

保凸插值样条曲线

程正兴

(西安交通大学)

1 引言 曲线设计是设计工程的重要课题。用向量样条^[8],可使曲线经过型值点且有很好的逼近性质,但没有保凸性; Bézier 曲线, B-样条曲线等一类向量线性正算子^{[9][10]},有很好保凸性,但一般只通过首尾两个型值点。在实际设计中提出这样的问题:能否使所作曲线既过型值点,又有保凸性呢?大家知道,逼近论与样条理论最基础的是研究一元函数逼近与插值,所以[8][9]很自然地推广至逼近与插值向量值函数 $F(t):[a,b] \rightarrow X$ (X 为 Banach 空间)。但是,[8][9]的方法不能用于把平面曲线逼近与拟合算法[2—7]向多维推广。

本文的目的是构造与坐标系选取无关的 C^1 、 C^2 连续的曲线保凸及插值的平面算法,并把本文及以前的平面算法用到构造多维曲线中去。

2 二次保凸插值样条曲线 二、三次 Bézier 曲线的良好性质使可对它们进行光滑连接并保证所需的保形性与插值性。这儿的光滑连接还不需解方程组。

给型值点 $P_i(x_i, y_i), i=0, 1, \dots, n$ 。以这些点为基础形成 $n+m$ 个接点,并形成 $n+m-1$ 个两边形,以便构成 $n+m-1$ 段二次 Bézier 曲线。所用方法与所选取的坐标系无关。

先处理内部型值点。记 $I_i = \{x | (x-x_i)(x_{i+1}-x_{i-1}) \geq 0\}$, $I_i^* = \{x | (x-x_i)(x_{i+1}-x_{i-1}) \leq 0\}$ 。又记 $C_i(x, y) = (y-y_i)(x_{i+1}-x_{i-1}) - (y_{i+1}-y_{i-1})(x-x_i)$ 。则从 P_i 发出且平行于 $|P_{i-1}P_{i+1}|$ 的射线方程为: $C_i(x, y) = 0, x \in I_i$ 。以后这个射线方程记为集合 $\{(x, y) | C_i(x, y) = 0, x \in I_i\}, i=1, 2, \dots, n-1$ 。这时进入 P_i 且平行于 $|P_{i-1}P_{i+1}|$ 的射线方程为集合 $\{(x, y) | C_i(x, y) = 0, x \in I_i^*\}, i=1, 2, \dots, n-1$ 。

(一) 在 $C_i(x_{i+2}, y_{i+2}) \neq 0$ 时

$$1) \{(x, y) | C_i(x, y) = 0, x \in I_i\} \cap \{(x, y) | C_{i+1}(x, y) = 0, x \in I_{i+1}^*\} \quad (1)$$

非空,这个唯一公共点记为 Q_i 。

$$2) \{(x, y) | C_i(x, y) = 0, x \in I_i^*\} \cap \{(x, y) | C_{i+1}(x, y) = 0, x \in I_{i+1}\}$$

非空,公共点为 (x, y) ,则取点 $[(1-a/2)(x_i+x_{i+1}) - (1-a)x], [(1-a/2)(y_i+y_{i+1}) - (1-a)y]$ 为新节点 P_i' ,其中 $0 \leq a < 1$ 为实参数(特别可取 $a=0$)。这时记: $Q_i \equiv [(2-a)x_i - (1-a)x], [(2-a)y_i - (1-a)y]$, $Q_i' \equiv [(2-a)x_{i+1} - (1-a)x], [(2-a)y_{i+1} - (1-a)y]$ 。

