第3卷 第2期 1983年4月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.3 No.2 Apr. 1983

Fejèr-Korovkin算子及一种内插线性算子的渐近展开*

余祥明

（南京师范学院数学系）

设$f(x)\in C_{2\pi}$。本文讨论两种线性算子对$f(x)$的逼近，全文分两个部分。

在第一部分中，我们考虑在正卷积型三角多项式线性算子中占重要地位的Fejèr-Korovkin算子$K_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\,k_n(t)\,dt$，其中$k_n(t)\equiv\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\rho_k^{(n)}\cos kt=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}F_n\left(\frac{k}{n+2}\right)\cos kt$，$F_n(x)=(1-x)\cos\pi x+\frac{1}{n+2}\cot\frac{\pi}{n+2}\cdot\sin\pi x$。由于它满足Korovkin条件[1]：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\rho_2^{(n)}}{1-\rho_1^{(n)}}=4$，所以有下述结果：设$f(x)\in C_{2\pi}$，$f''(x)\in C_{2\pi}$。那么，当$n\to\infty$时，成立着

$$K_n(f,x)-f(x)=\frac{\pi^2}{2n^2}f''(x)+o(n^{-2}).\qquad(1)$$

这里我们讨论了当$f(x)$的可微性质更好时的多项的渐近展开问题，得到了将(1)式展开到m项的结果，m可为任意的正整数。特别地，当$f(x)\in C_{2\pi}$，$\tilde{f}'''(x)\in C_{2\pi}$时，我们有

$$K_n(f,x)-f(x)=\frac{\pi^2}{2(n+2)^2}f''(x)-\frac{\pi^2}{3(n+2)^3}[\tilde{f}'(x)+\tilde{f}'''(x)]+o(n^{-3}).$$

本文还对具有类似形式核的一般卷积型线性算子的渐近展开得到了结果。M. Zamansky[2]也对这种形式的算子进行过研究，但是他的结果应用范围很窄，对Fejér—Korovkin算子也得不到比(1)更进一步的结果。

在本文的第二部分，我们考虑内插三角多项式序列$J_{n,k}(f,x)=\frac{1}{n+1}\sum_{v=0}^{n}f(x_v)\,F_{n,k}(x-x_v)$，其中$F_{n,k}(x)=1+2\sum_{j=1}^{n}\frac{(n+1-j)^k}{(n+1-j)^k+j^k}\cos jx$，$x_v=\frac{2v\pi}{n+1}$，$k$是正整数。作者在1965年[4, 第4章]证明了这种内插序列具有如下的特性：k阶连续模$\omega_k(f,t)=O(t^k)$和$\omega_k(\tilde{f},t)=O(t^k)$同时成立的充要条件是$J_{n,k}(f,x)-f(x)=O(n^{-k})$。1976年，G. Sunouchi[3]也得到了相同的结果。本文则讨论了$J_{n,k}(f,x)$逼近$f(x)$的渐近展开问题。

* 1981年9月7日收到。

（一）

引理1　设m是正整数。那么，存在着仅与m有关的常数C_m，使得在$[0,1]$上成立着$|F_n^{(m)}(x)|\leqslant C_m$。

证明　对于$F_n(x)$，通过计算我们可以得到

$$F_n^{(2j)}(x)=(-1)^{j+1}2j\pi^{2j-1}\sin\pi x+(-1)^j(1-x)\pi^{2j}\cos\pi x$$
$$+(-1)^j\frac{\pi^{2j}}{n+2}\cdot\cot\frac{\pi}{n+2}\cdot\sin\pi x,$$
$$F_n^{(2j-1)}(x)=(-1)^j(2j-1)\pi^{2j-2}\cos\pi x+(-1)^j(1-x)\pi^{2j-1}\sin\pi x$$
$$+(-1)^{j-1}\frac{\pi^{2j-1}}{n+2}\cdot\cot\frac{\pi}{n+2}\cos\pi x\quad(j=1,2,\cdots).$$

