetilde{H})^{-1}\end{array}\tag{3.23}$$

$$(U\longmapsto\widetilde{U}=(U-rI)(I-rU)^{-1}),$$

以及计算酉辛流形体积时建立的关系[7]，得到

$$\dot{\widetilde{U}}=P_r(U)\dot{U}.\tag{3.2.4}$$

从而建立了

定理：1.
$$\frac{1}{C}\int_{USp(2n)}P_r(U)\dot{U}=1\tag{3.2.5}$$

(C为$USp(2n)$体积)，

*1981年1月26日收到.

2．若 $u(U)$ 为 $USp(2n)$ 上的连续函数，则

$$\lim_{r\to 1}\int_{USp(2n)}(u(WU)-u(U))P_r(W)\dot{W}=0. \tag{3.2.6}$$

于是 Poisson 核具有类似于酉群、旋转群 Abel 求和相应的核的性质．

§3.3 以 $P_r(W)$ 为核的 Abel 求和

作为 $W\in USp(2n)$ 的函数，Poisson 核 $P_r(W)$ 是类函数．用 $N(f)$，$\chi_f(W)$ 表酉辛群的标签为 $f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0$ 的单值既约酉表示的阶数和特征标[5][8]，令

$$N(f)\rho^f(r)=\frac{1}{c}\int_{USp(2n)}P_r(W)\chi_f(W)\dot{W}, \tag{3.3.1}$$

则 $P_r(W)$ 成为相应于 Abel 平均

$$\sum_{f>0}\rho^f(r)\sum_{j,k=1}^{N(f)}c_{ij}^f\varphi_{ij}^f(U) \tag{3.3.2}$$

的核函数．利用上节定理知：

$$\lim_{r\to 1}\rho^f(r)=1. \tag{3.3.3}$$

如果 $r\to 1$ 时，(3.3.2) 收敛于 $u(U)$，则称 $u(U)$ 的 Fourier 级数 Abel 求和收敛于 $u(U)$．

为证明酉辛群上连续函数的 Abel 收敛定理，必须且只须再证明，Poisson 核 (3.2.1) 可展开成在 $0\leqslant r\leqslant r_0<1$ 上一致收敛的下述级数：

$$\sum_{f>0}\rho^f(r)N(f)\chi_f(W)=P_r(W). \tag{3.3.4}$$

§3.4 Abel 收敛定理、系数 $\rho^f(r)$ 的计算

沿用钟加庆同志用了旋转群上的母函数方法，我们同时解决了 (3.3.4) 的证明与 $\rho^f(r)$ 的计算．

采用[4]的符号，我们证明了，

$$\frac{\prod\limits_{j<k}^{n}(1-t_jt_k)}{\prod\limits_{j=1}^{n}\det(I-t_jU)}=\frac{\sum\limits_{f>0}\chi_f(U)\det(t_k^{l_j-1})_{1<j,k<n}}{\prod\limits_{j<k}^{n}(t_j-t_k)} \tag{3.4.1}$$

于 $0\leqslant t_j\leqslant r_0<1$ 时一致地成立．再用[4]相同的步骤推出 $s>n$ 时

$$\frac{\prod\limits_{j<k}^{s}(1-t_jt_k)}{\prod\limits_{j=1}^{s}\det(I-t_jU)}=\frac{\sum\limits_{f>0}\chi_f(U)Q_s^f(t_1,\cdots,t_s)}{\prod\limits_{j<k}^{n}(t_j-t_k)}, \tag{3.4.2}$$

其中 $Q_s^f(t_1,\cdots,t_s)=\langle t^{l_1+s-n-1},\cdots,t^{l_n+s-n-1},t^{s-n-1},t^{s-n-2}T,\cdots,T^{s-n-1}\rangle$