1981年5月21日收到。

3) $\{(x, y) | C_i(x, y) = 0, x \in I_i\} \cap \{(x, y) | C_{i+1}(x, y) = 0, x \in I_{i+1}\}$ 或 $\{(x, y) | C_i(x, y) = 0, x \in I_i^*\} \cap \{(x, y) | C_{i+1}(x, y) = 0, x \in I_{i+1}^*\}$ 之一非空. 这时取 $P'_i \equiv ((x_i + x_{i+1})/2, (y_i + y_{i+1})/2)$; $Q_i \equiv ([x_i + \beta(x_{i+1} - x_{i-1})], [y_i + \beta(y_{i+1} - y_{i-1})])$, 其中 β 为正实参数 (一般选 β 较小, 如 $\beta \leq 1/4$), 而 Q'_i 取为下述方程组的解 (选 β 小到使 (2) 有解):

$$\begin{cases} [2y - (y_i + y_{i+1})][1 - 2\beta]x_{i+1} - x_i + 2\beta x_{i-1}] \\ = [2x - (x_i + x_{i+1})][1 - 2\beta]y_{i+1} - y_i + 2\beta y_{i-1}] \\ C_{i+1}(x, y) = 0, \quad x \in I_{i+1}^*. \end{cases} \quad (2)$$

(二) 在 $C_i(x_{i+2}, y_{i+2}) = 0$ 时

1) $y_{i+1} - y_{i-1}$ 与 $y_{i+2} - y_i$ 同号时, 取 $P'_i \equiv ([x_i + x_{i+1}]/2, [y_i + y_{i+1}]/2)$, 而取 $Q_i \equiv ([\gamma x_i + (1-\gamma)x_{i+2}], [\gamma y_i + (1-\gamma)y_{i+2}])$, $Q'_i \equiv ([1-\gamma]x_i + x_{i+1} - (1-\gamma)x_{i+2}], [(1-\gamma)y_i + y_{i+1} - (1-\gamma)y_{i+2}])$ 其中 $0 < \gamma \leq 1$ 为实参数.

2) $y_{i+1} - y_{i-1}$ 与 $y_{i+2} - y_i$ 异号时, 取 $Q_i \equiv ([1+a]x_i - ax_{i+2}], [(1+a)y_i - ay_{i+2}])$, $P'_i \equiv ([1/2+a]x_i + 1/2x_{i+1} - ax_{i+2}], [(1/2+a)y_i + (1/2)y_{i+1} - ay_{i+2}])$, $Q'_i \equiv ([ax_i + x_{i+1} - ax_{i+2}], [ay_i + y_{i+1} - ay_{i+2}])$, 其中 a 为大于零的实参数.

(三) 在两个端点处, Q_0 与 Q_{n-1} 分别取为下述方程组的解:

$$\begin{cases} [2y - (y_0 + y_1)](x_1 - x_0) = -[2x - (x_0 + x_1)](y_1 - y_0), \\ C_1(x, y) = 0, \quad x \in I_1^* \\ C_{n-1}(x, y) = 0, \quad x \in I_{n-1} \\ [2y - (y_n + y_{n-1})](x_{n-1} - x_n) = -[2x - (x_n + x_{n+1})](y_{n-1} - y_n). \end{cases}$$

现在, 设新增加的接点 P'_i 为 $m-1$ 个. 重排接点为 $P_0, P'_0, P_1, P'_1, \dots, P_i, P'_i, \dots, P_{n-1}, P'_{n-1}, P_n$ (在 P'_i 不存在时, 取 $Q'_i \equiv (0, 0)^T$). 引入记号 ϕ_i : $\phi_0 = 0, \phi_{n-1} = 0$, 对于 $i = 1, 2, \dots, n-2$, 当 (1) 非空时, 令 $\phi_i = 0$, 否则 $\phi_i = 1$. 给平面上三点 A_1, A_2, A_3 , 定义曲线段

$$B(A_1, A_2, A_3, t) = \begin{cases} 0, & \text{当 } t \in [0, 1] \text{ 时,} \\ A_1(1-t)^2 + 2A_2(1-t)t + A_3t^2, & \text{当 } t \in [0, 1] \text{ 时.} \end{cases} \quad (3)$$

