第3卷 第2期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.3 No.2
1983年4月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Apr. 1983

组合流形上的 Poisson 方程广义解的正则性*

姜礼尚 陈仲慈 汪人俊

（北京大学）（浙江大学）（山东海洋学院）

组合流形上的微分方程的研究是富有实际意义的，在这方面目前还只限于讨论它的广义解的存在唯一性和它的有限元解的收敛性问题[1][2]．至于广义解的正则性，人们还不太清楚．无疑，对这个问题的研究在实践上和理论上都是有意义的．本文将就这个问题作一些研究．

作为模型，我们考虑 $\mathbb{R}_2$ 上组合流形 $\Omega+\Gamma$ 上的 Poisson 方程的边值问题：

$$
(\mathrm{I})\begin{cases}
\Delta u_i = f_i \quad \text{在 } \Omega_i \text{ 内 } (i=1,2), & (1)\\
\left.\begin{array}{l} A\dfrac{d^2u_\Gamma}{ds^2}+\left.\dfrac{\partial u_1}{\partial n}\right|_{\Gamma+0}-\left.\dfrac{\partial u_2}{\partial n}\right|_{\Gamma-0}+g=0 \\ u_1|_{\Gamma+0}=u_2|_{\Gamma-0}=u_\Gamma \end{array}\right\} \text{在 } \Gamma \text{ 上}, & (2)\\
u|_{\partial\Omega}=0. & (3)
\end{cases}
$$

其中，Ω 为矩形；Γ 为 Ω 中光滑曲线，它将 Ω 分成 Ω_1、Ω_2 两部分；$\Omega=\Omega_1+\Omega_2$；s 为 Γ 上的弧长参数；$\vec{n}$ 为 Γ 的单位外法线向量．平面上坐标系选取如图 1．

这个问题源出于膜—筋组合构件的平衡问题，它等价于如下变分问题：

$$
(\mathrm{II})\begin{cases}\text{求 } U\in \mathbb{H}\text{，使得}\\ a(U,V)=F(V) \quad \forall V\in\mathbb{H}, \end{cases} \qquad (4)
$$

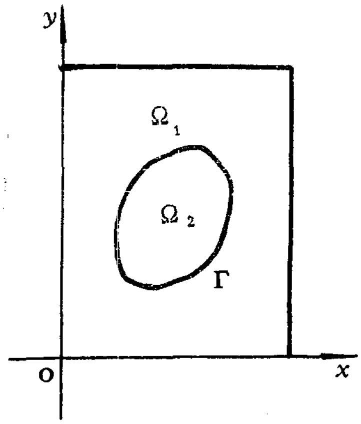

图 1

其中

$$
U=(u(x,y),u_\Gamma(x,y)) \quad u(x,y)=\begin{cases}u_1(x,y) & \text{在 } \Omega_1 \text{ 内},\\ u_2(x,y) & \text{在 } \Omega_2 \text{ 内},\end{cases}
$$

$$
V=(v(x,y),v_\Gamma(x,y)) \quad v(x,y)=\begin{cases}v_1(x,y) & \text{在 } \Omega_1 \text{ 内},\\ v_2(x,y) & \text{在 } \Omega_2 \text{ 内},\end{cases}
$$

$$
a(U,V)=\int_\Omega \nabla u\nabla v\,dxdy + A\int_\Gamma \frac{du_\Gamma}{ds}\frac{dv_\Gamma}{ds}ds \text{（}A\text{为正常数）}, \qquad (5)
$$

* 1981年10月22日收到．

$$F(V)=\int_{\Omega} fv\,dxdy+\int_{\Gamma} gv_{\Gamma}\,ds, \tag{6}$$

$$f=\begin{cases} f_1 & \text{在 } \Omega_1 \text{ 内}, \\ f_2 & \text{在 } \Omega_2 \text{ 内}, \end{cases}$$

$$\mathbb{H}=\{V=(v,v_{\Gamma})\,|\,v\in\mathring{H}_1(\Omega),v_{\Gamma}\in H_1(\Gamma),t_r v=v_{\Gamma}\}.$$

$\mathbb{H}$的内积和范数分别定义为：

$$[U,V]_{\mathbb{H}}=\int_{\Omega}(uv+\nabla u\cdot\nabla v)\,dxdy+\int_{\Gamma}(u_{\Gamma}v_{\Gamma}+\frac{du_{\Gamma}}{ds}\,\frac{dv_{\Gamma}}{ds})\,ds, \tag{7}$$

$$\|U\|_{\mathbb{H}}=\sqrt{[U,U]_{\mathbb{H}}}=(\|u\|^2_{1,\Omega}+\|u_{\Gamma}\|^2_{1,\Gamma})^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

