第3卷 第2期 1983年4月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.3 No.2 Apr. 1983

位置刻度参数最优同变区间估计的minimax性质*

成 平

(中国科学院系统科学研究所)

(华中工学院)

设$p(\geqslant 2)$维随机向量具有密度函数$\sigma^{-p}f\left(\frac{x-\theta\mathbf{1}}{\sigma}\right)$，此处$\mathbf{1}=(1,\cdots,1)'_{p\times 1}$，$\theta\in R^1$，$\sigma>0$，本文讨论未知参数$\theta,\sigma$的最优同变区间估计的minimax性质，记置信区间为$(d_1(x),d_2(x))$，现在有两个问题：

1 在给定置信度$1-\alpha$ $(0<\alpha<1)$下，欲使

$$\sup_{\sigma>0,\,\theta\in R^1}\left\{\frac{1}{\sigma}E(d_2(X)-d_1(X))\right\} \tag{1}$$

达到最小的minimax置信区间是什么？

2 令$g(t)$是$(0,\infty)$上单调增加函数，且$\lim\limits_{t\to 0}g(t)=g(0)=0$，$\lim\limits_{t\to\infty}g(t)>c>0$，分别在损失函数

$$g\left(\frac{d_2-d_1}{\sigma}\right)+c(1-I_{(d_1,d_2)}(\theta)) \tag{2}$$

$$g\left(\frac{d_2-d_1}{\sigma}\right)+c(1-I_{(d_1,d_2)}(\sigma)) \tag{3}$$

下，θ,σ的minimax置信区间是什么？

陈希孺（1964），在正态分布下，证明了θ的t区间估计的minimax性，当σ已知时，Valand（1968）B. Zehnwirth（1975）先后研究了上述问题。显然θ,σ皆未知，上述问题的回答，更具有现实意义。最后我们还讨论了回归模型下，回归系数置信区域的minimax估计。

§1 θ,σ最优同变区间估计的minimax性质

令$\mathscr{G}=\{(a,b),\ a>0,\ b\in R^1\}$表示仿射变换群$\mathscr{G}$的每个元素作用于样本空间每个点$x$，判决空间每个元素$(d_1,d_2)$，参数空间每点$(\theta,\sigma)$分别规定为

$$(a,b)x=(ax+b\mathbf{1}) \tag{4}$$

$$(a,b)(d_1,d_2)=(ad_1+b,\ ad_2+b)\quad(\theta\text{的区间估计}) \tag{5}$$

$$(a,b)(d_1,d_2)=(ad_1,ad_2)\quad(\sigma\text{的区间估计}) \tag{5'}$$

$$(a,b)(\theta,\sigma)=(a\theta+b,\ a\sigma) \tag{6}$$

如果区间估计$(d_1(x),\ d_2(x))$，对$\forall(a,b)\in\mathscr{G}$皆有$(d_1(ax+b\mathbf{1}),\ d_2(ax+b\mathbf{1}))=(a,b)(d_1(x),\ d_2(x))$，则称$(d_1(x),\ d_2(x))$为同变区间估计。在所有同变区间估计中

* 1981年9月25日收到.

分别在损失函数(2),(3)下的风险函数$R_i(\theta,\sigma,d_1,d_2)$)($i=1,2$)达到最小者,分别称它为$\theta$或$\sigma$的最优同变区间估计。我们就是要证明此估计具有minimax性质,然后由此推出第一个问题的解答,首先我们讨论θ区间估计情况。

令($d_1^0(x)$, $d_2^0(x)$)($d_1^0(x)<d_2^0(x)$)为任意确定的θ之同变区间估计。对于θ之任意区间估计($d_1(x),d_2(x)$)我们定义

$$s(x)=(d_2(x)-d_1(x))/(d_2^0(x)-d_1^0(x))$$

$$r(x)=(d_2(x)+d_1(x)-d_2^0(x)-d_1^0(x))/2(d_2^0(x)-d_1^0(x))$$

易见($s(x)$ $r(x)$)与($d_1(x)$, $d_2(x)$)1-1对应,且($d_1(x)$, $d_2(x)$)为同变估计时,($s(x)$, $r(x)$)则样本空间在仿射变换群作用下,它保持不变,即($s(x)$, $r(r)$)为不变统计量。因此($d_1(x)$, $d_2(x)$)的风险函数可表示为:

