关于Chowla的一个猜想*

姚 琦

（山东大学）

在1978年赫尔辛基的ICM会议上，Apèry给出$\zeta(3)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$是无理数的证明.为此，Apèry定义了一个迭代数列a_n:

$$a_0=1,\ a_1=5,\ n^3a_n-(34n^3-51n^2+27n-5)a_{n-1}+(n-1)^3a_{n-2}=0, \tag{1}$$

它满足

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2, \tag{2}$$

这里$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Chowla在[1]中讨论了Apèry数$a_n$的同余性质，他证明了$a_{5n+1}\equiv0\ (\mathrm{mod}\ p)$，$a_{5n+3}\equiv0(\mathrm{mod}\ p)$以及对于奇素数$p$恒成立$a_p\equiv5(\mathrm{mod}\ p^2)$。在文章最后他提出猜想：对于一切奇素数$p\geqslant5$，是否成立$a_p\equiv5(\mathrm{mod}\ p^3)$？本文证实了这一猜想。文献[1]上证明过

引理1 对一切奇素数$p\geqslant5$，$\binom{2p}{p}\equiv2(\mathrm{mod}\ p^3)$。

引理2 对任意奇素数$p\geqslant5$，有$\sum_{x=1}^{p-1}\frac{1}{x^2}\equiv0(\mathrm{mod}\ p)$.

证 选取正整数a满足$a^2\not\equiv1(\mathrm{mod}\ p)$。则有$\sum_{x=1}^{p-1}\frac{1}{x^2}\equiv\sum_{y=1}^{p-1}\frac{1}{(ay)^2}(\mathrm{mod}\ p)$，从而$\left(\frac{1}{a^2}-1\right)\sum_{x=1}^{p-1}\frac{1}{x^2}\equiv0(\mathrm{mod}\ p)$，得出引理结论。

定理 对一切奇素数$p\geqslant5$，有$a_p\equiv5(\mathrm{mod}\ p^3)$。

证 由$a_p=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}^2\binom{p+k}{k}^2=\binom{p}{0}^4+\binom{p}{p}^2\binom{2p}{p}^2+a'_p$，$a'_p=\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}^2\binom{p+k}{k}^2$
$=\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{(p+k)!}{(k!)^2(p-k)!}\right)^2=\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{(p+k)(p+k-1)\cdots(p+1)p(p-1)\cdots(p-k+1)}{(k!)^2}\right)^2$，就有
$\frac{a'p}{p^2}=\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{(p+k)\cdots(p+1)(p-1)\cdots(p-k+1)}{(k!)^2}\right)^2$，从而可得$\frac{a'p}{p^2}\equiv\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{k!(-1)^k(k-1)!}{(k!)^2}\right)^2$
$(\mathrm{mod}\ p)$，就是，$\frac{a'p}{p^2}\equiv\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k^2}(\mathrm{mod}\ p)$.用引理2可知

$$\frac{a'_p}{p^2}\equiv0(\mathrm{mod}\ p)，即\ a'_p\equiv0(\mathrm{mod}\ p^3)。$$

从此得到$a_p\equiv\binom{p}{0}^4+\binom{2p}{p}^2\ (\mathrm{mod}\ p^3)$。用引理1就得出$a_p\equiv5\ (\mathrm{mod}\ p^3)$。

参考文献

[1] Chowla, S., Congruence properties of Apère numbers, J. of Number Theory, 12(1980),188-190.

* 1982年1月20日收到。