由于$\left|\frac{1}{n+2}\cot\frac{\pi}{n+2}\right|\leqslant\frac{1}{2}$，所以引理成立。

记$\lambda_0^{(n)}=1$，$\lambda_k^{(n)}\equiv\lambda_k^{(n)}(m)=\dfrac{F_n\left(\frac{k}{n+2}\right)-\sum\limits_{j=0}^{m}\frac{F_n^{(j)}(0)}{j!}\left(\frac{k}{n+2}\right)^j}{\left(\frac{k}{n+2}\right)^m}+1$

$$(k=1,2,\cdots,n).$$

引理2　设m是正整数。那么

$$\sum_{k=0}^{n-1}|\Delta\lambda_k^{(n)}|=O_m(1),\quad\sum_{k=0}^{n-2}|\Delta^2\lambda_k^{(n)}|=O_m(n^{-1}),$$

O_m表示仅与m有关。

证明　首先，利用引理1，我们有

$$\Delta\lambda_0^{(n)}=1-\lambda_1^{(n)}=\frac{F_n\left(\frac{1}{n+2}\right)-\sum\limits_{j=0}^{m}\frac{F_n^{(j)}(0)}{j!}\left(\frac{1}{n+2}\right)^j}{\left(\frac{1}{n+2}\right)^m}=O\left(\frac{\|F_n^{(m+1)}(x)\|_{[0,1]}}{n+2}\right)$$
$$=O_m\left(\frac{1}{n}\right).\qquad(2)$$

记　$\Phi(x)=\dfrac{F_n(x)-\sum\limits_{j=0}^{m}\frac{F_n^{(j)}(0)}{j!}x^j}{x^m}$　　$(0<x\leqslant1)$。那么

$$\Phi'(x)=F_n'(x)x^{-m}-mx^{-m-1}(F_n(x)-F_n(0))-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{F_n^{(j)}(0)}{j!}(j-m)x^{j-m-1}.\qquad(3)$$

由于

$$F_n'(x)=\sum_{j=1}^{m}\frac{x^{j-1}}{(j-1)!}F_n^{(j)}(0)+O(x^m\|F_n^{(m+1)}(x)\|_{[0,1]}),$$
$$F_n(x)-F_n(0)=\sum_{j=1}^{m}\frac{x^j}{j!}F_n^{(j)}(0)+O(x^{m+1}\|F_n^{(m+1)}(x)\|_{[0,1]}),$$

将此两式代入（3），由引理 1，我们得到

$$\|\Phi'(x)\|_{[0,1]}=O(\|F_n^{(m+1)}(x)\|_{[0,1]})=O_m(1).$$

同样地，我们可以得到 $\|\Phi''(x)\|_{[0,1]}=O(\|F_n^{(m+2)}(x)\|_{[0,1]})=O_m(1)$。因此，我们有

$$\Delta\lambda_k^{(n)}=\Phi\left(\frac{k}{n+2}\right)-\Phi\left(\frac{k+1}{n+2}\right)=O(n^{-1}\cdot\|\Phi'(x)\|_{[0,1]})=O_m(n^{-1})$$

$$(k=1,2,\cdots,n-1),\qquad (4)$$

$$\Delta^2\lambda_k^{(n)}=\Phi\left(\frac{k}{n+2}\right)-2\Phi\left(\frac{k+1}{n+2}\right)+\Phi\left(\frac{k+2}{n+2}\right)=O(n^{-2}\cdot\|\Phi''(x)\|_{[0,1]})$$

$$=O_m(n^{-2})\quad(k=1,2,\cdots,n-2).\qquad (5)$$

（2）、（4）、（5）式相结合，就完成着引理 2 的证明。

设 $j>0$，$\mathfrak{S}[f,x]=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(f,x)$。当 $\sum_{k=1}^{\infty}k^jA_k(f,x)$ 是富里埃级数时，记 $f^{(j)}(x)\backsim\sum_{k=1}^{\infty}k^j A_k(f,x)$。