易知[1]，在内积（8）的意义下$\mathbb{H}$是完备的 Hilbert 空间，且当 $f\in L_2(\Omega)$，$g\in L_2(\Gamma)$时，问题（Ⅱ）存在唯一解$U=(u,u_{\Gamma})\in\mathbb{H}$，并有估计1)：

$$\|U\|_{\mathbb{H}}\leqslant C(\|f\|_{0,\Omega}+\|g\|_{0,\Gamma}). \tag{9}$$

我们称（Ⅱ）的解为边值问题（Ⅰ）的广义解。本文将进一步研究它的正则性，我们得到了如下结果：

定理 1 若 $f\in L_2(\Omega)$，$g\in L_2(\Gamma)$，$\Gamma\in C^2$，则（Ⅰ）的广义解$U=(u,u_{\Gamma})$满足：

$$u\in H_2(\Omega_1)\cap H_2(\Omega_2),\quad u_{\Gamma}\in H_2(\Gamma),$$

且有估计：

$$\|u_i\|_{2,\Omega_i}\leqslant C(\|U\|_{\mathbb{H}}+\|f\|_{0,\Omega}+\|g\|_{0,\Gamma})\quad(i=1,2), \tag{10}$$

$$\|u_{\Gamma}\|_{2,\Gamma}\leqslant C(\|U\|_{\mathbb{H}}+\|f\|_{0,\Omega}+\|g\|_{0,\Gamma}). \tag{11}$$

定理 2 对于任何整数$S\geqslant O$，若

1）对任意的Ω_1'：$\bar{\Omega}_1'\subset\bar{\Omega}_1\backslash\partial\Omega$，有

$$f_1\in H_{S+\frac{1}{2}}(\Omega_1')\cap L_2(\Omega_1),\quad f_2\in H_{S+\frac{1}{2}}(\Omega_2),$$

2）$g\in H_{S+1}(\Gamma)$，

3）$\Gamma\in C^{\infty}$

则（Ⅰ）的广义解$U=(u,u_{\Gamma})$满足：

$$u\in H_{S+2+\frac{1}{2}}(\Omega_1')\cap H_{S+2+\frac{1}{2}}(\Omega_2),\quad u_{\Gamma}\in H_{S+3}(\Gamma).$$

定理 1 的证明，关键在于给出Γ附近的广义解$U=(u,u_{\Gamma})$的差商估计。而定理 2 的证明则基于定理1，通过反复利用椭圆型方程解的正则性结果（见[6]，P188—189）和组合流形上的 Poisson 方程边值问题的耦合条件(2)，一步步地抬高广义解的可微性次数而得到的。

类似地，我们可考虑如图 2 的组合流形$\Omega+\Gamma$，其中，Ω仍为矩形，Γ为平行于矩形一边的直线，它的端点O_1和O_2位于Ω的边界上。根据这一特点，我们将允许函数类$\mathbb{H}$取为：

$$\mathbb{H}=\{V=(v,v_{\Gamma})\,|\,v\in\mathring{H}_1(\Omega),v_{\Gamma}\in\mathring{H}_1(\Gamma),\ t_r v=v_{\Gamma}\}.$$

这时，利用延拓的方法可以证明，定理 1 的结论仍然成立。并且还可以得到类似于定理 2 的结论：

1）在本文中，如不注明，我们都不加区别地用C表示仅依赖于Ω、Γ和A的常数。

定理2′　对于任何整数 $s\geqslant o$，若

1) $f_i\in H_{S+\frac{1}{2}}(\Omega_i)$，$(i=1,2)$

2) $g\in H_{S+1}(\Gamma)$，

3) $tr_{\partial\Omega}D^k f=0$，$k=0,2,4,\cdots,2\left[\frac{s}{2}\right]$

4) $tr_{o_i}D_g^k=0$，$k=0,2,4,\cdots,2\left[\frac{s}{2}\right]$

则
$$u\in H_{S+2+\frac{1}{2}}(\Omega_1)\cap H_{S+2+\frac{1}{2}}(\Omega_2),$$
$$u_\Gamma\in H_{S+3}(\Gamma).$$

