第3卷 第2期　　数学研究与评论　　Vol.3 No.2
1983年4月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Apr. 1983

球面 Schrödinger 算子的迹*

曹策问

（郑州大学）

本文研究球面 Schrödinger 算子，即带势扰动项的球面调和算子。关于它的特征值渐近式，近年有 W. Harold 的工作[1]。本文利用作者在[2]中获得的估计及伴随 Legendre 函数的加法公式，算出平均迹与 Гельфанд-Левитан 迹，并用以证明相应的特征值反问题的 Ambarzumjan 型唯一性定理。

1．设 S 为 R^3 的单位球面。$\mathscr{L}_2(S)$ 为 S 上平方可积函数组成的 Hilbert 空间。内积 $(u,\ v)$ 定义为 $u\bar{v}$ 在 S 上的积分。考察球面调和算子

$$L_0u\equiv-\Delta_{\theta,\varphi}u=\frac{-1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}. \tag{1}$$

按[3]，特征值问题(E_0)：$\{L_0u=\mu u,\ u(\theta,\varphi+2\pi)=u(\theta,\varphi),\ u(o,\varphi)$与$u(\pi,\varphi)$有界$\}$在$\mu=l(l+1)$处有 $2l+1$ 重特征值（$l=0,1,2,\cdots$），相应的规范特征函数为

$$\left.\begin{aligned}
\psi_l^{(0)}(\theta,\varphi)&=\left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{\frac12}P_l(\cos\theta),\\
\psi_l^{(-m)}(\theta,\varphi)&=\left(\frac{2l+1}{2\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right)^{\frac12}P_l^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi,\\
\psi_l^{(m)}(\theta,\varphi)&=\left(\frac{2l+1}{2\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right)^{\frac12}P_l^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

这里 $m=1,2,\cdots,l$；$P_l(x)$为 Legendre 多项式，$P_l^{(m)}(x)$为附属 Legendre 函数。由 Legendre 函数的加法公式（见[4]p268）

$$\sum_{m=-l}^{l}[\psi_l^{(m)}(\theta,\varphi)]^2=\frac{2l+1}{4\pi}=\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{4\pi} \tag{3}$$

2．将（E_0）的特征值按大小排列为 $\mu_0<\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\cdots$，其中 k 重特征值出现 k 次。记不超过 R 的 μ_n 的个数为 $A(R)$。相应于 μ_n 的特征函数(2)记为 $v_n(\theta,\varphi)$。则$\{v_n\}$是$\mathscr{L}_2(S)$的完备正交规范系（见[3] 676—680）。此时（3）式改写为

$$\sum_{\mu_n=l(l+1)}[v_n(\theta,\varphi)]^2=\sum_{\mu_n=l(l+1)}\frac{1}{4\pi},$$

从而

$$\sum_{\mu_n<R}[v_n(\theta,\varphi)]^2=\sum_{\mu_n<R}\frac{1}{4\pi}=\frac{A(R)}{4\pi}. \tag{4}$$

* 1981年8月26日收到。

任 $R\geqslant 0$，有唯一的正整数 N 满足 $(N-1)N\leqslant R<N(N+1)$。因而

$$A(R)=\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{\mu_n=l(l+1)}1=\sum_{l=0}^{N-1}(2l+1)=N^2. \tag{5}$$

由简单变换可得

$$R+\frac{1}{2}-\sqrt{R+\frac{1}{4}}<A(R)=N^2$$

$$\leqslant R+\frac{1}{2}+\sqrt{R+\frac{1}{4}},$$

故
$$\lim_{R\to\infty}A(R)/R=1. \tag{6}$$

3. 在（4）中令 $R=N^2$，注意由（5），$A(N^2)=N^2$，有

$$\frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N^2-1}[v_n(\theta,\varphi)]^2=\frac{1}{4\pi}.$$

任给正整数 M，存在唯一的正整数 N，使得 $N^2\leqslant M<(N+1)^2$，

$$\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}v_n^2\geqslant\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{N^2-1}v_n^2=\frac{N^2}{M}\frac{1}{4\pi}>\frac{1}{4\pi}\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2.$$

同理可作左式的上估计，总之可得

$$\frac{1}{4\pi}\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2<\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}v_n^2(\theta,\varphi)$$

$$<\frac{1}{4\pi}\left(1+\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2. \tag{7}$$

4. 平均迹．设 $q(\theta,\varphi)$ 是 S 上的连续函数。考察球面 Schrödinger 算子 的特征值问题 (E)：$\{Lu\equiv L_0u+qu=\lambda u,\ u(\theta,\varphi+2\pi)=u(\theta,\varphi),\ u(o,\varphi)$ 与 $u(\pi,\varphi)$ 有界$\}$。记其特征值为 $\lambda_0\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots$。则因 $q\equiv 0$ 时特征值 μ_n 的个数 $A(R)$ 满足（6）型渐近式，由[2,P60]，

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{A(R)}\sum_{\mu_n\leqslant R}\{\lambda_n-\mu_n-(qv_n,v_n)\}=0;$$

$$\lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}\{\lambda_n-\mu_n-(qv_n,v_n)\}=0.$$

