第3卷 第2期
1983年4月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.3 No.2
Apr. 1983

关于积分$\int f(x,\{\lambda x\})dx$渐近展开的一种新推导及余项估计*

王 兴 华

（杭州大学）

关于积分$\int f(x,\{\lambda x\})dx$带准确余项表示的渐近展开公式（即下文式(8)）概括了关于剧烈振荡函数近似积分法的一系列工作[1-9]，这个公式的得到是经过曲折的研究和探索[1-5],[10]的。

本文将给这个公式以一个很简洁的证明，然后对余项做出较明快的估计。虽说根据Lebesgue积分的理论，下文得到的那些结果的条件都还可以进一步削弱，但本文强调简洁明快，希望在理论上突出实质并使应用称便，因此我们宁愿以连续性作为基本假设。

设r为任意一个正整数，λ为任意一个正数。

定理1 设带形区域$[0,1]\times(-\infty,\infty)$上的二元连续函数$f(x,y)$对$x$具有直至$r$阶的连续偏导数，对$y$是周期的，周期是一。则

$$\int_0^1 f(x,\lambda x)dx=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy$$
$$+\sum_{\nu=1}^{r}\frac{\lambda^{-\nu}}{\nu!}\left[\int_\lambda^{\lambda+1} f^{(\nu-1,0)}(1,y)\,B_\nu(y-\lambda)dy-\int_0^1 f^{(\nu-1,0)}(0,y)B_\nu(y)dy\right]$$
$$-\frac{\lambda^{-r}}{r!}\int_0^1 dx\int_{\lambda x}^{\lambda x+1} f^{(r,0)}(x,y)B_r(y-\lambda x)dy, \tag{1}$$

式中$f^{(\nu,0)}(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu f(x,y)$，$B_\nu(y)$是$\nu$次Bernoulli多项式。

证 写

$$a_\nu(x)=\frac{\lambda^{-\nu}}{\nu!}\int_{\lambda x}^{\lambda x+1} f^{(\nu-1,0)}(x,y)B_\nu(y-\lambda x)dy. \tag{2}$$

我们有

$$a_\nu(1)-a_\nu(0)=\frac{\lambda^{-\nu}}{\nu!}\left[\int_\lambda^{\lambda+1} f^{(\nu-1,0)}(1,y)B_\nu(y-\lambda)dy\right.$$
$$\left.-\int_0^1 f^{(\nu-1,0)}(0,y)B_\nu(y)dy\right]. \tag{3}$$

另一方面，由关于含参变量积分的Leibniz求导法则，

$$a_\nu'(x)=\frac{\lambda^{-\nu}}{\nu!}\int_{\lambda x}^{\lambda x+1} f^{(\nu,0)}(x,y)B_\nu(y-\lambda x)dy$$

*1981年10月4日收到。

$$-\frac{\lambda^{-\nu+1}}{(\nu-1)!}\int_{\lambda x}^{\lambda x+1} f^{(\nu-1,0)}(x,y)B_{\nu-1}(y-\lambda x)dy$$

$$+\frac{\lambda^{-\nu+1}}{\nu!}[f^{(\nu-1,0)}(x,\lambda x+1)B_\nu(1)-f^{(\nu-1,0)}(x,\lambda x)B_\nu(0)]. \tag{4}$$

由于 $f^{(\nu-1,0)}(x,y)$ 关于 y 的周期性，以及 $B_\nu(1)=B_\nu(0)$ $(\nu\geqslant 2)$，$B_1(1)-B_1(0)=1$，在式（4）中

$$\frac{\lambda^{-\nu+1}}{\nu!}[f^{(\nu-1,0)}(x,\lambda x+1)B_\nu(1)-f^{(\nu-1,0)}(x,\lambda x)B_\nu(0)]=\begin{cases}0 & (2\leqslant\nu\leqslant r),\\ f(x,\lambda x) & (\nu=1).\end{cases} \tag{5}$$