$$\begin{aligned}R_1(\theta,\sigma;\ d_1,d_2)&=\rho(\theta,\sigma;s,r)\\&=E_{\theta,\sigma}(g(\frac{d_2(X)-d_1(X)}{\sigma}))+c(1-P_{\theta,\sigma}\{\theta\in(d_1(X),d_2(X))\})\\&=E_{\theta,\sigma}(g(\frac{s(X)u(X)}{\sigma}))+c(1-P_{\theta,\sigma}\{\theta\in u(X)r(X)+v(X)\\&\quad-\frac{s(X)u(X)}{2},u(X)r(X)+v(X)+\frac{s(X)u(X)}{2}\})\end{aligned}\tag{7}$$

此外$u(x)=d_2^0(x)-d_1^0(x)$, $v(x)=\frac{1}{2}(d_2^0(x)+d_1^0(x))$.

注意到($d_1(x)$, $d_2(x)$)为同变估计时,其风险为常数。下面我们来证明

$$\inf_{(s,r)\in I}\rho(0,1;\ s,r)=\inf_{(s,r)}\sup_{\theta,\sigma}\rho(\theta,\sigma;\ s,r).\tag{8}$$

我们将采用[6][2]所采用的方法。这里只略述其思路,不进行详细论证。

引理 1.1 若存在一个θ的同变区间估计($d_1^0(x)$, $d_2^0(x)$)及$m>0$使得

$$P_{0,1}\left\{\frac{1}{m}\leqslant u(X)\leqslant m,\ \ |v(X)|\leqslant m\right\}=1\tag{9}$$

则(8)式成立,其中$u(x)$, $v(x)$定义同前。

证 令$s^*(x)=s(x)$,当$s(x)\leqslant km^2$; $=1$,其它。则有$\rho(\theta,\sigma;s,r)\geqslant\rho(\theta,\sigma,s^*,r)$当$\theta\in R^1,\sigma>0$通过($s^*,r$)再构造同变估计

$$s^*_{a,b}(x)=s^*(\frac{ax}{u(x)}+(b-\frac{av(x)}{u(x)})1),$$

$$r^*_{a,b}(x)=r(\frac{ax}{u(x)}+(b-\frac{av(x)}{u(x)})1),$$

则有

$$\begin{aligned}&\int_{|\theta|<T,T^{-1}<b<T}\rho(\theta,\sigma;s^*,r)\frac{d\sigma}{\sigma}d\theta\\&\geqslant\int_{|a|<T,T^{-1}<b<T}\rho(0,1,s^*_{a,b}\,r^*_{a,b})\frac{da}{a}db+o(T\log T)\\&\geqslant\mathop{\mathrm{imf}}_{(s,r)\in I}\rho(0,1;s,r)4T\log T+o(T\log T),\end{aligned}\tag{10}$$

由（10）式即可推得引理成立．（令 $T\to\infty$）．

注意：此引理把概率测度换为有限测度时结论仍然成立．

引理 1.2　假设 $g(t_1,t_2)$ 为 $t_1>0$，$t_2\in R^1$ 上非负可积函数．记 $L_m=((t_1,t_2):\ m^{-1}<t_1<m,\ |t_2|<m)$ 及

$$H_m(a,b)=\int_{Lm}\left\{g(at_1)+c\left(1-I_{(bt_1+t_2-\frac{at_1}{2}),\,bt_1+t_2+\frac{at_1}{2}}(0)\right)\right\}g(t_1,t_2)dt_1dt_2,\tag{11}$$

则对任意 $0<m<\infty$，$H_m(a,b)$ 在 $a>0$，$b\in R^1$ 上连续，而且在有限点达到极小．而且有

$$\lim_{m\to\infty}\inf_{(a,b)}H_m(a,\ b)=\inf_{(a,b)}H_\infty(a_0,\ b_0)=H_\infty(a,b)\tag{12}$$

此处 $a_0>0$，$b_0\in R^1$．

证　$H_m(a,\ b)$ 的连续性，主要是因为 $g(t)$ 在有界区域上有界，再利用实变函数中的卢洵定理可以证明．其它的结论证明，类似[2]中相应引理．此处从略．