将（4）与（7）分别乘以 q 后沿 S 积分，代入上二式，得

定理1　记 q 在 S 上的积分为 $I(q)$，则

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{A(R)}\sum_{\mu_n\leqslant R}(\lambda_n-\mu_n)=\frac{1}{4\pi}I(q); \tag{8}$$

$$\lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}(\lambda_n-\mu_n)=\frac{1}{4\pi}I(q). \tag{9}$$

5. Гельфанд-Левитан 迹. 由 [2, p. 59(1.7)]

$$0 \leqslant -\sum_{\mu_n \leqslant R}\{\lambda_n - \mu_n - (qv_n, v_n)\}$$

$$\leqslant Q^2\left\{\sum_{\mu_n \leqslant R}\frac{1}{R-\mu_n} + \sum_{\lambda_n \leqslant R}\frac{1}{R-\lambda_n}\right\}, \tag{10}$$

其中 $Q=\sup|q|$. 取 $R=N^2$ 时，花括号中第一项为

$$\sum_{l=0}^{N-1}\frac{2l+1}{N^2-l(l+1)} = O(\log N).$$

又因 $\mu_n - Q \leqslant \lambda_n \leqslant \mu_n + Q$（见[2]中引理 1），而 $\{\mu_n\}$ 在 $[0,\infty)$ 的余集由长度趋于无穷的不交区间 $(l(l+1),\ (l+1)(l+2))$ 组成，故 N 充分大时，$\lambda_n \leqslant N^2$ 与 $\mu_n \leqslant N^2$ 给出相同的指标 n 的集合. 因此（10）右式花括号中的第二项有估计

$$\sum_{\mu_n \leqslant N^2}\frac{1}{N^2-\mu_n-Q} = \sum_{l=0}^{N-1}\frac{2l+1}{N^2-Q-l(l+1)} = O(\log N).$$

定理 2
$$\sum_{\mu_n \leqslant N^2}\left\{\lambda_n - \mu_n - \frac{I(q)}{4\pi}\right\} = O(\log N). \tag{11}$$

6. 特征值反问题的唯一性. [5][6]的结果可推广为：

定理 3 若（E）与（E_0）有相同的最小特征值，且

$$\lim_{M\to\infty}\frac{1}{M+1}\sum_{n=0}^{M}(\lambda_n-\mu_n)=0, \tag{12}$$

则 $q(\theta,\varphi)\equiv 0$. 特别，（E）与（$E_0$）的特征谱重合时，$q\equiv 0$.

证 由（12）及定理 1 知 $I(q)=0$. 定义 $C^2(S)$ 上的二次泛函 $D(\psi)=(L\psi,\psi)$. 因 (E_0) 的最小特征值 $\mu_0=0$，故 $\lambda_0=0$. 由特征值的极值性质，$D(\psi)\geqslant 0$，$\forall\psi\in C^2(S)$. 任取实常数 $u_0 \neq 0$ 与 ε，注意 $Lu_0=qu_0$，$(Lu_0,u_0)=u_0^2 I(q)=0$，故

$$0\leqslant D(u_0+\varepsilon\psi)=2\varepsilon u_0(q,\psi)+\varepsilon^2(L\psi,\psi)$$

ε 的任意性导出 $(q,\psi)=0$. ψ 的任意性表明 $q\equiv 0$.

参　考　文　献

[1] Harold. W., Advances in Math., 31:1(1979), 63-66.

[2] Cao Cewen, Scientia Sinica, Spec. Issue(Ⅰ) on Math. (1979), 56-68.

[3] 吉洪诺夫, A.H., 萨马尔斯基, A.A., 数学物理方程, 下册,（黄克欧等译）, 人民教育出版社, 北京, 1957.

[4] 王竹溪, 郭敦仁, 特殊函数概论, 科学出版社, 北京, 1965.

[5] Ambarzumjan, W. A., Zeits. f. Physik, 53(1929), 690-695.

[6] Кузнецов, Н. В., ДАН, 146:6 (1962), 1259 1262.

On the Trace Formulae for the Spherical Schrödinger Operator

Cao Cewen

Abstract

Let S be a unit sphere in R^3, $\Delta_{\theta,\varphi}$ be the spherical Laplacian and $q(\theta,\varphi)$ be a continuous function on S. The following trace formulae are proved for the eigenvalues μ_n of $L_0=-\Delta_{\theta,\varphi}$ and λ_n of $L=L_0+q$:

$$\lim_{M\to\infty}\frac{1}{M+1}\sum_{n=0}^{M}(\lambda_n-\mu_n)=\frac{1}{4\pi}\iint_S q\,d\sigma,$$

$$\sum_{\mu_n\le N^2}\left(\lambda_n-\mu_n-\frac{1}{4\pi}\iint_S q\,d\sigma\right)=O(\log N),$$

where N is large positive integer. As an application. an uniqueness theorem of Ambarzumjan's type for the inverse eigenvalue problem of L is obtained: let $\lambda_0=\mu_0$ and

$$\lim_{M\to\infty}\frac{1}{M+1}\sum_{n=0}^{M}(\lambda_n-\mu_n)=0,$$

then $q(\theta,\varphi)\equiv 0$. In particular, if L and L_0 have the same spectrum of eigenvalues, then $L=L_0$.