因此

$$\sum_{\nu=1}^{r}[a_\nu(1)-a_\nu(0)]=\sum_{\nu=1}^{r}\int_0^1 a_\nu'(x)dx$$

$$=-\int_0^1 dx\int_{\lambda x}^{\lambda x+1}f(x,y)dy+\int_0^1 f(x,\lambda x)dx$$

$$+\frac{\lambda^{-r}}{r!}\int_0^1 dx\int_{\lambda x}^{\lambda x+1}f^{(r,0)}(x,y)B_r(y-\lambda x)dy. \tag{6}$$

$f(x,y)$ 关于 y 在任何一个周期上的积分都相等，所以

$$\int_0^1 f(x,\lambda x)dx=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy+\sum_{\nu=1}^{r}[a_\nu(1)-a_\nu(0)]$$

$$-\frac{\lambda^{-r}}{r!}\int_0^1 dx\int_{\lambda x}^{\lambda x+1}f^{(r,0)}(x,y)B_r(y-\lambda x)dy. \tag{7}$$

以式（3）代入式(7)，即得式（1）。证毕。

定理 2 设单位正方形区域 $[0,1]\times[0,1]$ 上的二元连续函数 $f(x,y)$ 对 x 具有直至 r 阶的连续偏导数。则

$$\int_0^1 f(x,\{\lambda x\})dx=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy$$

$$+\sum_{\nu=1}^{r}\frac{\lambda^{-\nu}}{\nu!}\int_0^1[f^{(\nu-1,0)}(1,y)\bar{B}_\nu(y-\lambda)-f^{(\nu-1,0)}(0,y)B_\nu(y)]dy$$

$$-\frac{\lambda^{-r}}{r!}\int_0^1\int_0^1 f^{(r,0)}(x,y)\bar{B}_r(y-\lambda x)dxdy, \tag{8}$$

式中 $\{y\}$ 表 y 的小数部分，$\bar{B}_\nu(y)=B_\nu(\{y\})$ 是 Bernoulli 函数。

证 若 $f(x,0)=f(x,1)$，则 $f(x,\{y\})$ 满足定理 1 的条件，由式（1）得

$$\int_0^1 f(x,\{\lambda x\})dx=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy$$

$$+\sum_{\nu=1}^{r}\frac{\lambda^{-\nu}}{\nu!}\Big[\int_\lambda^{\lambda+1}f^{(\nu-1,0)}(1,\{y\})\bar{B}_\nu(y-\lambda)dy$$

$$-\int_0^1 f^{(\nu-1,0)}(0,\{y\})B_\nu(y)dy\Big]$$

$$-\frac{\lambda^{-r}}{r!}\int_0^1 dx\int_{\lambda x}^{\lambda x+1}f^{(r,0)}(x,\{y\})\bar{B}_r(y-\lambda x)dy. \tag{9}$$

式（9）中有两处 Bernoulli 多项式已改写成 Bernoulli 函数，之所以可以如此是因为其自变量位于（0,1）中。这样一来，积分$\int_{\lambda}^{\lambda+1}\cdots dy$和$\int_{\lambda x}^{\lambda x+1}\cdots dy$中的被积函数是周期为 1 的周期函数，故而这两个积分又都可以写成$\int_0^1\cdots dy$，这时被积函数变元位置上的$\{y\}$可以写成y，式(9) 成了式（8）。

当$f(x,0)=f(x,1)$的条件不满足时，$f(x,\{y\})$在$[0,1]\times(-\infty,\infty)$上仅为分片连续的。这时，反省定理 1 的证明，我们在求$a_\nu'(x)$时可以就$x\in\left(\frac{i-1}{\lambda},\ \frac{i}{\lambda}\right)\cap(0,1)$ $(i=1,2,\cdots,i<\lambda+1)$ 把$a_\nu(x)$表成两个积分之和$\int_{\lambda x}^{i}\cdots dy+\int_{i}^{\lambda x+1}\cdots dy$，分别对每个积分应用 Leibniz 法则，如此最终仍将导致相同的结果。证毕。

定理 3　在定理 2 的条件下，当实参数λ趋向于正无穷时，

$$\int_0^1 f(x,\{\lambda x\})dx=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy$$
$$+\sum_{\nu=1}^{r}\frac{\lambda^{-\nu}}{\nu!}\int_0^1[f^{(\nu-1,0)}(1,y)\bar{B}_\nu(y-\lambda)-f^{(\nu-1,0)}(0,y)B_\nu(y)]dy+o(\lambda^{-r}).\tag{10}$$