定理1　设 m 是正整数，$f(x)\in C_{2\pi}$，$f^{(m)}(x)\in C_{2\pi}$。那么，当 $n\to\infty$ 时，成立着

$$K_n(f,x)-f(x)=\sum_{j=1}^{m}\frac{F_n^{(j)}(0)}{j!}\cdot\frac{f^{(j)}(x)}{(n+2)^j}+O_m\left(\frac{1}{n^{m+1}}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{\omega_2(f^{(m)},u)}{u^2}du\right).$$

证明　以 $V_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}C_k(f,x)$ 表示 $f(x)$ 的 n 阶瓦勒—普山平均。由于 $V_n(f,x)-f(x)=O(E_{[\frac{n}{2}]}(f))$，注意到 $\int_{-\pi}^{\pi}|k_n(t)|dt=O(1)$，我们有

$$K_n(f,x)-f(x)=K_n(V_n,x)-V_n(f,x)+O(E_{[\frac{n}{2}]}(f))$$

$$=\sum_{k=1}^{n}C_k(f,x)\left(F_n\left(\frac{k}{n+2}\right)-1\right)+O(E_{[\frac{n}{2}]}(f))$$

$$=\sum_{k=1}^{n}C_k(f,x)\sum_{j=1}^{m}\frac{F_n^{(j)}(0)}{j!}\left(\frac{k}{n+2}\right)^j+\frac{1}{(n+2)^m}\sum_{k=1}^{n}k^mC_k(f,x)$$

$$(\lambda_k^{(n)}-1)+O(E_{[\frac{n}{2}]}(f))$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\frac{F_n^{(j)}(0)}{j!}\cdot\frac{V_n^{(j)}(f,x)}{(n+2)^j}+I+O(E_{[\frac{n}{2}]}(f)),\qquad (6)$$

其中

$$I=\frac{1}{(n+2)^m}\sum_{k=1}^{n}k^mC_k(f,x)(\lambda_k^{(n)}-1)$$

$$=\frac{1}{(n+2)^m}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[V_n^{(m)}(f,x+t)+V_n^{(m)}(f,x-t)-2V_n^{(m)}(f,x)\right]\cdot\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}\cos kt\right]dt.$$

记　$\Psi_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}\cos kt$，$D_k(t)=\dfrac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$，$\varphi_k(t)=\dfrac{\sin^2\frac{k+1}{2}t}{2\sin^2\frac{t}{2}}$。

当$0<t<\pi$时，对$\Psi_n(t)$进行两次和差变换，可以得到

$$\Psi_n(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\Delta\lambda_k^{(n)}D_k(t)+\lambda_n^{(n)}D_n(t)=\sum_{k=0}^{n-2}\Delta^2\lambda_k^{(n)}\varphi_k(t)+\Delta\lambda_{n-1}^{(n)}\varphi_{n-1}(t)+\lambda_n^{(n)}D_n(t).$$

注意到$\int_0^\pi[V_n^{(m)}(f,x+t)+V_n^{(m)}(f,x-t)-2V_n^{(m)}(f,x)]\cdot D_n(t)dt=0$，我们有

$$I=\frac{1}{(n+2)^m}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}}[V_n^{(m)}(f,x+t)+V_n^{(m)}(f,x-t)-2V_n^{(m)}(f,x)]\cdot\left[\sum_{k=0}^{n-1}\Delta\lambda_k^{(n)}D_k(t)\right]$$

$$dt+\frac{1}{(n+2)^m}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}[V_n^{(m)}(f,x+t)+V_n^{(m)}(f,x-t)-2V_n^{(m)}(f,x)]\cdot\Big[\sum_{k=0}^{n-2}\Delta^2\lambda_k^{(n)}\varphi_k(t)+$$

$$+\Delta\lambda_{n-1}^{(n)}\varphi_{n-1}(t)\Big]dt.$$

由引理2和(4)式，并注意到$D_k(t)=O(t^{-1})$，$\varphi_k(t)=O(t^{-2})$，我们得到

$$I=O_m\left(\frac{1}{n^m}\int_0^{\frac{1}{n}}t^2\|V_n^{(m+2)}(f,x)\|\cdot t^{-1}dt\right)+O_m\left(\frac{1}{n^m}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\omega_2(V_n^{(m)},t)\cdot n^{-1}t^{-2}dt\right)$$

$$=O_m\left(\frac{1}{n^{m+1}}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\omega_2(V_n^{(m)},t)}{t^2}dt\right).$$