所以, 我们所要求的二次保凸插值曲线为

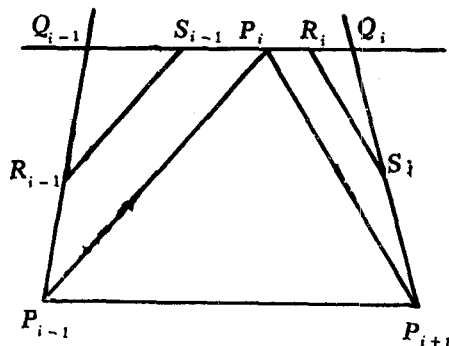
$$B_2(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ B(P_i, Q_i, P'_i, (1+\phi_i)(t-i)) + B(P'_i, Q'_i, P_{i+1}, \right. \\ \left. \times (1+\phi_i)\left(t-i-\frac{\phi_i}{2}\right)\right\} \quad t \in [0, n]. \quad (4)$$

由 (4), 我们是对每个 Bézier 两边形做二次 Bézier 曲线. 由于 Bézier 曲线的起点和终点分别是它的特征多边形的第一和最后一个顶点, 且在始点和终点处分别同它所对应的特征多边形的第一和最后一条边相切. 这样就得到 C^1 光滑的二次保凸插值曲线.

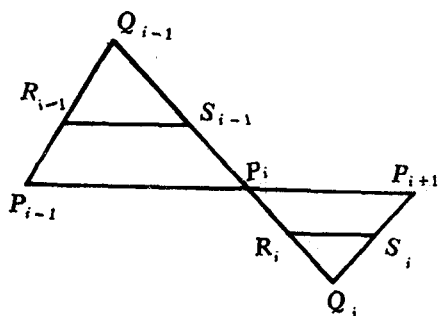
附注: 1°. 本节方法可用于已知型值点及每点上切线方向的问题. 2°. 如果作闭曲线, 即周期情形, 这时增加两点 $P_{-1} \equiv P_n, P_{n+1} \equiv P_0$ 使点列 P_0, P_1, \dots, P_n 都变成内部点以产生新点. 3°. 对凸数据, 只有 (1) 式非空情形, 问题变得特别简单.

3 三次保凸插值样条曲线 为此作出合适的一系列 Bézier 三角形即可。对点列 $\{P_i\}_0^n$, 如 2, 设新增加的接点 P'_i 为 $m-1$ 个。重排接点为 $P_0, P'_0, P_1, P'_1, \dots, P_i, P'_i, \dots, P_{n-1}, P'_{n-1}, P_n$ (P'_i 不存在时不排, 设这样的 i 组成的集合为 K , 即 $K \equiv \{i \mid i=0, 1, \dots, n-1, (1) \text{ 非空}\}$). 并还记接点为 $\{P_i\}_0^{n+m-1}$. 也如上重排 Q_i, Q'_i 并记为 $\{Q_i\}_0^{n+m-2}$ (P_i 坐标为 (x_i, y_i) Q_i 坐标为 (x_i^*, y_i^*)).

现在讨论对相邻的两边形, 当前边一个两边形已产生固定的 Bézier 三角形后, 怎样产生后-Bézier 三角形, 而使相邻两段 Bézier 曲线达到曲率连续。这只有两种情况, 我们一起讨论: 如图一、二, $P_{i-1}R_{i-1}S_{i-1}P_i$ 是已产生好的 Bézier 三角形, 且有 $(y_i - y_{i-1})$ ($\tilde{x}_{i-1} - \bar{x}_{i-1}$) = $(\tilde{y}_{i-1} - \bar{y}_{i-1})(x_i - x_{i-1})$, 其中 $(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1})$ 与 $(\tilde{x}_{i-1}, \tilde{y}_{i-1})$ 分别是 R_{i-1}, S_{i-1} 的坐标。而 $(0 < \lambda_{i-1} < 1)$



图一



图二

$$\begin{cases} \bar{x}_{i-1} = \lambda_{i-1}x_{i-1} + (1-\lambda_{i-1})x_{i-1}^*, \\ \bar{y}_{i-1} = \lambda_{i-1}y_{i-1} + (1-\lambda_{i-1})y_{i-1}^*, \end{cases} \begin{cases} \tilde{x}_{i-1} = \lambda_{i-1}x_i + (1-\lambda_{i-1})x_i^*, \\ \tilde{y}_{i-1} = \lambda_{i-1}y_i + (1-\lambda_{i-1})y_i^*. \end{cases} \quad (5)$$