定理 1.1　在前述有关 $g(t)$，$c>0$，损失函数（2）式，及分布函数有关假设下，则存在 θ 的最优同变区间估计，而且具有 minimax 性质．

证　取最大不变统计量

$$z(x)=(i_x,\mathrm{sgn}(x_{i_x}-x_1)\frac{x_{i_x}-x_j}{x_{i_x}-x_1}\ j=2,\cdots p)$$

此处 $i_x=\min\{j:x_j\neq x_1,\ j=2,\cdots,p\}$，再取 $d_1^0(x)=\bar{x}-h(x),d_2^0(x)=\bar{x}+h(x)$，

$$\bar{x}=p^{-1}\sum_{i=1}^{p}x_i,\quad h(x)=\{\sum_{i=1}^{p}(x_i-\bar{x})^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

记

$$u(x)=2h(x),\ v(x)=\bar{x},$$

$g(t_1,t_2|z)$ 表示已知，z（$u(x),v(x)$）的条件概率密度，若（$s(x)$，$r(x)$）为不变统计量，它可表示为（$s(z),r(z)$）此时有

$$\begin{aligned}\rho(\theta,\sigma;s,r)&=\rho(0,1;s,r)\\&=E_{0,1}H_\infty^{(z)}(s,r)=\lim_{m\to\infty}E_{0,1}H_\infty^{(z)}(s,r)\end{aligned}\tag{13}$$

此处 $H_m^{(z)}(s,r)$ 定义与（11）式相同，只是（a,b）换为（s,r），$g(t_1,t_2)$ 换为 $g(t_1,t_2|z)$．利用引理 1.2 及（13）式就解决了最优同变估计的存在性．

记 $F(x)$ 表示 $\theta=0$，$\sigma=1$ 时 X 的分布函数．令 B 为任意 p 维的 Borel 集，定义测度

$$F_m(B)=F(B\cap\{x:(u(x),v(x))\in L_m)$$

利用 $F_m(B)$ 可构成相应的含有位置刻度参数（θ,σ）的有限测度及相应的风险函数 $\rho_m(\theta,\sigma;s,r)$ 特别当（s,r）为不变统计量时有

$$\rho_m(\theta,\sigma;s,r)=\rho_m(0,1;s,r)=E_{0,1}H_m^{(z)}(s,r)\tag{14}$$

再根据引理 1.1、引理 1.2 及（13）、(14）式就可推得定理成立（令 $m\to\infty$）．

至于如何求得 θ 的最优同变区间估计，自然的办法先找出同变区间估计的形式，再求已知最大不变统计 z 的条件风险 $H_\infty^{(z)}(s,r)$ 的极小点 $\bar{s}(z)$；$\bar{r}(z)$，由此可得到 θ 的最优同变区间估计，我们也可采用另一种办法，即利用 Hora-Bucher 定理[5]，求使得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\left[g\left(\frac{d_2-d_1}{\sigma}\right)+c(1-I_{(d_1,d_2)}(\theta))\right]f\left(\frac{x-\theta 1}{\sigma}\right)\sigma^{-p-1}d\sigma d\theta\tag{15}$$

达到最小的同变区间估计（$d_1(x),d_2(x)$）.特别是 $g(t)=t$ 时，可直接解方程

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} f\left(\frac{x-\theta 1}{\sigma}\right)\sigma^{-p-2}d\sigma d\theta = c\int_{0}^{\infty} f\left(\frac{x-d1}{\sigma}\right)\sigma^{-p-1}d\sigma d\theta \tag{16}$$

得 d 的两个根 $(d_1(x), d_2(x))$ 即为所求。

如何找到给定置信度 $1-\alpha$ 而使(1)式达到最小的minimax同变区间估计呢？一个办法就是对任给的 $c>0$，在 $g(t)=t$ 下求得最优同变区间估计 $(d_{1c}(x), d_{2c}(x))$ 再计算和解方程

$$P_{01}\{d_{1c}(X)\leqslant 0\leqslant d_{2c}(X)\} = 1-\alpha$$

求得 c 值。这样就可达到我们的目的。

至于 σ 的最优同变区间估计的 minimax 性质的推理，几乎完全与 θ 之情况相似，令 $u(x)>0$ 为满足 $au(x)=u(ax+b1)$ 的同变统计量，定义

$$s(x) = (d_2(x) - d_1(x))/u(x) \tag{17}$$

$$r(x) = d_2(x)/u(x) \tag{18}$$

与 $(d_1(x), d_2(x))$ 1－1 对应。若 $(d_1(x), d_2(x))$ 为同变区间估计，则 $(s(x), r(x))$ 为不变统计量。