由于，对于$j=1,2,\cdots,m$我们有

$$V_n^{(j)}(f,x)-f^{(j)}(x)=V_n(f^{(j)},x)-f^{(j)}(x)=O(E_{[\frac{n}{2}]}(f^{(j)}))=O_m\left(n^{j-m}\omega_2\left(f^{(m)},\frac{1}{n}\right)\right),$$

所以(6)式右端的第一项为

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{F_n^{(j)}(0)}{j!}\cdot\frac{f^{(j)}(x)}{(n+2)^j}+O_m\left(n^{-m}\omega_2\left(f^{(m)},\frac{1}{n}\right)\right),$$

而第二、第三项都为$O_m\left(\frac{1}{n^{m+1}}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{\omega_2(f^{(m)},u)}{u^2}du\right)$。证毕。

系1 设$f(x)\in C_{2\pi}$，$\tilde{f}'''(x)\in C_{2\pi}$。那么，当$n\to\infty$时，成立着

$$K_n(f,x)-f(x)=\frac{\pi^2}{2(n+2)^2}f''(x)-\frac{\pi^2}{3(n+2)^3}[\tilde{f}'(x)+\tilde{f}'''(x)]+o(n^{-3}).$$

证明 由定理1，置$m=3$，并注意到$F_n'(0)=\frac{\pi}{n+2}\cot\frac{\pi}{n+2}-1=-\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{n+2}\right)^2+$ $+o(n^{-2})$，$F_n''(0)=-\pi^2$，$F_n'''(0)=3\pi^2-\frac{\pi^3}{n+2}\cot\frac{\pi}{n+2}=2\pi^2+o(1)$，即可得到结果。

设 $U_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)u_n(t)dt$，其中核$u_n(t)$满足条件$\int_{-\pi}^{\pi}|u_n(t)|dt=O(1)$，并具有形式 $u_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}E_n\left(\frac{k}{n}\right)\cos kt$，这里 $E_n(x)\in C_{[0,1]}$，$E_n(0)=1$。

用相同于定理1的证明方法，我们可以得到

定理2 设m是正整数，$E_n^{(m+2)}(x)\in C_{[0,1]}$，并且存在着仅与$m$有关的常数$C_m$，使得$\|E_n^{(j)}(x)\|_{[0,1]}\leqslant C_m(j=1,2,\cdots,m+2)$。设$f(x)\in C_{2\pi}$，$f^{(m)}(x)\in C_{2\pi}$。那么，当$n\to\infty$时，成立着

$$U_n(f,x)-f(x)=\sum_{j=1}^{m}\frac{E_n^{(j)}(0)}{j!}\cdot\frac{f^{(j)}(x)}{n^j}+O_m\left(\frac{1}{n^{m+1}}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{\omega_2(f^{(m)},u)}{u^2}du\right).$$

（二）

引理3[5]　设 k 是正整数。那么，存在着仅与 k 有关的常数 M_k，使得 $\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}|F_{n,k}(x-x_\nu)|\leqslant M_k$。

引理4[3或4]　设 k 是正整数，$T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{j=1}^{n}(a_j\cos jx+b_j\sin jx)$。那么

$$J_{n,k}(T_n,x)-T_n(x)=(\cos(n+1)x-1)\sum_{j=1}^{n}(a_j\cos jx+b_j\sin jx)\frac{j^k}{(n+1-j)^k+j^k}+$$
$$\sin(n+1)x\sum_{j=1}^{n}(a_j\sin jx-b_j\cos jx)\frac{j^k}{(n+1-j)^k+j^k}.$$