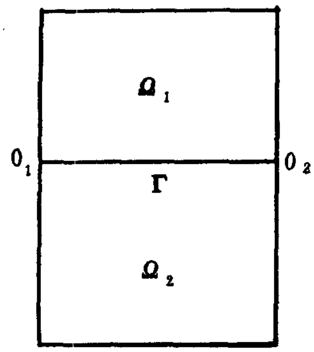

图 2

以下分成两节，在 §1 和 §2 中分别给出定理 1 和定理 2 的证明。

§1　定理 1 的证明

首先，对于 $\Omega_i(i=1,2)$ 的内部和边界 $\partial\Omega$ 附近，由熟知的结果[3]可知：

对于任意的 $\Omega_i'\subset\subset\Omega_i$ $(i=1,2)$ 有
$$u_i\in H_2(\Omega_i')\quad(i=1,2),$$
且有估计：
$$\|u_i\|_{2,\Omega_i'}\leqslant C(\|u_i\|_{1,\Omega_i}+\|f\|_{0,\Omega})\quad(i=1,2).$$

对于任意一点 $P_0\in\partial\Omega$，必存在 P_0 的某一邻域 $U(P_0)$，使 $u_1\in H_2(U(P_0)\cap\Omega_1)$，且有估计：$\|u_1\|_{2,U(P_0)\cap\Omega_1}\leqslant C(\|u_1\|_{1,\Omega_1}+\|f\|_{0,\Omega})$.

特别地，当 P_0 是矩形的顶点时，可用延拓的方法获得上述结论。

下面作 Γ 附近 $U=(u,u_\Gamma)$ 的差商估计。

对于任意一点 $P_0\in\Gamma$，因 $\Gamma\in C^2$，故必有 P_0 的一个邻域 $U(P_0)$，无妨设在其中 Γ 可表为
$$x+\psi(y)=0,\ \text{其中}\ \psi\in C^2.$$

作变换
$$\begin{cases}\xi=x+\psi(y),\\ \eta=y.\end{cases}\tag{12}$$

于是 $U(P_0)$ 变为 (ξ,η) 平面上坐标原点的某个邻域 D，$\Gamma\cap U(P_0)$ 变为 $\xi=0$ 上的某一线段 Γ_D，$U(P_0)\cap\Omega_1$ 和 $U(P_0)\cap\Omega_2$ 分别变成区域 $D^+=D\cap\mathbb{R}_2^+$，$D^-=D\cap\mathbb{R}_2^-$.

其中
$$\mathbb{R}_2^+=\{(\xi,\eta)\mid\xi>0\},\ \mathbb{R}_2^-=\{(\xi,\eta)\mid\xi<0\}\quad\text{记}$$
$$u(\xi-\psi(\eta),\eta)=\tilde{u}(\xi,\eta),\ u_\Gamma(-\psi(\eta),\eta)=\tilde{u}_\Gamma(\eta),$$
$$\tilde{U}=(\tilde{u}(\xi,\eta),\tilde{u}_\Gamma(\eta)),$$
$$f(\xi-\psi(\eta),\eta)=\tilde{f}(\xi,\eta),\ g(-\psi(\eta),\eta)=\tilde{g}(\eta).$$

取子空间 $\mathbb{H}_1\subset\mathbb{H}$ 为：
$$\mathbb{H}_1=\{V=(v,v_\Gamma)\in\mathbb{H}\mid v\in\mathring{H}_1(U(P_0)),\ v_\Gamma\in\mathring{H}_1(\Gamma\cap U(P_0))\}.$$

于是 $U=(u,u_\Gamma)$ 满足：
$$a(U,V)=F(V)\quad\forall V\in\mathbb{H}_1,$$
从而 $\tilde{U}=(\tilde{u},\tilde{u}_\Gamma)$ 满足：
$$\tilde{a}(\tilde{U},\tilde{V})=\tilde{F}(\tilde{V})\quad\forall\tilde{V}\in\mathbb{H}_1,\tag{13}$$

其中

$$\tilde{a}(\tilde{U},\tilde{V})=\iint_D\Big[\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\xi}+\Big(\psi'(\eta)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\Big)\Big(\psi'(\eta)\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\eta}\Big)\Big]d\xi d\eta$$

$$+A\int_{\Gamma_D}\frac{1}{\sqrt{1+\psi'(\eta)^2}}\frac{d\tilde{u}_\Gamma}{d\eta}\frac{d\tilde{v}_\Gamma}{d\eta}\tag{14}$$

$$\tilde{F}(\tilde{V})=\iint_D\tilde{f}\tilde{v}d\xi d\eta+\int_{\Gamma_D}\sqrt{1+\psi'(\eta)^2}\,\tilde{g}\tilde{v}_\Gamma d\eta,\tag{15}$$

$$\widetilde{\mathbb{H}}_1=\{\tilde{V}=(\tilde{v},\tilde{v}_\Gamma)\mid\tilde{v}\in\mathring{H}_1(D),\ \tilde{v}_\Gamma\in\mathring{H}_1(\Gamma_D),\ tr_{\Gamma_D}\tilde{v}=\tilde{v}_\Gamma\}.$$

可类似于(8)定义空间$\widetilde{\mathbb{H}}_1$中的范数$\|\cdot\|_{\widetilde{\mathbb{H}}_1}$.