通过建立与引理 1.1，1.2 相应的引理，我们就可以得到相应定理。

引理 1.3 若存在 σ 的同变估计 $u(x)$ 及 $m>0$ 使得 $P_{0,1}\left(\frac{1}{m}\leqslant u(X)\leqslant m\right)=1$ 则 σ 之最优同变区间估计具有 minimax 性质。

引理 1.4 令 $W_{a,b}(t) = g(at) + c(1 - I_{((b-a)t, bt)}(1))$ $0\leqslant a<b$，$0<\int_0^{\infty} h(t)dt<\infty$，则

$$H_m(a,b) \triangleq \int_{m^{-1}}^{m} W_{a,b}(t)h(t)dt$$

对一切 $m>0$ 它是 a, b $(0\leqslant a<b)$ 的连续函数。且有

$$\lim_{m\to\infty}\inf_{0\leqslant a<b} H_m(a,b) = \inf_{0\leqslant a<b}\int_0^{\infty} W_{a,b}(t)dt$$

而且等式中 inf 皆在有限点达到。

定理 1.2 在前述有关 $g(t)$，$c>0$，损失函数（3）式及分布函数假设下，则存在 σ 的最优同变区间估计，它也是 minimax 区间估计。

关于求 σ 的最优同变区间估计，可从定义出发，也可通过求

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\left[g\left(\frac{d_2-d_1}{\sigma}\right) + c(1 - I_{(d_1,d_2)}(\sigma))\right] f\left(\frac{x-\theta 1}{\sigma}\right)\sigma^{-p-1}d\sigma d\theta \tag{19}$$

达到最小的最优同变估计，如 $g(t)=t$ 可直接求使（19）式达到最小的 $(d_1(x), d_2(x))$，即为所求。

如果分布函数放宽为随机向量 X 具有密度函数 $\sigma^{-pk}f\left(\frac{x-1\theta^1}{\sigma}\right)$，$\theta\in R^k$，$\sigma>0$，$X$ 为 $p\times k$ 矩阵。此时定理 2.1 结论仍然成立。其证明方法与定理 1.2 相似。只要注意仿射变换群中，b 换为 k 维向量。我们用此结论可讨论回归模型中 σ 的置信区间问题。令

$$Y_n = X_n\beta + \varepsilon_n \quad X_n' X_n > 0$$

ε_n 具有密度 $f\left(\frac{y}{\sigma}\right)\sigma^{-n}$ 那么 σ 的最优同变区间估计存在，而具有 minimax 性质。这里只要指出与上述问题不同处就是，仿射群元素 (a,b) 作用于样本点 y 为 $(a,b)y = ay + X_n b$。但这不影响定理证明过程，其 σ 的最优同变区间估计可通过使

$$\int_{R^k}\int_{0}^{\infty}\left[g\left(\frac{d_2-d_1}{\sigma}\right) + c(1 - I_{(d_1,d_2)}(\sigma))\right] f\left(\frac{y-X_n\beta}{\sigma}\right)\sigma^{-n-1}d\sigma d\beta$$