记　$G_k(x)=\frac{1}{(1-x)^k+x^k}$，$u_0^{(n)}=1$，$u_j^{(n)}\equiv u_j^{(n)}(m,k)=1+$

$$\frac{G_k\left(\frac{j}{n+1}\right)-\sum_{i=0}^{m}\frac{G_k^{(i)}(0)}{i!}\left(\frac{j}{n+1}\right)^i}{\left(\frac{j}{n+1}\right)^m}$$

$(j=1,2,\cdots,n)$。注意到 $G_k(x)$ 在 $[0,1]$ 上的可微性，相同于引理 2 的证明，可以得到

引理5　设 k 是正整数，m 是非负整数。那么

$$\sum_{j=0}^{n-1}|\Delta u_j^{(n)}|=O_{m,k}(1),\quad \sum_{j=0}^{n-2}|\Delta^2u_j^{(n)}|=O_{m,k}(n^{-1}),$$

$O_{m,k}$ 表示仅与 m，k 有关。

定理3　设 $f(x)\in C_{2\pi}$，k 是正整数，m 是非负整数。假如 $f^{(m+k)}(x)\in C_{2\pi}$，$\tilde{f}^{(m+k)}(x)\in C_{2\pi}$，那么，当 $n\to\infty$ 时，成立着

$$J_{n,k}(f,x)-f(x)=(\cos(n+1)x-1)\sum_{j=0}^{m}\frac{G_k^{(j)}(0)}{j!}\cdot\frac{f^{(k+j)}(x)}{(n+1)^{k+j}}+\sin(n+1)x\sum_{j=0}^{m}\frac{G_k^{(j)}(0)}{j!}$$
$$\cdot\frac{\tilde{f}^{(k+j)}(x)}{(n+1)^{k+j}}+O_{m,k}\left(\frac{1}{n^{m+k+1}}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{\omega_2(f^{(m+k)},t)+\omega_2(\tilde{f}^{(m+k)},t)}{t^2}dt\right).$$

证明　利用瓦勒—普山平均 $V_n(f,x)=\sum_{\nu=0}^{n}(C_\nu\cos\nu x+d_\nu\sin\nu x)$，由引理 3 和引理 4，我们得到

$$J\equiv J_{n,k}(f,x)-f(x)=(\cos(n+1)x-1)\left[\sum_{j=1}^{n}(C_j\cos jx+d_j\sin jx)\frac{j^k}{(n+1-j)^k+j^k}\right]$$
$$+\sin(n+1)x\cdot\left[\sum_{j=1}^{n}(C_j\sin jx-d_j\cos jx)\frac{j^k}{(n+1-j)^k+j^k}\right]+O_k(E_{[\frac{n}{2}]}(f))$$
$$=(\cos(n+1)x-1)\cdot J_1+\sin(n+1)x\cdot J_2+O_k(E_{[\frac{n}{2}]}(f)).\qquad(7)$$

利用引理5，相同于定理1的证明，我们可以得到

$$J_1=\frac{1}{(n+1)^k}\sum_{j=1}^{n}(C_j\cos jx+d_j\sin jx)j^k\cdot G_k\left(\frac{j}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{(n+1)^k}\sum_{j=1}^{n}(C_j\cos jx+d_j\sin jx)j^k\cdot\sum_{i=0}^{m}\frac{G_k^{(i)}(0)}{i!}\left(\frac{j}{n+1}\right)^i$$

$$+\frac{1}{(n+1)^{k+m}}\sum_{j=1}^{n}(C_j\cos jx+d_j\sin jx)j^{k+m}\cdot(u_j^{(n)}-1)$$

$$=\sum_{i=0}^{m}\frac{G_k^{(i)}(0)}{i!}\cdot\frac{V_n^{(k+i)}(f,x)}{(n+1)^{k+i}}+\frac{1}{(n+1)^{k+m}}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big[V_n^{(k+m)}(f,x+t)$$

$$+V_n^{(k+m)}(f,x-t)-2V_n^{(k+m)}(f,x)\Big]\cdot\left[\frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{n}u_j^{(n)}\cos jt\right]dt$$

$$=\sum_{i=0}^{m}\frac{G_k^{(i)}(0)}{i!}\cdot\frac{f^{(k+i)}(x)}{(n+1)^{k+i}}+O_{m,k}\left(\frac{1}{n^{k+m+1}}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{\omega_2(f^{(k+m)},t)}{t^2}dt\right).$$