易知

$$\tilde{a}(\tilde{V},\tilde{V})\geqslant\alpha_0\|\tilde{V}\|^2_{\widetilde{\mathbb{H}}_1},\tag{16}$$

其中α_0为仅与Ω、Γ及A、$\|\psi\|_{C^3}$有关的常数。

设B_δ为(ξ,η)平面上以原点为中心、δ为半径的圆，并取$\delta>0$充分小，使$B_{3\delta}\subset D$. 取截断函数$\zeta(\xi,\eta)$满足：

$$\zeta(\xi,\eta)=\begin{cases}1 & 在B_\delta内\\ 0 & 在B_{2\delta}外\end{cases},\quad \zeta\in C^\infty(\mathbb{R}_2).$$

定义$\tilde{U}$的η方向差商：

$$\tilde{U}^h_\eta=(\tilde{u}^h_\eta,\ \tilde{u}^h_{\Gamma_\eta})\qquad(|h|<\frac{\delta}{4})$$

其中
$$\tilde{u}^h_\eta=\frac{\tilde{u}(\xi,\eta)-\tilde{u}(\xi,\eta-h)}{h},\quad \tilde{u}^h_{\Gamma_\eta}=\frac{\tilde{u}_\Gamma(\eta)-\tilde{u}_\Gamma(\eta-h)}{h}.$$

若$\phi=(\varphi,\varphi_\Gamma)\in\widetilde{\mathbb{H}}_1$，易知亦有$(\zeta\phi)^h_\eta\in\widetilde{\mathbb{H}}_1$. 在(13)中取$\tilde{V}=(\zeta\phi)^h_\eta$,我们便得到$\tilde{U}=(\tilde{u},\tilde{u}_\Gamma)$所适合的积分关系式：

$$\tilde{a}(\tilde{U},\ (\zeta\phi)^h_\eta)=\tilde{F}((\zeta\phi)^h_\eta)\tag{17}$$

利用恒等式：

$$(f\cdot g)^h_\eta=f^h_\eta g+f|_{\eta-h}\cdot g^h_\eta\quad\forall f,g\in L_2(\Omega)\tag{18}$$

和分部差分公式：

$$\iint_\Omega fg^h_\eta d\xi d\eta=-\iint_\Omega f^h_\eta\cdot g|_{\eta-h}d\xi d\eta\tag{19}$$

$$\forall f,g\in L_2(\Omega),\ \operatorname{supp}g\subset\subset\Omega,$$

(17)式可化为：

$$\tilde{a}(\zeta|_{\eta-h}\tilde{U}^h_\eta,\phi|_{\eta-h})=\iint_D\Big(\psi'\tilde{u}^h_\eta\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\Big|_{\eta-h}+\tilde{u}^h_\eta\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\Big|_{\eta-h}\Big)\Big(\psi'\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\Big|_{\eta-h}+\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\Big|_{\eta-h}\Big)d\xi d\eta$$

$$-\iint_D\Big\{\Big[(\psi')^h_\eta\psi(\eta)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\Big|_{\eta-h}+\Big(\psi'\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\Big)\Big|_{\eta-h}(\psi')^h_\eta\Big]\frac{\partial(\zeta\phi)}{\partial\xi}\Big|_{\eta-h}+(\psi')^h_\eta\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\Big|_{\eta-h}$$

$$\cdot \frac{\partial(\zeta\varphi)}{\partial\eta}\Big|_{\eta-h}\Big\}d\xi d\eta+\iint_D\Big[\tilde u_\eta^h\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\Big|_{\eta-h}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\Big|_{\eta-h}-\frac{\partial\tilde u_\eta^h}{\partial\xi}\varphi\Big|_{\eta-h}\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\Big|_{\eta-h}\Big]d\xi d\eta$$

$$+\iint_D\Big(\psi'\frac{\partial\tilde u_\eta^h}{\partial\xi}+\frac{\partial\tilde u_\eta^h}{\partial\eta}\Big)\cdot\Big(\psi(\eta)\varphi|_{\eta-h}\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\Big|_{\eta-h}+\varphi\Big|_{\eta-h}\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\Big|_{\eta-h}\Big)d\xi d\eta-\iint_D\tilde f(\zeta\varphi)_\eta^h d\xi d\eta$$