达到最小的同变区间估计 $(d_1^0(y), d_2^0(y))$ 而得到。

至于求给定置信度 $1-\alpha$ 下求使得（1）式达到最小的 σ 最优同变区间估计的办法，同于求 θ 的相应最优同变区间相似。

§2 例 子

例 1 若
$$\sigma^{-p} f\left(\frac{x-\theta 1}{\sigma}\right)=\sigma^{-p} \prod_{i=1}^{p} I_{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2},\right)}\left(\frac{x_i-\theta}{\sigma}\right) \tag{20}$$
在 $g(t)=t$ 下，θ 的最优同变区间估计可通过解方程（16）得到，亦即解方程
$$p^{-1}(p+1)^{-1}(x^*_{(p)}-x^*_{(1)})^{-p}=cp^{-1}(\max(d-x^*_{(1)}, x^*_{(p)}-d))^{-p} \tag{21}$$
得 d 的两个实根
$$(x^*_{(1)}+(c(p+1)^{1/p}(x^*_{(p)}-x^*_{(1)}), x^*_{(p)}-(c(p+1))^{1/p}(x^*_{(p)}-x_{(1)})),$$
即构成 θ 的最优同变估计。在给定置信度 $1-\alpha$ 下，θ 的最优同变 minimax 区间估计为
$$\left(\frac{x^*_{(p)}+x^*_{(1)}}{2}-k(x^*_{(p)}-x^*_{(1)}),\ \frac{x^*_{(p)}+x^*_{(1)}}{2}+k\ (x^*_{(p)}-x^*_{(1)})\right) \tag{22}$$
其中 k 由
$$P_{0,1}\left(\frac{|x^*_{(p)}+x^*_{(1)}|}{2(x^*_{(p)}-x^*_{(1)})}\leqslant k\right)=1-\alpha,$$
确定。从而得 $k=\alpha^{-\frac{1}{p-1}}/2$。此外 $x^*_{(p)}$，$x^*_{(1)}$ 分别表示 $x_1, x_2, \cdots, x_p$ 样本极大值与极小值。

以 $g(t)=t$，（20）式代入（19）式，即得 σ 的最优同变区间估计为
$$(a(x^*_{(p)}-x^*_{(1)}),\ b(x^*_{(p)}-x^*_{(1)})), \tag{23}$$
其中 a,b 为
$$t^{-p}(1-t)^{-1}=(cp(p+1))^{-1} \quad 0<t<1 \text{ 在 } c>\left(\frac{p+1}{p}\right)^p p^{-2}$$
的两个不同的根，否则 $a=b=1$。

如果给定置信度 $1-\alpha$，那么 σ 的最优同变 minimax 区间估计，形式为（23）所给出，其中 a,b 为
$$p(p-1)\int_{b^{-1}}^{a^{-1}} t^{p-2}(1-t)\,dt=1-\alpha \tag{24}$$
成立而使 $b-a$ 达到最小的 a,b 值。

例 2 $f\left(\frac{x-\theta 1}{\sigma}\right)=\prod_{i=1}^{p}\exp\left\{-\frac{1}{\sigma}(x_i-\theta)\right\}$ 其中 $x_i>\theta$ 在 $g(t)=t$ 下，θ 的最优同变 minimax 区间估计为
$$(x^*_{(1)}-p^{-1}((cp)^{1/p}-1)^{+}s, x_{(1)}), \tag{25}$$
此处
$$s=\sum_{i=1}^{p}(x_i-x^*_{(1)}) \quad x^*_{(1)}=\min(x_1, \cdots, x_p).$$
如果给定置信度 $1-\alpha$，θ 的最优同变 minimax 区间估计为
$$(x^*_{(1)}-p(p-2)F_{2,2(p-1)}(1-\alpha)s, x_{(1)}), \tag{26}$$
其中 $F_{2,2(p-1)}(1-\alpha)$ 为自由度为 $2, 2(p-1)$ 之 F 分布的 $1-\alpha$ 分位点。

σ 的最优同变 minimax 区间估计（$g(t)=t$）是（as，bs），其中 $0\leqslant a\leqslant b$，在 $c>(p-1)!/p^p e^{-p}$ 时为
$$p-1=\frac{c}{p-2}t^{-p}e^{-t^{-1}}$$

的两个根，否则 $a=b$ 在给定置信度 $1-\alpha$ 下，σ 的最优同变 minimax 区间估计为 (as, bs)，其中 $0\leqslant a\leqslant b$，且满足

$$(\Gamma(p-1))^{-1}\int_{1/b}^{1/a}s^{p-2}e^{-s}\,ds=1-\alpha, \tag{27}$$

而 $b-a$ 达到最小的值。

对于正态分布 $N(\theta 1,\sigma^2 I_p)$，$g(t)=t$ 时，θ 的最优同变区间估计在［1］中已有叙述，对于 σ 的区间估计类似例 2 的情况。