另一方面，我们同样可以得到

$$J_2=\sum_{i=0}^{m}\frac{G_k^{(i)}(0)}{i!}\cdot\frac{\tilde{f}^{(k+i)}(x)}{(n+1)^{k+i}}+O_{m,k}\left(\frac{1}{n^{k+m+1}}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{\omega_2(\tilde{f}^{(k+m)},t)}{t^2}dt\right).$$

将上述两式结合到（7）式，就完成着证明。

参 考 文 献

[1] Коровкин, П.П., Об одном асимптотическом свойстве положительных методов суммирования рядов фурьем о наилучшем приближении функций класса Z_2 линейными положительными полиномиальными операторами, УМН, ХⅡ, ВыП, 6(1958), 99-103.

[2] Zamansky, M., Approximation et analyse harmonique I, *Bull. Sci. Math.*, 101:1(1977) 3-70.

[3] Sunouchi, G., On the Approximation and Saturation of Periodic Continuous Functions by Certain Trigonometric Interpolation Polynomials, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 27(1976) 323-328.

[4] 余祥明，富里埃级数关于线性平均的逼近，研究生毕业论文。

[5] Varma, A. K., On a New Interpolation Process, *J. Appr. Theory*, 4(1971) 159-164.

Asymptotic Expansions of Fejèr-Korovkin Operators and Some Interpolation Operators

Yu Xiangming

Abstract

Let $f(x)\in C_{2\pi}$, $K_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)k_n(t)dt$, where $k_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{n}F_n\left(\frac{j}{n+2}\right)$ $\cos jt$, $F_n(x)=(1-x)\cos\pi x+\frac{1}{n+2}\cot\frac{\pi}{n+2}\sin\pi x$. Let k *be a positive integer*, $J_{n,k}(f,x)=\frac{1}{n+1}\sum_{v=0}^{n}f(x_v)F_{n,k}(x-x_v)$, where $F_{n,k}(x)=1+2\sum_{j=1}^{n}\frac{(n+1-j)^k}{(n+1-j)^k+j^k}\cos jx$, $x_v=\frac{2v\pi}{n+1}$. We obtain the following theorems.

Theorem 1 Let m be a positive integer, $f(x)\in C_{2\pi}$, $f^{(m)}(x)\in C_{2\pi}$. Then, we have

$$K_n(f,x)-f(x)=\sum_{j=1}^{m}\frac{F_n^{(j)}(0)}{j!}\cdot\frac{f^{(j)}(x)}{(n+2)^j}+O_m\left(\frac{1}{n^{m+1}}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{\omega_2(f^{(m)},t)}{t^2}dt\right).$$

Theorem 2 Let $f(x)\in C_{2\pi}$, k be a positive integer, and m be a non-negative integer. If $f^{(m+k)}(x)\in C_{2\pi}$, $\tilde{f}^{(m+k)}(x)\in C_{2\pi}$, then

$$J_{n,k}(f,x)-f(x)=(\cos(n+1)x-1)\sum_{j=0}^{m}\frac{G_k^{(j)}(0)}{j!}\frac{f^{(k+j)}(x)}{(n+1)^{k+j}}+$$

$$\sin(n+1)x\sum_{j=0}^{m}\frac{G_k^{(j)}(0)}{j!}\frac{\tilde{f}^{(k+j)}(x)}{(n+1)^{k+j}}+O_{m,k}\left(\frac{1}{n^{m+k+1}}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\right.$$

$$\left.\frac{\omega_2(f^{(m+k)},t)+\omega_2(\tilde{f}^{(m+k)},t)}{t^2}dt\right),$$

where $G_k(x)=\frac{1}{(1-x)^k+x^k}$.