记 $P_{i-1}R_{i-1}S_{i-1}P_i$ 做成的 Bézier 曲线为 $B_{i-1}(t)$ 。设 $\vec{a}_1^*, \vec{a}_2^*, \vec{a}_3^*$ 依次是三角形 $P_{i-1}R_{i-1}S_{i-1}P_i$ 的各边, 则: $B'_{i-1}(1) = 3\vec{a}_3^*$, $B'_{i-1}(1) = 6(\vec{a}_3^* - \vec{a}_2^*)$, 而这时 $\vec{a}_3^* = (1-\lambda_{i-1}) \cdot (x_{i-1}^* - x_i, y_{i-1}^* - y_i)^T$, $\vec{a}_2^* = \lambda_{i-1}(x_i - x_{i-1}, y_i - y_{i-1})^T$ 。设 K_i 是曲线 $B_{i-1}(t)$ 在 P_i 点的曲率, 则

$$K_i = \frac{2}{3} \left[\frac{|(x_{i-1}^* - x_i)[\lambda_{i-1}(y_{i-1} - y_i) - (1-\lambda_{i-1})(y_{i-1}^* - y_i)]|}{(1-\lambda_{i-1})^2 [(x_{i-1}^* - x_i)^2 + (y_{i-1}^* - y_i)^2]^{3/2}} - \frac{[\lambda_{i-1}(x_{i-1} - x_i) - (1-\lambda_{i-1})(x_{i-1}^* - x_i)](y_{i-1}^* - y_i)}{(1-\lambda_{i-1})^2 [(x_{i-1}^* - x_i)^2 + (y_{i-1}^* - y_i)^2]^{3/2}} \right] \quad (6)$$

为使整根曲线属于 C^2 , 必须使 $B_{i-1}(t)$ 与 $B_i(t)$ 在 P_i 点的曲率相等。 $B_i(t)$ 在 P_i 点的曲率与 (6) 类似, 只是在 (6) 中把 $x_{i-1}, y_{i-1}, x_{i-1}^*, y_{i-1}^*, \lambda_{i-1}$ 分别换为 $x_i, y_i, x_i^*, y_i^*, \lambda_i$ 的情形, 这时叫 (6') 式。由 (6) 计算 K_i , 再由 (6') 式计算 λ_i 。我们现在看 λ_i 计算公式并证明 $0 < \lambda_i < 1$ 。

命 $a \equiv x_i^* - x_i, b \equiv y_i^* - y_i, c \equiv x_{i+1} - x_i, d \equiv y_{i+1} - y_i, e \equiv \frac{3}{2}K_i(a^2 + b^2)^{3/2}$ 。则可得 $\lambda_i = 1 + |ad - bc| / (2e) \pm [(1 + |ad - bc| / (2e))^2 - 1]^{1/2}$ 。取

$$\lambda_i = 1 + |ad - bc| / (2e) - [(1 + |ad - bc| / (2e))^2 - 1]^{1/2} \quad (7)$$

即可知 $0 < \lambda_i < 1$.

附注 1°. 上述方法产生的曲线依赖曲线初始点的曲率值. 如给出其曲率值, 则曲线唯一确定; 否则可适当选取. 2°. 要作闭曲线时, 曲线唯一, 但要解方程组.

作三次保凸插值样条曲线步骤: 1° 确定型值点和各点切向量方程, 用 2. 的方法得到 $n+m-1$ 个 Bézier 两边形 $P_i Q_i P_{i+1}$, $i=0, 1, \dots, n+m-2$.

2° 给 K_0 , 用 (7) 计算 λ_0 . 设 λ_{i-1} 已算出, 用 (5) 计算 R_{i-1} , S_{i-1} , 进而用 (6) 计算 K_i , 再用 (7) 计算 λ_i ($i=1, 2, \dots, n+m-1$, 不必计算 λ_{n+m-1}).