§3 回归系数最优同变区域估计之 minimax 性

我们将考虑 §1 末尾所述回归模型中 β 的区域估计问题。设 $\varepsilon_n\sim N(0,\sigma^2 I_n)$。此时 β 的区域估计问题可转化为 $X\sim N(\theta,A\sigma^2)$，有简单样本 $X_1,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$，求 θ 的置信区域问题，在回归模型中 $A=(X_n'X_n)^{-1}$. 是已知 $p\times p$ 正定阵. 其仿射群元素 (a,b) 作用到 θ 的区域估计 $D(x)$ 为 $(a,b)D=aD+b$。若 $(a,b)D=D((a,b)x)$ 对仿射群一切 (a,b) 元素成立，则称为同变的. (a,b) 作用于 x 和 (θ,σ) 规定与 §1 规定相同. 我们考虑

1 在损失函数

$$\frac{V(D)}{\sigma^p}+c(1-I_D(\theta)) \tag{28}$$

下的 minimax 置信区域。此外 $c>0$，$V(D)$ 为 D 的体积。

2 在限制 $P_{\theta,\sigma}(\theta\in D(X))\geqslant 1-\alpha$ 下 $(0<\alpha<1)$ 求使得 $\sup\limits_{\sigma,\theta}E_{\theta,\sigma}(V(D)/\sigma^p)$ 达到最小的 minimax 置信区域。

众所周知，$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$，$s^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})'A^{-1}(x_i-\bar{x})$ 为 (θ,σ) 的充分统计量，且彼此独立，$\bar{x}\sim N(\theta,n^{-1}\sigma^2A)s^2\sim\chi^2_{(n-1)p}$。

我们选用 (θ,σ^2) 的先验分布是：θ 与 σ^2 独立，

θ 服从 $\{\theta:\|\theta\|^2\leqslant h\}$ 上的均匀分布，

σ^2 具有概率密度 $q_h(\sigma^2)=\left(2^{d(h)/2}\Gamma\left(\frac{d(h)}{2}\right)\right)^{-1}(\sigma^2)^{-1-\frac{d(h)}{2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}}$ 此处 $d(h)=(\log h)^{-1/2}$.

通过多元积分计算可得 $(\bar{x},s^2)$ 的绝对分布密度

$$\begin{aligned}g(\bar{x},s^2,h)&=B^{-1}\left(\frac{n-1}{2}p,\frac{d(h)}{2}\right)(s^2)^{\frac{n-1}{2}p-1}(1+s^2)^{-((n-1)p+d(h))/2}\\&\cdot h^{-p/2}\Pi^{-p}\left[\Gamma\left(\frac{np+d(h)}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{(n-1)p+d(h)}{2}\right)\right]\\&\cdot\int_B(1+n\|t\|^2)^{-(np+d(h))/2}dt,\end{aligned} \tag{29}$$

以及置信区域 $D(x)$ 的后验风险

$$V(D)E(\sigma^{-p}|\bar{x},s^2)+c\left(1-\int_D W(\theta,\bar{x},s^2,h)d\theta\Big/\int_{\|\theta\|^2<h}W(\theta,\bar{x},s^2,h)d\theta\right), \tag{30}$$

其中 $W(\theta,\bar{x},s^2,h)=(1+n(1+s^2)^{-1}(\bar{x}-\theta)'A^{-1}(\bar{x}-\theta))^{-(np+d(h))/2}$,

$$\begin{aligned}E(\sigma^{-p}|\bar{x},s^2)&=2^{p/2}(1+s^2)^{-p/2}\left(\Gamma\left(\frac{(n+1)p+d(h)}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{np+d(h)}{2}\right)\right)\\&\cdot\int_B(1+n\|t\|^2)^{-(np+p+d(h))/2}\Big/\int_B(1+n\|t\|^2)^{-(np+d(h))/2}dt,\end{aligned} \tag{31}$$

此处 $B=\{\theta:\|(1+s^2)^{1/2}A^{1/2}-\bar{x}\|^2<h\}$。

我们注意到在$\|\bar{x}\|\leqslant h^{1/2}-h^{1/3}$, $1+s^2\leqslant h^{1/4}$ 限制下，当 $h\to\infty$

$$\int_B(1+n\|t\|^2)^{-(l+d(h))/2}dt\xrightarrow{\text{一致地}}\int_{R^p}(1+n\|t\|^2)^{-1/2}dt。\tag{32}$$