证　由徐利治扩充的（参见文献[11]，第 262 页命题 154）Fejér[12]引理，当$\lambda\to\infty$时

$$\lim\left[-\frac{1}{r!}\int_0^1\int_0^1 f^{(r,0)}(x,y)\bar{B}_r(y-\lambda x)dxdy\right]$$
$$=-\frac{1}{r!}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f^{(r,0)}(x,y)\bar{B}_r(y-w)dwdxdy=0.\tag{11}$$

证毕。

对区间$[0,1]$上的连续函数$\varphi(y)$以及区域$[0,1]\times[0,1]$上的二元连续函数$g(x,y)$，记

$$\|\varphi\|=\sqrt{\int_0^1\varphi(y)^2dy},\quad \|g\|=\sqrt{\int_0^1\int_0^1 g(x,y)^2dxdy}.\tag{12}$$

定理 4　在定理 2 的条件下，写

$$S_{r-1}(f,\lambda)=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy+\sum_{\nu=1}^{r-1}\frac{\lambda^{-\nu}}{\nu!}\int_0^1[f^{(\nu-1,0)}(1,y)\bar{B}_\nu(y-\lambda)$$
$$-f^{(\nu-1,0)}(0,y)B_\nu(y)]dy\tag{13}$$

时，成立不等式

$$\left|\int_0^1 f(x,\{\lambda x\})dx-S_{r-1}(f,\lambda)\right|\leqslant\lambda^{-r}\left[\sqrt{2(-1)^{r-1}\left(\frac{B_{2r}}{(2r)!}+\frac{B_{2r+1}(\{-\lambda\})}{(2r+1)!\lambda}\right)}\|f^{(r,0)}\|\right.$$
$$\left.+\sqrt{2(-1)^{r-1}\frac{B_{2r}-B_{2r}(\{-\lambda\})}{(2r)!}}\|f^{(r-1,0)}(1,\cdot)\|\right].\tag{14}$$

若λ为整数，则不等式（14）的右端简化为$\lambda^{-r}\sqrt{2(-1)^{r-1}\frac{B_{2r}}{(2r)!}}\|f^{(r,0)}\|$.

证　由式（8）和（13），

$$\int_0^1 f(x,\{\lambda x\})dx - S_{r-1}(f,\lambda)$$

$$= -\frac{\lambda^{-r}}{r!}\int_0^1\int_0^1 f^{(r,0)}(x,y)[\bar{B}_r(y-\lambda x)-B_r(y)]dxdy$$

$$+\frac{\lambda^{-r}}{r!}\int_0^1 f^{(r-1,0)}(1,y)[\bar{B}_r(y-\lambda)-B_r(y)]dy. \tag{15}$$

对上式右端的两项分别应用Cauchy不等式，经过如下的计算即得不等式（14）：

$$\frac{1}{r!^2}\int_0^1\int_0^1(\bar{B}_r(y-\lambda x)-B_r(y))^2dxdy$$

$$=\frac{1}{r!^2}\int_0^1 dx\int_0^1(\bar{B}_r(y-\lambda x)^2-2\bar{B}_r(y-\lambda x)B_r(y)+B_r(y)^2)dy$$

$$=\frac{2}{r!^2}\int_0^1 dx\int_0^1(B_r(y)-\bar{B}_r(y-\lambda x))B_r(y)dy$$

$$=2\int_0^1\left\{\sum_{\nu=0}^{r-1}(-1)^\nu\frac{B_{r+\nu+1}(y)-\bar{B}_{r+\nu+1}(y-\lambda x)}{(r+\nu-1)!}\cdot\frac{B_{r-\nu}(y)}{(r-\nu)!}\right|_{y=0}^{y=1}$$

$$\left.+(-1)^r\int_0^1\frac{B_{2r}(y)-B_{2r}(y-\lambda x)}{(2r)!}dy\right\}dx=2(-1)^{r-1}\int_0^1\frac{B_{2r}-\bar{B}_{2r}(-\lambda x)}{(2r)!}dx$$