$$+A\int_{\Gamma_D}\frac{1}{\sqrt{1+\psi'^2}}\tilde u_{\Gamma\eta}^h\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\Big|_{\eta-h}\frac{d\varphi_\Gamma}{d\eta}\Big|_{\eta-h}d\eta-A\int_{\Gamma_D}\Big(\frac{1}{\sqrt{1+\psi'^2}}\Big)_\eta^h\frac{d\tilde u_\Gamma}{d\eta}\Big|_{\eta-h}\zeta\Big|_{\eta-h}\frac{d\varphi_\Gamma}{d\eta}\Big|_{\eta-h}d\eta$$

$$-A\int_{\Gamma_D}\Big[\frac{1}{\sqrt{1+\psi'^2}}\frac{d\tilde u_{\Gamma\eta}^h}{d\eta}+\Big(\frac{1}{\sqrt{1+\psi'^2}}\Big)_\eta^h\frac{d\tilde u_\Gamma}{d\eta}\Big|_{\eta-h}\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\Big|_{\eta-h}\varphi_\Gamma\Big|_{\eta-h}\Big]d\eta$$

$$-\int_{\Gamma_D}\sqrt{1+\psi'^2}\,\tilde g(\zeta\varphi_\Gamma)_\eta^h d\eta=\sum_{i=1}^{9}K_i. \tag{20}$$

在(20)中，取 $\phi=\zeta\tilde U_\eta^h(\xi,\eta+h)\in\tilde{\mathbb H}_1$，左端利用正定性条件(16)得

$$\tilde a(\zeta|_{h-\eta}\tilde U_\eta^h,\ \zeta|_{\eta-h}\tilde U_\eta^h)\geqslant\alpha_0\|\zeta|_{\eta-h}\tilde U_\eta^h\|^2_{\tilde{\mathbb H}_1}. \tag{21}$$

记　　$M=\max\{\|\psi\|_{C^2},\ \|\zeta\|_{C^1(D)}\}$，$N=\max\{M^2,M,1\}$，

于是　$$|K_1|=\Big|\iint_D\Big(\psi'\tilde u_\eta^h\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\Big|_{\eta-h}+\tilde u_\eta^h\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\Big|_{\eta-h}\Big)\Big(\psi'\frac{\partial(\zeta|_{\eta-h}\tilde u_\eta^h)}{\partial\xi}+\frac{\partial(\zeta|_{\eta-h}\tilde u_\eta^h)}{\partial\eta}\Big)d\xi d\eta\Big|$$

$$\leqslant 4N^2\|\tilde u_\eta^h\|_{0,D}\|\zeta|_{\eta-h}\tilde u_\eta^h\|_{1,D}.$$

因由[5]知　　$\|\tilde u_\eta^h\|_{0,D}\leqslant\|\tilde u\|_{1,D}$，从而

$$|K_1|\leqslant 4N^2\|\tilde u\|_{1,D}\ \|\zeta\|_{\eta-h}\tilde u_\eta^h\|_{1,D}. \tag{22}$$

类似可得：

$$|K_2|\leqslant 4N\|\tilde u\|_{1,D}\|\zeta|_{\eta-h}\tilde u_\eta^h\|_{1,D}, \tag{23}$$

$$|K_3|\leqslant N\|\tilde u\|^2_{1,D}. \tag{24}$$

对于 K_4，首先改写为：

$$K_4=\iint_D\Big\{\Big[\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\Big|_{\eta-h}(\psi')^2+\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\psi'\Big]\tilde u_\eta^h\frac{\partial(\zeta|_{\eta-h}\tilde u_\eta^h)}{\partial\xi}+\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\Big|_{\eta-h}\psi'+\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\Big|_{\eta-h}\Big)\tilde u_\eta^h\frac{\partial(\zeta|_{\eta-h}\tilde u_\eta^h)}{\partial\eta}$$

$$-\Big[\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\Big|_{\eta-h}\Big)^2\psi'^2+2\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\Big)\Big|_{\eta-h}\psi'+\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\Big|_{\eta-h}\Big)^2\Big]\Big(\tilde u_\eta^h\Big)^2\Big\}d\xi d\eta,$$

由此易得：

$$|K_4|\leqslant 4N^2(\|\tilde u\|^2_{1,D}+\|\zeta|_{\eta-h}\tilde u_\eta^h\|_{1,D}\|\tilde u\|_{1,D}). \tag{25}$$