$(T_j=(1+t_j^2))$

令 $s=2n+1$，$t_j=r\tau_j$，$\tau_j\to 1$，即得

$$\frac{(1-r^2)^{n(2n+1)}}{\det(I-rU)^{2n+1}}=\sum_{f>0}\chi_f(U)\rho^f(r)N(f)$$

于 $0\leqslant r\leqslant r_0<1$ 一致的成立。此即(3.3.4)。从而证得了 Abel 收敛定理，而且得到 $\rho^f(r)$ 的如下几种表达式：

$$\rho^f(r)N(f)=\lim_{\tau_j\to 1}\left\{\frac{Q^f_{2n+1}(r\tau_1,\ \cdots,\ r\tau_{2n+1})}{D(r\tau_1,\ \cdots,\ r\tau_{2n+1})}\right\}, \tag{3.4.3}$$

$$\rho^f(r)N(f)=2^{n(2n+1)}r^{f_1+\cdots+f_n}\sum_{(m_1,\cdots,m_n)}r^{2m_1+4m_2+\cdots+2nm_n}M(f_1,\cdots,f_n,0,\ 2m_1,4m_2,\cdots 2nm_n),$$
$$(0\leqslant m_j\leqslant 1) \tag{3.4.4}$$

其中 $M(f_1,\cdots,\ f_n,\ P_0,\cdots,\ P_n)$ 为

$$\lim_{\tau_j\to 1}\frac{\langle \tau^{f_1+2n+1},\ \cdots\tau^{f_n+n+2},\ \tau^{P_0+n+1},\ \cdots,\ \tau^{P_n+1}\rangle}{D(\tau_1,\ \cdots,\ \tau_{2n+1})}.$$

置 $\xi_i(r)=r^{f_i+2n+1-i}$，$\xi_{n+1}(r)=r^n$，$\xi_{n+1+i}(r)=r^{n+i}+r^{n-i}$　　$(1\leqslant i\leqslant n)$。

则还得另一表达式：

$$\rho^f(r)N(f)=\frac{(-1)^n}{1!\,2!\cdots n!}\det(\xi_k^{(j-1)}(r))_{1\leqslant j,k\leqslant 2n+1} \tag{3.4.5}$$

本文是在华罗庚教授和龚昇教授指导下完成的，作者向他们表示感谢。

参 考 文 献

[1] 华罗庚，多复变数函数论中典型域的调和分析，科学出版社，北京，1958.

[2] 华罗庚，紧致群上的连续函数所成的空间中的一条收敛定理，科学记录，1958 年第 9 期.

[3] 龚昇，酉群上的Fourier分析 I，数学学报，10(1960)239—261.

[4] 钟加庆，旋转群上的调和分析—ABEL求和，中国科技大学学报，9:1(1979)，31—43.

[5] H. Weyl, Classical Groups (1946).

[6] Murnaghan, F. D., Theory of Group Representation (1938).

[7] 陈广晓，关于酉辛流形的体积，科学通报，19(1981)，1212.

[8] 贺祖琪、陈广晓，酉辛群上的调和分析 I，数学研究与评论，1(1981)，29—42.

Harmonic Analysis on Unitary-Symplectic Group Ⅲ——Abelian Summability of Fourier Series

Chen Guangxiao (陈广晓) *He Zuqi* (贺祖琪)

(Institute of Applied Math. Academia Sinica)

Abstract

Abelian Summability may define as the limit case of Cesáro summability when $a\to\infty$, The kernel of Abelian mean, the so-called Poisson kernel of $USp(2n)$ is

$$P_r(W)=\left(\frac{(1-r^2)^n}{\det(I-rW)}\right)^{2n+1}\quad(0\leqslant r<1). \tag{1}$$

In our present note, we prove

Theorem For any continuous function $u(U)$ on $USp(2n)$, we have

1) $$\lim_{r\to1}\frac{1}{C}\int_{USp(2n)}u(WU)P_r(W)\dot{W}=u(U) \tag{2}$$

2) $$\lim_{r\to1}\sum_{(f\geq0)}\rho^f(r)T_r(c_f\phi_f'(U))=u(U). \tag{3}$$

where the so-called coefficients of Abelian summability

$$\rho^f(r)=\frac{1}{N(f)}\int_{USp(2n)}P_r(W)\chi_f(W)\dot{W}\to1\qquad(r\to1). \tag{4}$$

Using the method appeared in [4], we also work out the expression for $\rho^f(r)$.