$$=2(-1)^{r-1}\left[\frac{B_{2r}}{(2r)!}+\frac{\bar{B}_{2r+1}(-\lambda)}{(2r+1)!\lambda}\right]; \tag{16}$$

$$\frac{1}{r!^2}\int_0^1(\bar{B}_r(y-\lambda)-B_r(y))^2dy$$

$$=\frac{2}{r!^2}\int_0^1(B_r(y)-\bar{B}_r(y-\lambda))B_r(y)dy=2(-1)^{r-1}\frac{B_{2r}-\bar{B}_{2r}(-\lambda)}{(2r)!}. \tag{17}$$

证毕。

定理5　设$\varphi(x)$是区间$[0,1]$上r次连续可微的函数，而$\psi(x)$是一个连续的周期函数，周期是一，则对

$$I=\int_0^1\varphi(x)\psi(\lambda x)dx, \tag{18}$$

$$S_r=\int_0^1\varphi(x)dx\int_0^1\psi(x)dx+\sum_{\nu=1}^{r}\frac{\lambda^{-\nu}}{\nu!}\left[\varphi^{(\nu-1)}(1)\int_\lambda^{\lambda+1}\psi(x)B_\nu(x-\lambda)dx\right.$$

$$\left.-\varphi^{(\nu-1)}(0)\int_0^1\psi(x)B_\nu(x)dx\right], \tag{19}$$

当$\lambda\to\infty$时有

$$I=S_r+o(\lambda^{-r}), \tag{20}$$

其中

$$o(\lambda^{-r}) = -\frac{\lambda^{-r}}{r!}\int_0^1 \varphi^{(r)}(x)\int_{\lambda x}^{\lambda x+1}\psi(t)B_r(t-\lambda x)\,dt\,dx; \tag{21}$$

又有

$$I = S_{r-1} + O(\lambda^{-r}), \tag{22}$$

其中

$$|O(\lambda^{-r})| \leqslant \lambda^{-r}\left[\sqrt{2(-1)^{r-1}\left(\frac{B_{2r}}{(2r)!}+\frac{B_{2r+1}(\{-\lambda\})}{(2r+1)!\lambda}\right)}\,\|\varphi^{(r)}\| + \sqrt{2(-1)^{r-1}\frac{B_{2r}-B_{2r}(\{-\lambda\})}{(2r)!}\,|\varphi^{(r-1)}(1)|}\,\right]\|\psi\|. \tag{23}$$

证　这是于定理 1 、定理 3 和定理 4 中置 $f(x,y)=\varphi(x)\cdot\psi(y)$ 的结果．证毕．

例（见文献[1]，第 265 页）．倘要计算积分

$$I = \int_0^1 \cos(2\pi x)\sin(25\pi x)\,dx,$$

则可于定理 5 取 $\varphi(x)=\cos(2\pi x)$，$\psi(x)=\sin(2\pi x)$，$\lambda=12.5$，$r=2m+1$，从而得到 I 的近似序列

$$S_{2m} = \sum_{k=1}^{m}\frac{2(-1)^k(2\pi)^{2k-2}}{(2k-1)!}\left(\frac{2}{25}\right)^{2k-1}\int_0^1 \sin(2\pi x)B_{2k-1}(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{2}{25}\right)^{2k-1} \qquad (m=1,2,3,\cdots).$$

由于

$$\|\varphi^{(r)}\| = 2^{r-\frac{1}{2}}\pi^r,\quad \|\psi\| = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{|B_{2r}|}{(2r)!} = \frac{1}{2^{2r-1}\pi^{2r}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2r}} \approx \frac{1}{2^{2r-1}\pi^{2r}},$$

所以由（23）大致上有

$$|I-S_{2m}| \lesssim \left(\frac{2}{25}\right)^{2m+1}\left(1+\frac{1}{\pi}\right).$$