对于 K_5 利用恒等式(18)可得：当 $|h|<\frac{\delta}{4}$ 时，

$$K_5=\iint_D\tilde f\zeta_\eta^h\zeta|_{\eta-h}\tilde u_\eta^h d\xi d\eta+\iint_D(\tilde f\cdot\zeta)|_{\eta-h}(\zeta|_{\eta-h}\tilde u_\eta^h)_\eta^h d\xi d\eta,$$

$$|K_5|\leqslant M^2\|\tilde f\|_{0,D}\|\tilde u_\eta^h\|_{0,D}+M\|\tilde f\|_{0,D}\|(\zeta|_{\eta-h}\tilde u_\eta^h)_\eta^h\|_{0,D}$$

$$\leqslant M^2\|\tilde f\|_{0,D}\|\tilde u\|_{1,D}+M\|\tilde f\|_{0,D}\|\zeta|_{\eta-h}\tilde u_\eta^h\|_{1,D}. \tag{26}$$

$$|K_6| \leqslant A\int_{\Gamma_D} \frac{1}{\sqrt{1+\psi'^2}} |\tilde{u}^h_{\Gamma\eta}| \left|\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right|_{\eta-h} \left|\frac{d}{d\eta}(\zeta|_{\eta-h}\tilde{u}^h_{\Gamma\eta})\right| d\eta$$

$$\leqslant AM\|\tilde{u}^h_{\Gamma\eta}\|_{0,\Gamma_D}\left\|\frac{d}{d\eta}(\zeta|_{\eta-h}\tilde{u}^h_{\Gamma\eta})\right\|_{0,\Gamma_D}$$

$$\leqslant AM\|\tilde{u}_\Gamma\|_{1,\Gamma_D}\|\zeta|_{\eta-h}\tilde{u}^h_{\Gamma\eta}\|_{1,\Gamma_D}. \tag{27}$$

对于 K_7，注意到 $\left|\left(\frac{1}{\sqrt{1+\psi'^2}}\right)^h_\eta\right| \leqslant M^2$，便得：

$$|K_7| \leqslant AN^2\|\tilde{u}_\Gamma\|_{1,\Gamma_D}\|\zeta|_{\eta-h}\tilde{u}^h_{\Gamma\eta}\|_{1,\Gamma_D}. \tag{28}$$

对于 K_8，首先化为：

$$K_8 = A\int_{\Gamma_D}\frac{1}{\sqrt{1+\psi'^2}}\frac{d\zeta}{d\eta}\Big|_{\eta-h}\tilde{u}^h_{\Gamma\eta}\frac{d(\zeta|_{\eta-h}\tilde{u}^h_{\Gamma\eta})}{d\eta}d\eta - A\int_{\Gamma_D}\frac{1}{\sqrt{1+\psi'^2}}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\Big|_{\eta-h}\right)^2(\tilde{u}^h_{\Gamma\eta})^2 d\eta$$

$$+A\int_{\Gamma_D}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\psi'^2}}\right)^h_\eta\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\Big|_{\eta-h}\left(\frac{d\tilde{u}_\Gamma}{d\eta}\right)\Big|_{\eta-h}\zeta|_{\eta-h}\tilde{u}^h_{\Gamma\eta}d\eta,$$

然后可得：

$$|K_8| \leqslant 2AN^2\|u_\Gamma\|_{1,\Gamma_D}\|\zeta|_{\eta-h}\tilde{u}^h_{\Gamma\eta}\|_{1,\Gamma_D} + AN\|\tilde{u}_\Gamma\|^2_{1,\Gamma_D} \tag{29}$$

类似于 K_5 的估计，易得：

$$|K_9| \leqslant 2N^2(\|\tilde{g}\|_{0,\Gamma_D}\|\tilde{u}_\Gamma\|_{1,\Gamma_D} + \|\tilde{g}\|_{0,\Gamma_D}\|\zeta|_{\eta-h}\tilde{u}^h_{\Gamma\eta}\|_{1,\Gamma_D}. \tag{30}$$

最后将(21)—(30)代入(20)，整理得：

$$\begin{aligned}\alpha_0\|\zeta|_{\eta-h}\tilde{U}^h_\eta\|^2_{\tilde{H}_1} \leqslant & C_1(\|\tilde{u}\|_{1,D} + \|\tilde{f}\|_{0,D})\|\zeta|_{\eta-h}\tilde{u}^h_\eta\|_{1,D} \\ & + C_2(\|\tilde{u}_\Gamma\|_{1,\Gamma_D} + \|\tilde{g}\|_{0,\Gamma_D})\|\zeta|_{\eta-h}\tilde{u}^h_{\Gamma\eta}\|_{1,\Gamma_D} \\ & + C_3(\|\tilde{f}\|_{0,D}\|\tilde{u}\|_{1,D} + \|\tilde{g}\|_{0,\Gamma_D}\|\tilde{u}_\Gamma\|_{1,\Gamma_D}) + C_4\|\tilde{U}\|^2_{\tilde{H}_1}.\end{aligned}$$