利用此事实，在上述限制下，当 h 适当大时，存在 d_n 使得 $E(\sigma^{-p}|\bar{x},s^2)\geqslant d_n(1+s^2)^{-p/2}$。因此欲 $D_r(x)=\{\theta:\frac{n}{1+s^2}(\bar{x}-\theta)'A^{-1}(\bar{x}-\theta)<r\}$ 为 Bayes 置信区域，必有

$V(D_r(x))\leqslant\{E(\sigma^{-p}|\bar{x},s^2\}^{-1}c$, $D_r(x)\subseteq\{\theta:\|\theta\|^2<h\}$。故要求

$$r\leqslant\Pi^{-1}[cd_n^{-1}\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)(\det A)^{-\frac{1}{2}}]^{2/p}\triangleq l。\tag{33}$$

注意到在相同 $V(D)$ 条件下，$\int_D W(\theta,\bar{x},s^2,h)d\theta$ 在 $D=D_r(x)$ 时达到最大，由（30）式知，如果 r 满足（33）式，而 $D_r(x)$ 使（30）式达到最小的 r 值 $r_h(\bar{x},s^2)$，那么 $D_{r_h(\bar{x},s^2)}(x)$ 就是 Bayes 置信区域，易求得

$$r_h(\bar{x},s^2)=\frac{1}{n}\left\{\left[c^{-1}(\det A)^{1/2}2^{p/2}\Gamma\left(\frac{(n+1)p+d(h)}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{np+d(h)}{2}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdot\int_B(1+n\|t\|^2)^{-(np+d(h))/2}dt\right]^{-2/(np+d(h))}-1\right\}^+\tag{34}$$

在 $\|\bar{x}\|<h^{1/2}-h^{1/3}$，$1+s^2\leqslant h^{1/4}$ 限制下，当 $h\to\infty$

$$r_h(\bar{x},s^2)\xrightarrow{\text{一致地}}\frac{1}{n}\left[(c^{-1}(\det A)^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{p}{2}})^{-2/np}-1\right]^+\triangleq r_\infty。\tag{35}$$

显然 $r_\infty<l$，亦有 $r_h(\bar{x},s^2)\leqslant l$（当 h 足够大）。因此证明了 $D_{r_h(\bar{x},s^2)}(x)$ 是 Bayes置信区域。此时它的后验风险一致地趋于(当 $h\to\infty$) $D_{r_\infty}(X))$的风险函数$R_{0,1}(D_{r_\infty}(X))$.其中$D_{r_\infty}(x)=\{\theta:ns^{-2}(\bar{x}-\theta)'A^{-1}(\bar{x}-\theta)<r_\infty\}$。

现在证明 Bayes 风险在当 $h\to\infty$ 时趋于 $D_{r_\infty}(x)$ 的风险。由此可得 $D_{r_\infty}(x)$ 是 θ 的 minimax 置信区域，若令$D_h^{(B)}(x)$表示所给先验分布的 Bayes 置信区域，记 $R(D_h^{(B)}(x)|\bar{x},s^2)$ 为后验风险。显然其 Bayes 风险

$$R_h=\int_0^\infty\int_{R^p}R(D_h^{(B)}(x)|\bar{x},s^2)g(\bar{x},s^2,h)d\bar{x}ds^2\leqslant R_{0,1}(D_{r_\infty}(X))\tag{36}$$

利用前面关于 Bayes 区域及后验风险的讨论，故对任意 $\varepsilon>0$，当 h 足够大时就有

$$R_h\geqslant\int_{\|\bar{x}\|<h^{1/2}-h^{1/3},1+s^2\leq h^{1/4}}R(D_h^{(B)}(x)|\bar{x},s^2)g(\bar{x},s^2,h)d\bar{x}ds^2$$
$$\geqslant(R_{0,1}(D_{r_\infty}(x))-\varepsilon)(1-\varepsilon)\int_{\|\bar{x}\|<h^{1/2}-h^{1/3}}h^{-p/2}\Pi^{-p/2}\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)d\bar{x}$$
$$\cdot B\left(\frac{n-1}{2}p,\ \frac{d(h)}{2}\right)\int_{1+s^2\leq h^{1/4}}(s^2)^{\frac{n-1}{2}p-1}(1+s^2)^{-((n-1)p+d(h))/2}ds^2$$
$$\to(R_{0,1}(D_{r_\infty}(x)-\varepsilon)(1-\varepsilon)。当\ h\to\infty,\tag{37}$$