由是得

$$|I-S_2| \lesssim 0.00067,\quad |I-S_4| \lesssim 0.0000044^{1)}.$$

事实上，$S_2 = \frac{2}{25\pi} = 0.0254648$，$S_4 = \left(1+\left(\frac{2}{25}\right)^2\right)\frac{2}{25\pi} = 0.0256278$，$I = \left(1-\left(\frac{2}{25}\right)^2\right)^{-1}\frac{2}{25\pi} = 0.0256288$，从而

$$I-S_2 = 0.00016,\quad I-S_4 = 0.0000010,$$

可见定理 4 和定理 5 的余项估计式（14）和（23）是十分有效的．

1)文献[1]中的 S_2 和 S_4 数值计算有误，因而误差比此界大．

参考文献

[1] 徐利治、周蕴时，高维数值积分，科学出版社，1980.
[2] 徐利治、周蕴时，应用数学学报，3(1980)，204—209.
[3] 徐利治(Hsu, L. C.)，Proc. Comb. Phil. Soc. 59(1963)，81—88.
[4] 徐利治，科学记录(新辑)，3(1959)，438—442.
[5] 徐利治，科学记录(新辑)，2(1958)，193—196.
[6] Havie, T., BIT, 13(1973), 16—29.
[7] Риекстыньш, Э., Ученые записки лгу 41(1961), вып. 5, 5—23.
[8] Крылов, В. И., Докл. АН СССР, 108(1956), 1014—1017.
[9] Еругин, Н. П. и Соболев, С. л, Прикл. матем. и механ., 14(1950), 193—196.
[10] 王兴华，关于积分$\int f(x,\{Nx\})dx$带准确余项的展开公式.
[11] 徐利治，数学分析的方法及例题选讲，高等教育出版社，1958.
[12] Fejér, L., JRAM, 138(1910), 22—53.

A New Method of Deriving the Asymptotic Expansion of the Integral $\int f(x,\{\lambda x\})dx$ and Its Remainder Estimates

Wang Xinghua (王兴华)

(Hangzhou University)

Abstract

Assume that $f(x,y)$ is a continuous function defined on unit square $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$ and having continuous partial derivatives with respect to x, of orders up to r, where r is a positive integer. In a recent work, applying Euler-Maclaurin formula, the following expansion has been proved:

$$\int_0^1 f(x,\{\lambda x\})\,dx=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dxdy-\sum_{\nu=1}^{r}A_\nu\lambda^{-\nu}$$

$$-\frac{\lambda^{-r}}{r!}\int_0^1\int_0^1 f^{(r,0)}(x,y)\,\bar{B}_r(y-\lambda x)\,dxdy, \tag{*}$$

where λ is a positive number, $\{\lambda\}$ denoting the decimal part of λ, $B_\nu(y)$ denoting the Bernoulli polynomial of degree ν, $\bar{B}_\nu(y)=B_\nu(\{y\})$ is the Bernoulli function and

$$A_\nu=\frac{1}{\nu!}\int_0^1[f^{(\nu-1,0)}(1,y)\bar{B}_\nu(y-\lambda)-f^{(\nu-1,0)}(0,y)B_\nu(y)]dy.$$

Here, a new method of deriving the expansion (*) without the basis of Euler-Maclaurin formula is provided, and the equality

$$\left|\int_0^1 f(x,\{\lambda x\})\,dx-\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dxdy-\sum_{\nu=1}^{r-1}A_\nu\lambda^{-\nu}\right|$$

$$\leqslant\lambda^{-r}\left[2(-1)^{r-1}\left(\frac{B_{2r}}{(2r)!}+\frac{\bar{B}_{2r+1}(-\lambda)}{(2r+1)!\lambda}\right)\right]^{\frac12}\left[\int_0^1\int_0^1 f^{(r,0)}(x,y)^2\,dxdy\right]^{\frac12}$$

$$+\lambda^{-r}\left[2(-1)^{r-1}\frac{B_{2r}-\bar{B}_{2r}(-\lambda)}{(2r)!}\right]^{\frac12}\left[\int_0^1 f^{(r-1,0)}(1,y)^2\,dy\right]^{\frac12}$$

is proved, where $B_\nu=B_\nu(0)$ is the Bernoulli number.