其中 $C_i(i=1,2,3,4)$ 仅与 N 和 A 有关。由此易得：

$$\|\zeta|_{\eta-h}\tilde{U}^h_\eta\|_{\tilde{H}_1} \leqslant C(\|\tilde{U}\|_{\tilde{H}_1} + \|\tilde{f}\|_{0,D} + \|\tilde{g}\|_{0,\Gamma_D}),$$

其中 C 仅与 Ω、Γ 和 A、$\|\psi\|_{C^3}$ 有关。

由于在 B_δ 上，$\zeta=1$，而 $|h|<\frac{\delta}{4}$ 所以便有：

$$(\|\tilde{u}^h_\eta\|^2_{1,B_{\frac{\delta}{2}}} + \|\tilde{u}^h_{\Gamma\eta}\|^2_{1,B_{\frac{\delta}{2}}\cap\Gamma_D})^{\frac{1}{2}} \leqslant C(\|\tilde{U}\|_{\tilde{H}_1} + \|\tilde{f}\|_{0,D} + \|\tilde{g}\|_{0,\Gamma_D}).$$

由此利用[5]，便推出：

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2},\ \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta} \in L_2(B_{\frac{\delta}{2}}),\ \frac{d^2\tilde{u}_\Gamma}{d\eta^2} \in L_2(B_{\frac{\delta}{2}}\cap\Gamma_D) \text{且}$$

$$\left\|\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}\right\|_{0,B_{\frac{\delta}{2}}} + \left\|\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}\right\|_{0,B_{\frac{\delta}{2}}} + \left\|\frac{d^2\tilde{u}_\Gamma}{d\eta^2}\right\|_{0,\Gamma_D\cap B_{\frac{\delta}{2}}} \leqslant CK,$$

其中 $K = \|\tilde{U}\|_{\tilde{H}_1} + \|\tilde{f}\|_{0,D} + \|\tilde{g}\|_{0,\Gamma_D}$。记

$$D^+\cap B_{\frac{\delta}{2}} = D_1,\quad D^-\cap B_{\frac{\delta}{2}} = D_2,$$

任取 $\varphi_i \in \mathring{H}_1(D)$，且 supp $\varphi_i \subset\subset D_i$ $(i=1,2)$，从而 $\phi_i=(\varphi_i,0)\in \widetilde{\mathbb{H}}_1$。在(13)中取 $\widetilde{V}=\phi_i$，即得：

$$\iint_{D_i}\left[\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \xi}\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}+\left(\psi'\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \xi}+\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \eta}\right)\left(\psi'\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}+\frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta}\right)\right]d\xi d\eta=\int_{D_i}\tilde{f}\varphi_i d\xi d\eta \qquad (i=1,2).$$

于是，由 φ_i 的任意性便得：

$$(1+\psi'^2)\frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial \xi^2}=-\left(\tilde{f}+2\psi'\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}+\psi''\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \xi}\right)\in L_2(D_i).$$

从而 $\dfrac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial \xi^2}\in L_2(D_i)$ $(i=1,\ 2)$，且有估计 $\left\|\dfrac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial \xi^2}\right\|_{0,D_i}\leqslant CK$（此处，变化以后的常数仍记为 C）。换回原变量，得：$u_\Gamma \in H_2(\Gamma\cap U_\delta(P_0))$，$u_i\in H_2(U_\delta(P_0)\cap \Omega_i)$ $(i=1,2)$，其中 $U_\delta(P_0)$ 为 $B_{\frac{\delta}{2}}$ 在变换(12)下的原象，且有估计：

$$\|u_\Gamma\|_{2,\Gamma\cap U_\delta(P_0)}+\|u_i\|_{2,U_\delta(P_0)\cap \Omega_i}\leqslant CK \qquad (i=1,2).$$

一般来说，上式右端的常数 C 及 δ 与 P_0 有关，但利用有限复盖定理易知，存在与 $P_0\in\Gamma$ 无关的 $\delta>0$ 和 $C>0$，使上式在 Γ 附近宽度为 2δ 的带形区域上一致地成立。