3° 把 $\{P_i\}$, $i=0, \dots, n+m-2$ 换为原来的 $\{P_j\}$ $j=0, \dots, n$ 与 $\{P'_j\}$ $j=0, \dots, n-1$ (当 $j \in K$ 时, 取 $P'_j \equiv (0, 0)^T$), $\{R_i\}$, $\{S_i\}$, $i=0, \dots, n+m-2$ 边相应地变为 $\{R_j\}$, $\{R'_j\}$, $\{S_j\}$, $\{S'_j\}$, $j=0, \dots, n-1$ (当 $j \in K$ 时, 取 $R'_j \equiv (0, 0)^T$, $S'_j \equiv (0, 0)^T$).

4° 设 A_1, A_2, A_3, A_4 是平面上四点, 定义曲线段

$$B(A_1, A_2, A_3, A_4, t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1]. \\ A_1(1-t)^3 + 3A_2(1-t)^2t + 3A_3(1-t)t^2 + A_4t^3, & t \in [0, 1]. \end{cases} \quad (8)$$

我们所要求的 C^2 连续的三次保凸插值曲线为

$$B_3(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ B(P_i, R_i, S_i, P'_i, (1+\phi_i)(t-i)) + B(P'_i, R'_i, S'_i, P_{i+1}, \right. \\ \left. \times (1+\phi_i)(t-i - \frac{\phi_2}{2})) \right\}, t \in [0, n]. \quad (9)$$

附注 2.3 构造二次、三次保凸插值曲线的方法, 在 $\{(x, y) | C_i(x, y) = 0\}$ 与 $\{(x, y) | C_{i+1}(x, y) = 0\}$ 交为空集, 或交集不与型值点 P_i, P_{i+1} 重合时是合适的; 当交集与 P_i, P_{i+1} 之一重合时可对该方法变通使用 (参见 [7] 附注). 当然, 由于数据本身的原因本方法有时也是达不到 C^1, C^2 连续的, 如图三数据就是这样的. 3. 的方法在某个型值点 P_i 给定曲率 K_i 以代替在端点给定 K_0 也是适用的.

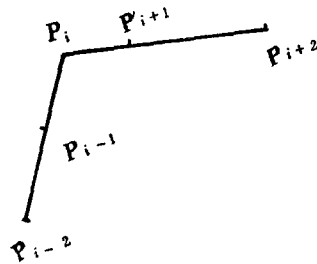
4. 曲线平面算法向多维的推广

近年来, 为了实用上的需要, 构造了许多平面曲线拟合算法 (如 [2][4, 5][7]). 我们把这些平面曲线算法推广到 n 维空间曲线的算法中去.

用 n 维空间的型值点, 借助于参数 τ 产生 n 组 $X_i T$ 平面 ($i=1, 2, \dots, n$) 上的型值点, 然后对于每个 $X_i T$ 平面的型值点, 用平面曲线算法 (设参数为 t), 得到同一参数 t 的 n 条平面曲线 $\Gamma_i(t)$, 则曲线 $\Gamma(t) \equiv (\Gamma_1(t), \dots, \Gamma_n(t))^T$ 即是一条作好的 n 维曲线, 现在给出基于 2. 3. 的 n 维曲线算法.

(一) 二次保凸插值曲线算法

1) 设 $\{P_j(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})\}_0^n$ 为 n 维空间的型值点, 点 P_j 所对应的参数为 τ_j . 这相当



图三

于区间 $[a, b] \equiv [\tau_0, \tau_m]$ 一个分划 $\Delta: a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m = b$. 求 $\Gamma(\tau): [a, b] \rightarrow R^n$, 使 $\Gamma(\tau_j) = P_j, j = 0, 1, \dots, m$. 设 $\Gamma(\tau) = (\Gamma_1(\tau), \Gamma_2(\tau), \dots, \Gamma_n(\tau))^T$, 其中 $\Gamma_i(\tau), i = 1, \dots, n$ 是它的分量. 现在做成 n 组点列 $\{P_{i,j}(x_{i,j}, \tau_j)\}_{j=0}^m, i = 1, \dots, n$. 我们把 $\{P_{i,j}\}_{j=0}^m$ 作为 $X_i T$ 平面上的型值点.