由于 ε 是任意性，根据（36），（37）式，立即得到 $R_h\to R_{0,1}(D_{r_\infty}(x))$。

综上所述，我们得到如下定理

定理 3.1　若 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant2)$ 为iid服从 $N(\theta,\sigma^2A)$ 分布，$A>0$ 已知，θ,σ^2 未知，则 $D_{r_\infty}(x)$ 是 θ 在（28）所给损失函数下的 minimax 置信区域。

此定理不难推广到 $g(t)$ 为 $(0,\infty)$ 上非降实函数 $\lim\limits_{t\to\infty}g(t)>c$，损失函数采用

$g\left(\frac{V(D)}{\sigma^p}\right)+c(1-I_D(\theta))$ 的情况。

如同§1所采用的办法相似，从定理3.1可得

定理3.2 在定理3.1的假设下，给定置信度 $\geqslant 1-\alpha$ 下

$D_{1-\alpha}(x)=\{\theta: s^{-2}(\bar{x}-\theta)'A^{-1}(\bar{x}-\theta)\leqslant n^{-1}(n-1)^{-1}F_{p,(n-1)p}(1-\alpha)\}$ 是使 $\sup\limits_{\theta\in R^p,\sigma>0} E_{\theta,\sigma}(V(D)/\sigma^p)$ 达到最小的minimax置信区域。

参 考 文 献

[1] 陈希孺：t区间估计的minimax性质，科学通报 Vol. 17 (1966) No. 3 pp. 97—100.

[2] Ghen Hsi-Ju (陈希孺): On minimax invariant estimates on location and scale parameters, *Scientia Sinica* Vol. XⅢ (1964) No. 10, pp. 1569—1586.

[3] Valand, R. S., Invariant interval estimation of a location parameter, *Ann. Math. statist.* Vol. 39 (1968), pp. 193-199.

[4] Zehnwirth, B.. Minimax interval estimators of location parameters, *Ann, statist*, Vol. 3 (1975), pp. 451-459.

[5] Hora, R. B,. Buehler, R. J., Fiducial theory and invariant estimation, *Ann. Math. statist.* Vol. 37 (1965), pp. 643—656.

[6] Girshick, M. A., Savage, L. G., Bayes and minimax estimates for quadratic loss function, Proc. Second Berkely Symp. *Math. statist. Prob.* Vol. 1 (1951), pp. 53—74.

On the Minimax Property of Best Equivariant Confidence Intervals for the Location and Scale Parameters

Cheng Ping

Abstract

Let X be a p-dimensional random vector having a density function $\sigma^{-p}f\left(\frac{x-\theta 1}{\sigma}\right)$, where $p\geqslant 2$, $x\in R^p$, $\theta\in R^1$, $\sigma>0$, $1=(1,\cdots,1)'_{p\times 1}$. The minimax property of best equivariant confidence intervals for the location parameter θ and scale parameter σ are proved under followiny loss function

$$g\left(\frac{d_2-d_1}{\sigma}\right)+c(1-I_{(d_1,d_2)}(\theta))\quad c>0,$$

$$g\left(\frac{d_2-d_1}{\sigma}\right)+c(1-I_{(d_1,d_2)}(\sigma))\quad c>0,\ d_1>0.$$

Under giving confidence level $\geqslant 1-\alpha$ $(0<\alpha<1)$, the minimax property of best confidence interval for θ and σ are also proved in the sence $\sup\limits_{\theta,\sigma} E((d_2(X)-d_1(X))/\sigma)=\min$.

In the §3 of this paper, We prove that the usual confidence region of θ for distribution $N(\theta,\sigma^2A)$ ($A>0$, is known) has minimax property under loss function

$$V(D)/\sigma^p+c(1-I_D(\theta)),$$

where D denote confidence region, $V(D)$ denote the volume of D.