综合以上所有局部估计，再由有限复盖定理即知定理 1 的结论成立。

§2　定理 2 的证明

因 u_1，u_2 分别是下述 Dirichlet 问题的解：

$$\begin{cases}-\Delta u_1=f_1 & (\text{在 } \Omega_1 \text{ 内}),\\ u_1|_\Gamma=u_\Gamma, & \\ u_1|_{\partial\Omega_1\setminus\Gamma}=0\end{cases} \qquad \text{和} \qquad \begin{cases}-\Delta u_2=f_2 & (\text{在 } \Omega_2 \text{ 内}),\\ u_2|_\Gamma=u_\Gamma.\end{cases}$$

由于 $u_\Gamma\in H_2(\Gamma)$，$f_1\in H_{S+\frac{1}{2}}(\Omega_1')$ $(S\geqslant 0)$ 和 $\Gamma\in C^\infty$，所以根据[6]便得

$$u_1\in H_{2+\frac{1}{2}}(\Omega_1').$$

同理有

$$u_2\in H_{2+\frac{1}{2}}(\Omega_2).$$

又因 u_1，u_2 是问题(Ⅰ)的广义解，故在 Γ 上满足：

$$\frac{d^2u_\Gamma}{ds^2}=-\frac{1}{A}\left(\frac{\partial u_1}{\partial n}\bigg|_{\Gamma+0}-\frac{\partial u_2}{\partial n}\bigg|_{\Gamma-0}+g\right).$$

由迹定理[4]知 $\dfrac{\partial u_i}{\partial n}\bigg|_\Gamma \in H_1(\Gamma)$，$(i=1,2)$，又由假设 $g\in H_{S+1}(\Gamma)$，所以 $\dfrac{d^2u_\Gamma}{ds^2}\in H_1(\Gamma)$ 于是便推出 $u_\Gamma\in H_3(\Gamma)$。重复以上的讨论可得：

$$u\in H_{S+2+\frac{1}{2}}(\Omega_1')\cap H_{S+2+\frac{1}{2}}(\Omega_2),\ u_\Gamma\in H_{S+3}(\Gamma).$$

于是定理 2 获证。

最后我们指出，若在定理 2 的假设中进一步要求：

$$4)\ tr_{\partial\Omega}D^kf=0,\ k=0,2,4,\cdots,2\left[\frac{s}{2}\right],$$

则利用奇延拓可以证明问题(I)在图1所示的组合流形上的广义解$U=(u,u_\Gamma)$还满足:

$$u\in H_{S+2+\frac{1}{2}}(\Omega_1)\cap H_{S+2+\frac{1}{2}}(\Omega_2),\quad u_\Gamma\in H_{S+3}(\Gamma).$$

定理2′的证明是类似的。

最后，由Sobolev嵌入定理[4]可知，当$S>\frac{1}{2}$时，问题(I)的广义解亦是问题(I)的古典解。

参 考 文 献

[1] 姜礼尚等，板一梁组合构件的有限元解法及其误差估计，计算数学，2(1980)，154—171.

[2] 冯康，组合流形上的椭圆型方程与弹性结构，计算数学，3(1979)，199—207.

[3] L. Nirenberg, Remarks on strongly elliptic partical differential equations, *comm, pure and appl. math*, 8(1955) 649—675.

[4] R. A. Adams, Sobolev spaces, New York, Academic press(1975).

[5] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, Elliptic partical differential equation of second order, springer-verlag (1977).

[6] J. L. Lions, E. Magenes, Non-Homogeneous boundary value problems and applications, Vol.1, Springer-verlag (1972).

Regularity of a Weak Solution for Poisson Equation which Defines on a Composed Manifold

Jiang Lishang, Cheng Zhongci and Wang Renjun

Abstract

In this Paper, as a model, we consider the following problem

$$\begin{cases}\Delta u_i=f_i & in\ \ \Omega_i\ \ (i=1,2),\\ u_1|_{\Gamma+0}=u_2|_{\Gamma-0}=u_\Gamma & on\ \Gamma,\\ A\dfrac{d^2u_\Gamma}{ds^2}+\dfrac{\partial u_1}{\partial n}\Big|_{\Gamma+0}-\dfrac{\partial u_2}{\partial n}\Big|_{\Gamma-0}+g=0 & on\ \Gamma,\\ u=0 & on\ \partial\Omega.\end{cases}$$

We prove that the solution is sufficiently smooth on Ω_i $(i=1,2)$, if curves $\partial\Omega,\Gamma$ and data g, f_i $(i=1,2)$ are sufficiently smooth too.