2) 对于 $X_i T (i = 1, \dots, n)$ 平面上的型值点 $\{P_{i,j}\}_{j=0}^m$, 用 2. 的办法生成点列 $\{Q_{i,j}\}, \{P'_{i,j}\}, \{Q'_{i,j}\}$ 和 $\{\phi_{i,j}\}, j = 0, 1, \dots, m-1 (n = 1, \dots, n)$, 则可求得

$$B_{2i}(t) = \sum_{j=0}^{m-1} \left\{ B(P_{i,j}, Q_{i,j}, P'_{i,j}, (1 + \phi_{i,j})(t - j)) + B(P'_{i,j}, Q'_{i,j}, P_{i,j+1}, \right. \\ \left. \times (1 + \phi_{i,j})(t - j - \frac{\phi_{i,j}}{2})) \right\}, \quad t \in [0, m], \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

则 n 维空间的二次保凸插值曲线为

$$B_2^*(t) = (B_{21}(t), B_{22}(t), \dots, B_{2n}(t))^T. \quad (11)$$

命题 曲线 $B_2^*(t)$ 是保凸插值的 n 维空间的样条曲线.

附注 在(一)中, 如不知 P_j 所对应的参数 τ_j , 可取累加弦长参数: $\tau_0 = 0, \tau_j = \sum_{k=0}^{j-1} |P_k P_{k+1}|, j = 1, \dots, m$. 也可取等距参数: $\tau_j \equiv j, j = 0, 1, \dots, m$.

(二) 三次保凸插值曲线算法

1) 同(一)第一条.

2) 对 $\{P_{i,j}\}_{j=0}^m$ 生成点列 $\{Q_{i,j}\}, \{P'_{i,j}\}, \{Q'_{i,j}\}$ 和 $\{\phi_{i,j}\} (j = 0, \dots, m-1)$ 后, 再用 3. 的办法生成点列 $\{R_{i,j}\}, \{S_{i,j}\}, \{R'_{i,j}\}, \{S'_{i,j}\} (j = 0, \dots, m-1)$, 则可得

$$B_{3i}(t) = \sum_{j=0}^{m-1} \left\{ B(P_{i,j}, R_{i,j}, S_{i,j}, P'_{i,j}, (1 + \phi_{i,j})(t - j)) + B(P'_{i,j}, R'_{i,j}, S'_{i,j}, P_{i,j+1}, \right. \\ \left. \times (1 + \phi_{i,j})(t - j - \frac{\phi_{i,j}}{2})) \right\}. \quad t \in [0, m], \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

则 n 维空间的三次保凸插值曲线为

$$B_3^*(t) = (B_{31}(t), B_{32}(t), \dots, B_{3n}(t))^T. \quad (13)$$

其它平面算法构造 n 维曲线算法的方法与上述类似, 要注意选参数 t 时, 对每个平面曲线分量要是同一的. 且还可有与平面算法类似的收敛与收敛阶定理 (参看[8]).

参 考 文 献

- [1] G. G. Lorentz, *Bernstein Polynomials*, Toronto, 1953.
- [2] K. M. Bolton, *CAD*, 3(1975) 89.
- [3] 常庚哲、吴骏恒, 贝齐尔曲线曲面的数学基础及其计算, 1978.9.
- [4] 董光昌等, *中国造船*, 1 (1978), 111—129.
- [5] 苏步青、华宣积, *复旦学报 (自然科学报)*, 1979年第4期1—9.
- [6] 程正兴, *西安交通大学学报*, 1979年第2期115—124.
- [7] 程正兴, *高等学校计算数学学报*, 第3卷, 第1期 (1981年), 75—82.
- [8] 程正兴, *西安交通大学学报*, 1981年第2期105—114.
- [9] 程正兴, 向量线性正算子逼近及插值型算子对曲线的拟合, 西安交通大学科学技术报告, 80—059.

The Convex Interpolate Spline Curve

Cheng Zhengxing

(Xi'an Jiaotong University)

Abstract

In this paper the methods generating contiguous Bézier two-gons and three-gons are given. So that we construct the convex interpolate spline curves which pass data-points and are shape-preserving and are C^1 and C^2 .